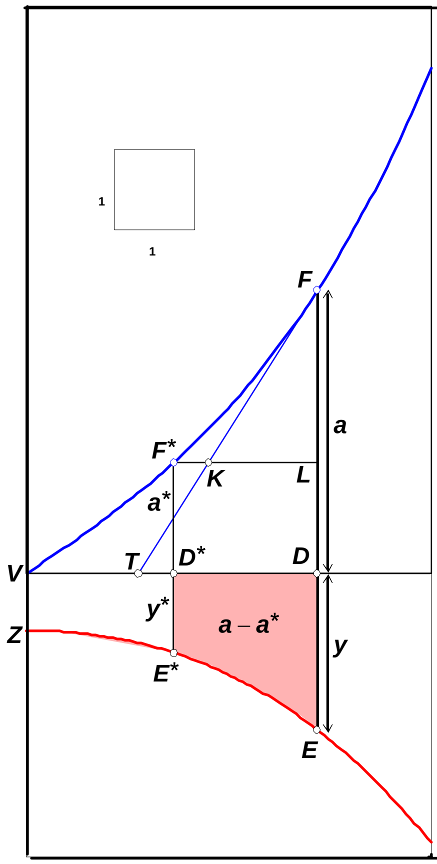
Aportaciones de la historia de las matemáticas a la educación moderna.

M. Kindt
Freudenthal Instituut, Universidad de Utrecht (Holanda)

El desarrollo de las matemáticas no avanzó de manera tan fluida como sugieren los libros de texto.
Las matemáticas como producto acabado son muy distintas de las matemáticas en su gestación. Casi siempre las ideas y los conceptos matemáticos son enseñados como requisitos canónicos y casi nunca se plantea la pregunta: ¿ Por que de tal manera? o ¿ Cómo se llega a estas cosas?
Cuando alguna vez un problema es resuelto, el método de la solución llega a ser la teoría, que los profesores enseñan sin referencia al origen de la cuestión. Con Freudenthal se puede hablar de ‘inversión anti-didáctica’. En este conferencia quiero exponer con ejemplos concretos, especialmente tomados del calculo infinitesimal y del álgebra, que existe otro camino de aprendizaje, que puede ser inspirando y instructivo para los estudiantes y, además, que muestra que las matemáticas son *obra humana*.

Un descubrimiento geométrico de Isaac Barrow.

Isaac Barrow (1630 - 1677), el profesor de otro Isaac, es decir Newton, fue el primero en reconocer la relación milagrosa entre los conceptos ‘tangente (de una curva)’ y ‘área’. Escribió un libro sobre geometría (‘Geometric Lectures’) con un montón de dibujos, casi dos por pagina de texto.
Voy a concentrarme en uno, que he adaptado un poco para esta conferencia:



Explicación de la figura

- *La curva ZE*E representa una función monótona.*
- *La curva VF*F representa el área en cerrada entre el eje horizontal, la curva ZE*E , y las verticales DE y VZ. Esta es claramente una función de la abscisa de D.*
  Es decir: los longitudes a y a repre sentan respectivamente las áreas de VD*E*Z y VDEZ.*
- *El punto T es constr uido de tal modo que la longitud del segmento DT es igual al cociente de FD y ED Entonces:*

$$DT = \frac{FD}{ED} = \frac{a}{y}$$

Afirmación:
La linea TF es una tangente de la curva *VF*F*

Demostración:

Supón que *K* es un punto de *TF* entre *T* y *F*.
Por demostrar: *K* es un punto a la derecha de la curva *VF*F*.

Por la construcción de *T* vale:

$$\frac{FL}{LK} = \frac{FD}{DT} = DE = y$$

entonces

$$FL = LK \cdot y$$

... (I)

De otro lado: *FL* = *a* ¤ *a** = área *VDEZ* ¤ área *VD*E*Z* = área *D*DEE** < *D*D* ¤ y ... (II) ,
¡ya que la curva *ZE*E* representa una función monótona!
De (I) y (II) se sigue *LK* < *D*D,* y entonces *LK* < *LF**
Así sabemos que *K* es a la derecha de la curva *VF*F*
Si prolongamos la recta *TF*, podemos demostrar de modo análogo que cada punto de la parte prolongado está a la derecha de *VF*F.*
Entonces todos puntos de la recta, excepto *F*, están a la derecha de la curva y eso significa que *TF* es el tangente de la curva en *F.*
C.Q.D.

Esta es, en versión reformulada, la demostración geometríca que Barrow dio del .... *teorema fundamental* del Calculo Infinitesimal. Pero él no tuvo ningún conocimiento de esta rama de las matemáticas, ¡ya que no fue inventada en esa epoca! Además su enfoque no mostró ninguna vislumbre del enfoque infinitesimal.

.¿ Qué nos aprende este fragmento de la obra de Barrow?

1. El principio del *teorema fundamental del Análisis Matemático* es visto antes la invención del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz.
2. Los raíces del cálculo infinitesimal están en la geometría.
3. El contraste entre geometría y análisis es menos fuerte que muchos matemáticos piensen; mejor es hablar sobre una diferencia de enfoques.
4. El enfoque geométrico - que es más intuitivo que el enfoque analítico - es subexpuesto en la enseñanza del análisis.

En el mundo hay millones estudiantes que deben aprender análisis matemático.
¿Cuántas estudiantes saben algo del enfoque geométrico de Barrow?
¿Sea aconsejable enseñar cosas de la epoca 'pre-cálculo' , como la prueba admirable de Barrow?
Claro que son preguntas retóricas.

En este conferencia quiero presentar unos ejemplos históricos que podrían servir como punto de salida de un capitulo de álgebra o análisis, o mejor que podrían ser integrados en el curso matemático para promover la comprensión.

Patronos y fórmulas
¿Quien conoce este fórmula?

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

En muchos libros de texto sobre Análisis no es más que un ejercicio de la *inducción matemática.* A ver:

Para $k = 1$ $\qquad 1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$

Supongamos: $\qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

Entonces:
$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\
&= \tfrac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\
&= \tfrac{1}{6}(k+1)[2k^2 + 7k + 6] \\
&= \tfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\
&= \tfrac{1}{6}(\boldsymbol{k+1})(\boldsymbol{k} + \mathbf{1} + 1)(2(\boldsymbol{k+1}) + 1)
\end{aligned}$$

C.Q.D.

¿Es convincente? Para ellos que entienden bien el principio de inducción matemático, creo que sí.
¿Da nos mucha comprensión de la fórmula?
Creo que NO. Es típicamente un ejemplo de 'matemática precocinada'.
Alguien descubrió la regla para nosotros y debemos mostrarla obedientemente de modo mas o menos automático.
Falta el reto, falta la sorpresa, falta la exploración, falta el triunfo del descubierto o al menos de comprensión, falta la vivencia del ¡ajá! .
Sea claro que no me gusta presentar una fórmula, que viene desde el cielo.
Pero el mal ya es pasado y vamos a considerar la fórmula un poco más.

- La suma de los cuadrados es igual a un polinomio de tercero grado.
- Este polinomio tiene que ser entero para cada valor de n, entonces el producto $n(n + 1)(2n + 1)$ tiene que ser divisible por 6 para cada valor de n.

A ver:

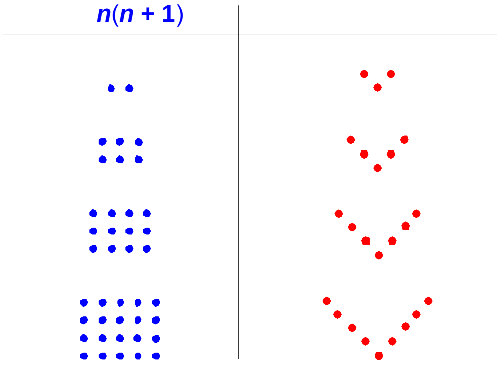
n	$n + 1$	$2n + 1$
1		
		5
		7
	5	
5		11
	7	13
7	8	
		17
		19
	11	

En cada regla se descubre factores 2 y 3.
Claro que el factor 2 no aparece en la tercera columna.
Es por que yo prefiero una tabla con no más que dos columnas:

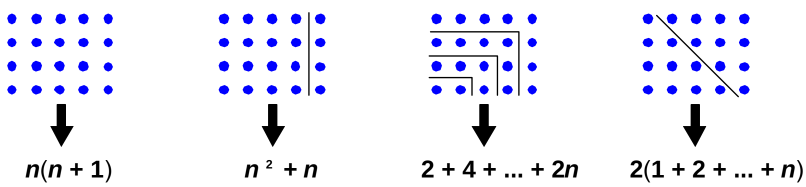
$n(n+1)$	$2n+1$
2	3
6	5
12	7
20	9
30	11
42	13
56	15
72	17
90	19
110	21

Para cada valor de n vale: $n(n + 1)$ es par, ya que es el producto de dos números consecutivos.
Además: si $n = 3m$ o $n = 3m + 2$, el producto $n(n + 1)$ es divisible por 3.
Si $n = 3m + 1$, el número $2n + 1$ nos ayuda, pues $2(3m + 1) + 1 = 6m + 3$ es divisible por 3.
Este razonamiento puede ser hecho por alumnos jovenes de bachillerato.

Ahora nos remontamos mas o menos 2500 años en la historia.
Estamos en la escuela de Pitágoras. Los pitagóricos amaran muchísimo los números naturales. Se representaran números como patronos geométricos de puntos, para poder descubrir propiedades interesantes. Por ejemplo los números de la lista anterior:



Si quiere, sea posible dar el razonamiento anterior en términos de figuras de puntos.
Consideramos los números de la forma $n(n + 1)$. Se llaman *números oblongos*.
Hay al menos cuatro representaciones algebraicas interesantes.



Una conclusión de la última representación es:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

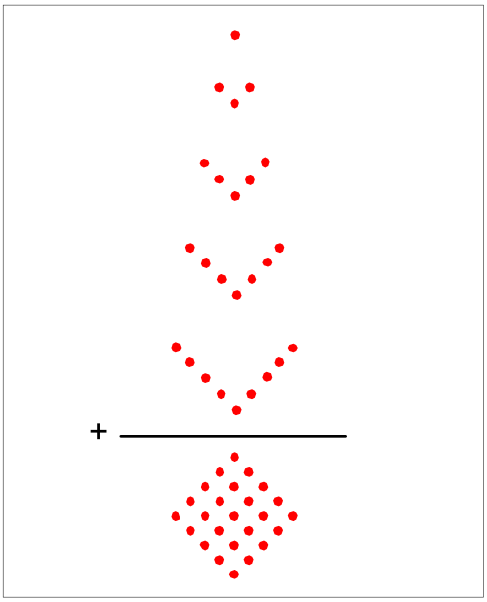
Este fórmula determina números que se llama *números triángulos*.[1] El número triángulo 10 (= 1 + 2 + 3 + 4) fue un número sagrado para los pitagóricos. Los números figurados dan una oportunidad adecuada para ejercitar álgebra elemental. Investigar patronos y construir

---

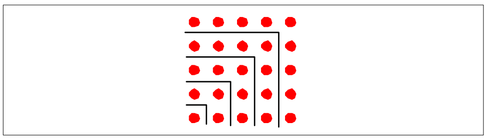
[1] A veces se pueden leer que los pitagóricos se dedicaran a las matemáticas a la playa, Harían los números figurados con los dedos en la arena... Una otra versión romántica es que hicieron los números figurados con piedrecillas. Si no es verdad, es bien inventado.

formulas son actividades sentenciosas y desafiantes para los alumnos y el contexto histórico puede dar un color cultural.

Consideramos un otro descubierto de la escuela de Pitágoras.



Entonces: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$.
Generalmente: la suma de una serie de números impares consecutivos, empezando con 1, es igual a un cuadrado. La figura da una demostración de estilo paradigmático y segun mi opinión es perfecto y muy claro.
Una representación más compacta:



Entonces tenemos:

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + (2\boldsymbol{n} - 1) = \boldsymbol{n}^2}$$

o más formal:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

Los pitagóricos aplicaran este fórmula para descubrir ternos pitagóricos. Si el último termino de una suma de números impares es un cuadrado, obtenemos fácilmente tres números naturales *a*, *b*, *c* con la propiedad $a^2 + b^2 = c^2$. Veamos:

$1 + 3 + 5 + 7 + \mathbf{9} = (1 + 3 + 5 + 7) + 3^2$ □ $4^2 + 3^2 = 5^2$.
$1 + 3 + \ldots + 9 + \ldots + 23 + \mathbf{25} = (1 + 3 + \ldots + 23) + 5^2$ □ $12^2 + 5^2 = 13^2$
$1 + 3 + \ldots + 9 + \ldots + 25 + \ldots + 47 + \mathbf{49} = (1 + 3 + \ldots + 47) + 7^2$ □ $24^2 + 7 = 25^2$
etc.

De ese modo se obtiene ternos pitagóricos con dos números consecutivos.

3 , 4 , 5 **5 , 12 , 13** **7 , 24 , 25** **9 , 40 , 41** **11 , 60 , 61** **13 , 84 , 85** **etc.**	Observación: cada número impar desde 3, es elemento de un terno pitagóroco. Representación general de estos ternos: $2n + 1$; $2n(n + 1)$; $2n(n + 1) + 1$

Sabemos que no todos los ternos pitagóricos *elementales* (es decir sin divisores comunes) son generados de tal modo. Los babilonios ya han descubierto otros ternos, como sabemos de una tabla de arcilla llamada 'Plimpton 322'. Contiene una lista de quince ternos, empezando con 120, 119, 169 y terminando con 90, 56, 106. El último puede ser reducido a 45, 28, 53. Los dos no caben en el patrono que es esbozado arriba.
Es muy probable que los babilonios han usado el algoritmo (o uno que es equivalente) para generar todos los ternos pitagóricos, es decir:

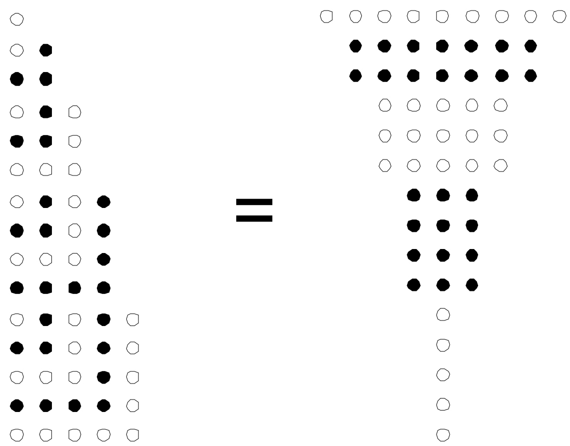
$$p^2 - q^2 \;,\; 2pq \;,\; p^2 + q^2$$

Para p = 81 y q = 40 obtenemos el terno impresionante 4961 , 6480 , 8161, que es el décimo en la lista babilónica.
Si tenemos para q y p dos números consecutivos, diga $p = n + 1$ y $q = n$, entonces obtenemos la lista anterior.
El tema de ternos pitagóricos no se trata mas veces en el bachillerato. Según mi opinión es una pena.
Es un asunto atractivo y rico y se puede profundizarse en un parte de matemática babilónica: empezando con la escritura cuneiforme, operando con la numeración sexagésimal, todo es muy instructivo.

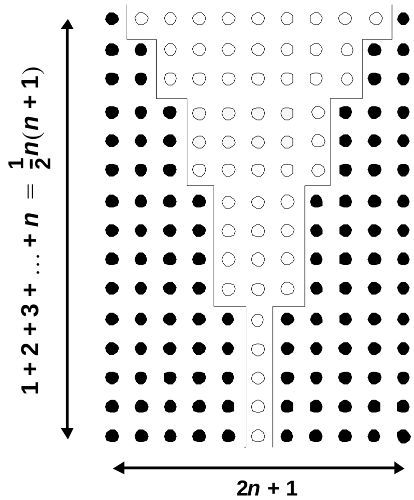
Una otra (imaginable) aplicación (no se nada si los pitagóricos la descubrieron) de la regla sobre la suma de los números impares es la siguiente:

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n^2 = 1 + 3 + \dots + (2n - 1)$$
$$+ \overline{}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 1n + 3(n - 1) + 5(n - 2) + \dots + (2n - 1)$$

Viisualmente



Este representación nos da la idea para una demostración visual de la fórmula para la suma de cuadrados consecutivos:



Es un demostración intuitiva, ¡pero otra vez es muy convincente!
Además: después visto este figura, se puede memorizar la fórmula sin problemas.
Quizás, me gusta más este versión:

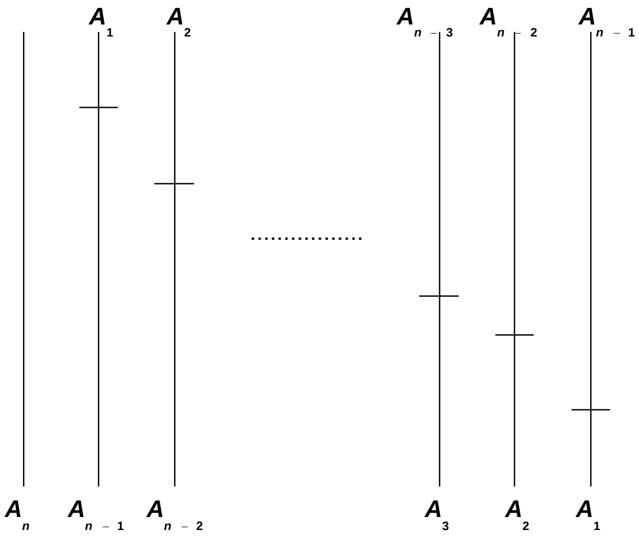
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + \dots + n)(2n + 1)$$

Euclides y Arquímedes, que vivieron unos siglos después Pitágoras, no han usado la representación de números naturales por configuraciones de puntos. Usaron a veces segmentos de líneas para presentar números.Aquí hay un lema de Arquímedes de su libro ‘Sobre Espirales’.

.

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ lineas en una progresión aritmetica creciente, cuya diferencia común es igual al primero termino, pues:

$$(n+1) \times C(A_n) + A_1 \times (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = 3 \times [C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + \ldots + C(A_n)]$$



En notación ‘moderna’ :

$A_1 = a$, $A_2 = 2a, \ldots, A_n = na$ y $C(A_k) = (ka)^2$

Sin problema podemos tomar $a = 1$, entonces tenemos:

$$(n+1)n^2 + (1+2+3+\ldots+n) = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

Esta fórmula es equivalente de la fórmula anterior.

Ya que:

$$(n+1)n^2 = 2n \cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) = 2n(1+2+3+\ldots+n)$$

y pues entonces:

$$(n+1)n^2 + (1+2+3+\ldots+n) = (2n+1)(1+2+3+\ldots+n)$$

Solamente debemos dividir por 3 y volvemos a obtener la fórmula anterior de la suma de los cuadrados.

¿Cómo demostró Arquímedes este fórmula?

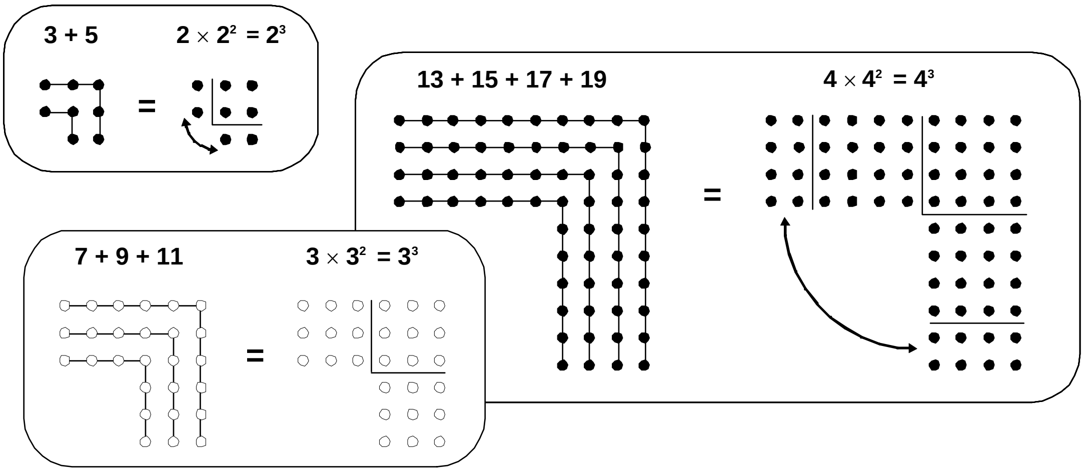
Usó como lemas estas dos identidades:

I $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n + 3(n-1) + 5(n-2) + \ldots + (2n-1)$$

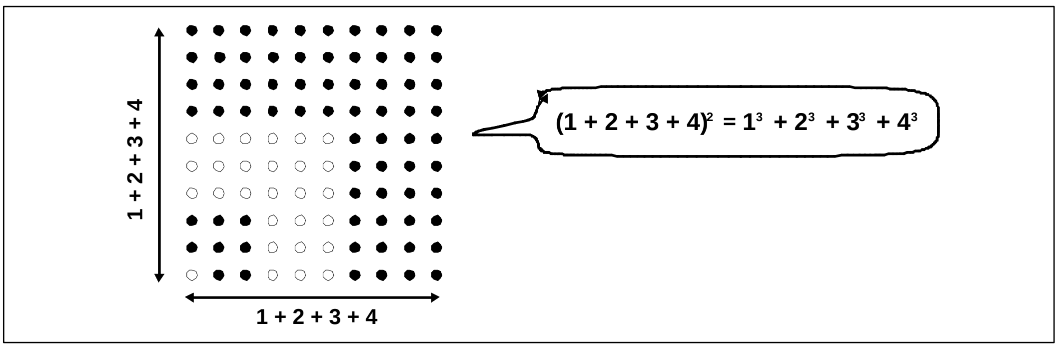
II $$2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2) + 2[1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots+(n-1)1] = (n+1)n^2$$

Ya hemos vista la primera. Para la segunda existe una demostración visual también (distinto de la demostración de Arquímedes que es un poco complicada). Arquímedes combinó las identidades I y II por sumarlas y eso resulta en su fórmula.

Necesitó su fórmula entre otras para calcular el área de un ‘sector espiral’, como veremos pronto.
Su método para obtener la fórmula es más complicado que la demostración con números figurados y es por eso no quiero recomendarlo para la enseñanza.
Un matemático griego que, distinto de Euclides y Arquímedes, ha continuado el método con números figurados, fue Nicomaco de Gerasa (100 D.C.). Escribió una obra denominada ‘Introducción a la Aritmética’ en donde trata las propiedades ‘maravillosas y divinas’ de los números naturales.
Un descubrimiento de él es el siguiente: *cada número cubo es la suma de números impares consecutivos*.
Veamos: $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$.
No sabemos como demostró (o al menos entendió) esa propiedad, quizás por números figurados.



Parece casi increíble que Nicomaco no haya deducido la siguiente fórmula:



O generalmente:

$$(1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

Este fórmula, que es muy notable, tampoco figura en los libros de texto de bachillerato. Según mi opinión es una omisión irremisible. No solo es unas de las fórmulas más elegantes de las matemáticas, si no también es muy instructiva. Puede reprimir el impulso de muchos alumnos para pensar que p.e. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. De otro lado puede ser la fuente de otros equivocaciones como $(a + b + c)^2 = a^3 + b^3 + c^3$, ¿quien sabe?

Podemos decir que la representación antigua de sucesiones de números naturales por patronos de puntos, que es en la primera vista bastante primitiva, puede ser muy fértil para el aprendizaje de la álgebra.

Existen muchos ejercicios interesantes que dan la oportunidad a practicar cosas importantes como razonar y generalizar.
Unos ejemplos para investigar:

- la suma de dos consecutivos números triangulares es un cuadrado
- **4** □ número oblongo **+ 1** son número cuadrado
- el producto de dos números oblongos consecutivos siempre es un número oblongo
- Nicomaco también introdujo 'números pentagonales' : 5, 12, 22, 35, 51, etc.
  ¿Cómo representarlos con patronos de puntos? ¿Qué fórmula?

Las tres fórmulas que pasaron, es decir:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

o después sustitución de la primera en las otras dos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

preguntan una continuación. En la historia se han desarrollado distintos métodos para inventar estas sumas de potencias con exponente común.
Una primera observación es que el grado del polinomio que es igual a tal suma, parece a ser 1 más que el exponente común. Este hipótesis puede ser el comienzo de una investigación continuada y para buscar un método más sistemático.
Hay una regla bastante sencilla, sobre la relación entre una sucesión de números reales y las sucesiones de sus sumas respectivamente sus diferencias.
Si tenemos la sucesión

$$S_0, S_1, S_2, \ldots$$

podemos definir la sucesión de las diferencias como:

$$S_1 - S_0, S_2 - S_1, S_3 - S_2, \ldots$$

Llamamos

$$D_k = S_{k+1} - S_k$$

La sucesión de las sumas parciales de

$$D_0, D_1, D_2, \ldots$$

es la sucesión:

$$D_0, D_0 + D_1, D_0 + D_1 + D_2, \ldots$$

y es igual a

$$S_1 - S_0, S_2 - S_0, S_3 - S_0, \ldots$$

Generalmente tenemos:

$$D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1} + D_n = S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + \ldots + S_n - S_{n-1} + S_{n+1} - S_n = S_{n+1} - S_0$$

A veces se habla aquí del 'principio telescopio'.
Podemos escribir este resultado como

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = S_{n+1} - S_0$$

De otro lado podemos escribir, usando el símbolo ¤ para diferencia:

$$\Delta_{k}^{k+1} S_n = S_{k+1} - S_k = D_k$$

Es por eso que podemos decir que ¤ y ¤ son operaciones inversas.
Este ley del 'análisis discreto' es análogo con el teorema fundamental del 'análisis continuo', pero conceptualmente la versión discreta es mucho más fácil. Leibniz publicó en 1714 una reflexión con el titulo '*Historia et origo calcli differentialis*' y mencionó que las reglas sobre las sucesiones le han inspirado por la invención del cálculo infinitesimal.
La idea para aplicar el 'teorema fundamental del cálculo discreto' es que cómunmente sea fácil calcular diferencias de una sucesión.
Veamos la sucesión de los números cubos:

0, 1, 8, 27 , 64 , 125 , ...

Inventar la fórmula para la sucesión de las diferencias, es decir

1, 7 , 19 , 37 , 61 , 91, ...

no da muchos problemas:

$$D_k = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Luego podemos sumar estas diferencias:

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = (n+1)^3 - 0^3 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + \sum_{k=0}^{n} 3k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Entonces:

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$

Supongamos conocido la fórmula para la suma 1 + 2 + ... + n y incógnita la fórmula para $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$
Entonces podemos resolver la última fórmula por esa igualdad:

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + (n+1)$$

con el resultado que ya hemos visto.

Para hallar la fórmula para la suma $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ usamos la sucesión $1^5, 2^5, 3^5, \ldots$

$$D_k = (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = (n+1)^5 = 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10\sum_{k=0}^{n} k^3 + \sum_{k=0}^{n} 10k^2 + \sum_{k=0}^{n} 5k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Usando las fórmulas de las sumas de los cuadrados y de los cubos, obtenemos:

$$(n+1)^5 = 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + \tfrac{10}{4}n^2(n+1)^2 + \tfrac{10}{6}n(n+1)(2n+1) + \tfrac{5}{2}n(n+1) + (n+1)$$

Por eso:

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)3n^2+3n-1)$$

que es equivalente con:

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$

Paso por paso podemos calcular polinomios que son iguales a las sumas de potencias con el mismo exponente. Es un ejemplo bueno de un proceso inductivo:

$\sum k$ ***conocido*** $\longrightarrow$ $\sum k^2$ ***calculado***

$\sum k$ ***conocido***, $\sum k^2$ ***conocido*** $\longrightarrow$ $\sum k^3$ ***calculado***

$\sum k$ ***conocido***, $\sum k^2$ ***conocido***, $\sum k^3$ ***conocido*** $\longrightarrow$ $\sum k^4$ ***calculado***

Etc.

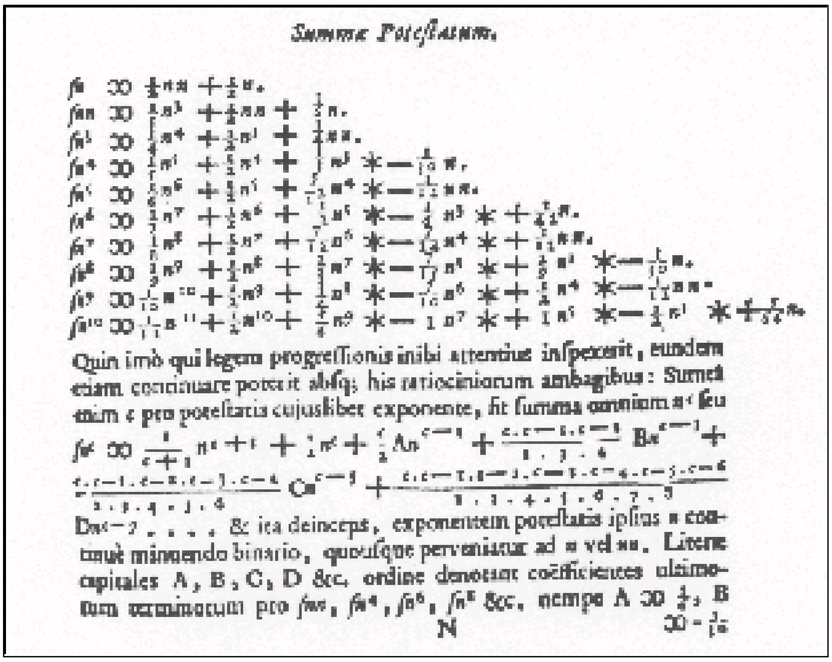
Este método es relativamente elemental, pero laborioso si no podemos usar un programa de computeralgebra. Puede ser motivo por preguntas interesantes como:

- parece que cada de estros polinomios tiene los factores n y $n+1$; se puede entenderlo por el proceso inductivo y demostrarlo formalmente por inducción matemática.
- algunos de esos polinomios tiene el factor $2n+1$, otros no tienen; se puede poner una hipótesis y investigarla.

En su libro Ars Conjectandi dio Jacobo Bernoulli una lista de fórmulas y una generalización de estas.[2]

---

2 Hay un error en la lista: el termino $-\frac{1}{12}nn$ en la suma $\int n^9$ debe ser


Summæ Potestatum.

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

Dn^{c-7} . . . . & ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n continuè minuendo binario, quousque perveniatur ad n vel nn. Literæ capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe A ∞ $\frac{1}{6}$, B ∞ $-\frac{1}{30}$

N

Es interesante para estudiar la lista. Primeramente el signo de igualdad y el signo para la suma atraen la atención. También podemos observar patronos. Por supuesto los coeficientes de las potencias mayores que son terminos consecutivos de la sucesión armonica; se puede entenderlo por el proceso inductivo. Los términos siguientes todos tienen

$\frac{1}{2}$

como coeficiente, pero es un poco más complicado explicarlo por el proceso inductivo. Los coeficientes del termino de primero grados son llamados ‘números de Bernouilli’ ; juegan un papel en distintos lugares del análisis.

La pirámide, la parábola y la espiral

En el mundo hay millares libros de texto sobre ‘Calculo Infinitesimal’.

Mi estimación es, que 99% de estos libros, tanto en la universidad y como en el bachillerato, tienen globalmente la misma ordenación. Es decir:

(1) continuidad y limite;

(2) la derivada y calculo diferencial;

(3) la anti-derivada y calculo integral;

(4) ecuaciones diferenciales.

Claro. Se necesitan el concepto de limite para poder definir la derivada y para demostrar las reglas de derivación. Se necesitan conocer el calculo diferencial para poder calcular integrales definidas o indefinidas. Se necesitan conocer el calculo integral para poder resolver ecuaciones diferenciales.

Entonces, este ordenación es lógico y eficiente, pero.... es anti-histórica.

Además es típicamente una ordenación estructuralista y un enfoque ‘top-down’.3

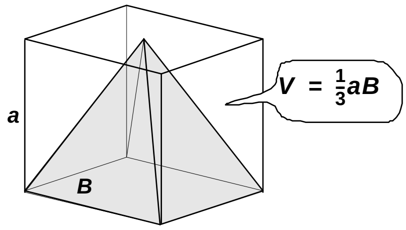
Dudo fuertemente si el enfoque tanto estructuralista del análisis sea sumamente favorable desde el punto de vista de la didáctica. Quiero citar el alemán Otto Toeplitz (1926):

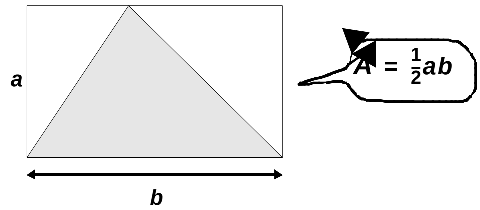
$-\frac{3}{20}nn$

3Mi aprendizaje de análisis matemático en la universidad era de tal modo. Es verdad, yo no tuvo muchos problemas con la asignatura. Solamente en el comienzo: me ha costado no pocos quebraderos de cabeza por entender el método con épsilon y delta. Pude hacer los ejercicios, sí. Pero el método me pareció muy artificial. Después dos o tres meses entendí suficiente el núcleo de la idea.

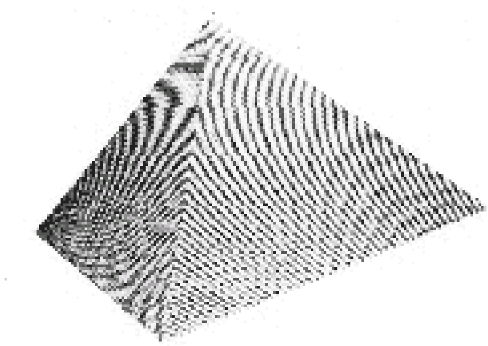
Considerando todos los conceptos básicos del cálculo infinitesimal que hoy día enseñamos como requisitos canónicos, por ejemplo el teorema de valor medio, el desarrollo de Taylor, el concepto de convergencia, la integral definida, el cociente diferencial mismo, nunca se ha planteado la pregunta: ¿Por que es así? ¿Cómo se llega a ellos? Sin embargo en algún momento, estas cosas tuvieron que haber sido metas de búsquedas urgentes, o contestaciones a preguntas candentes en su tiempo, es decir, en la epoca de su creación.
Si regresamos al origen de estas ideas, ellas perderían esta apariencia de estar muertas, de ser hechos prefabricados, y en su lugar cobrarían nuevamente una vida fresca y vibrante.

El calculo infinitesimal tiene una historia muy larga, de hecho empezó en la antigüedad, cuando los matemáticos griegos desarrollaran el método exhaustivo para determinar áreas y volúmenes.
Voy a ilustrar este método primeramente a la pirámide. Si llamamos la altura ***a*** y (el área de) la base ***B***, tenemos la fórmula conocida:





La fórmula es conocida, pero no es trivial. Comparémosla con la fórmula del área de un triángulo.
Alumnos jovenes pueden descubrir la segunda formula - solamente hay una complicación en el caso de un triángulo obtuso -, pero para una cualquiera pirámide es verdaderamente difícil.
A ver este dibuje de Agnes Denes.



De hecho es una pirámide escalonada, que es construida de cubitos.
Puedes creer o no, pero la pirámide tiene 100 pisos y la base contiene 100 por 100 cubitos.
La pregunta natural es: cuantos cubitos contiene este pirámide.
En la cima tenemos solo 1 cubito. En los pisos siguientes tenemos 2^2 , 3^2, 4^2 etc· cubitos.
Entonces en total tenemos: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2$ cubitos.
Por la fórmula sabemos que esa suma es igual a

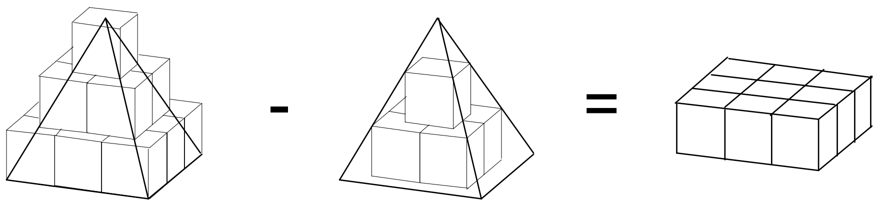
$$\frac{1}{6} \times 100 \times 101 \times 201 = 338350$$

Este número difiere relativemente poco de un tercero de 1000000 (= 100^3) que es la cantidad de cubitos del paralelepipedo que envuelve la pirámide.
Si miramos a la pirámide escalera por las pestañas, parece un pirámide continua.
La idea es que, refinando la división en los pisos, aproximaremos la razón
$\frac{1}{3}$
.

Pero, para efectuar este proceso de aproximación, necesitamos la formula para la suma de los cuadrados.
Por la comodidad uso una otra versión:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1)$$

Según el método clásico, voy a aproximar la pirámide desde abajo y desde arriba con pirámides escalonadas, como en la figura::



estimación superior S_3 ***estimación inferior s_3***

Con cada división de la altura en una cantidad - sea n - de partes iguales podemos construir dos pirámides escolanadas con n y con n □ 1 pisos que dan respectivamente una estimación superior y una estimación inferiordel volumen de la pirámide.
Si indicamos el volumen del paralelepipedo con W, entonces la diferencia entre super- y estimación inferior es igual a W/n. Entonces para n = 10, 100, 1000, etc. la diferencia sera 0.1W, 0.01 W, 0.001W, etc. y porque las dos estimaciones se aproximaran cualquiera cerca. Se llama un proceso de compresión.
Usando la formula para la suma de los cuadrados obtenemos en el caso n = 10:

$$\tfrac{1}{3} \times \frac{9 \times 9.5 \times 10}{10^3} < \frac{V}{W} < \tfrac{1}{3} \times \frac{10 \times 10.5 \times 11}{10^3}$$

o bien

$$\tfrac{1}{3} \times 0.9 \times 0.95 < \frac{V}{W} < \tfrac{1}{3} \times 1.05 \times 1.1$$

Para n = 100, 1000, ... tenemos análogamente::

$$\tfrac{1}{3} \times 0.99 \times 0.995 < \frac{V}{W} < \tfrac{1}{3} \times 1.005 \times 1.01$$

$$\tfrac{1}{3} \times 0.999 \times 0.9995 < \frac{V}{W} < \tfrac{1}{3} \times 1.0005 \times 1.001$$

$$\ldots$$

Ahora es muy plausible que la proporción de V y W es igual a 1/3, por que tanto los números al lado izquierda como al lado derecha, aproximaran a
$\tfrac{1}{3} \times 1 \times 1$
y de tal modo podemos entender que
$V = \tfrac{1}{3}W$
.

Un proceso de compresión con intervalos que se contraen paso por paso y cuyos longitudes serán menor que cualquiera número positivo, es probablemente la mayor introducción del concepto limite.

Si lo quieren. podemos tratarlo de modo más exacto.
El largo del intervalo n de la secuencia construida es 10^{-n}.

Porque tanto $\frac{V}{W}$ como $\frac{1}{3}$ está en cada intervalo de la fila, vale: $\left|\frac{V}{W}-\frac{1}{3}\right|<10^{-n}$ para n = 1, 2, 3, ...

Para ellos que todavía dudan si $\frac{V}{W}$ y $\frac{1}{3}$ son iguales, podemos aplicar 'reducción al absurdo'.

Supongamos: $\frac{V}{W} \neq \frac{1}{3}$, entonces $\left|\frac{V}{W}-\frac{1}{3}\right|$ es igual a un número positivo. Este número (diga p) tiene un número finito de ceros después de la coma. Todos los números de la sucesión infinita 0.1, 0.01, 0.001, ...
podrían ser mayor que p, que es absurdo.

De hecho aplicamos el axioma de la continuidad de los números reales. Pero en el fase inicial no es necesario explicitarlo.

Voy a comparar este prueba con un razonamiento de Arquímedes en una situación similar. Concernió el área de una figura limitada por una espiral en comparación con el área de un circulo, pero como veremos pronto es matemáticamente lo mismo como la comparación de los volúmenes de una pirámide y un paralelepipedo. Traduzco el razonamiento en términos modernos.

PArquímedes usó las dos desigualdades:

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}>\frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}<\frac{1}{3}$$

Es una consecuencia de la fórmula sobre la suma de los cuadrados consecutivos.

Claro que Arquímedes usó su propia versión, pero yo prefiero este prueba sencilla:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{3}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1) \ > \ \tfrac{1}{3}n^3$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\tfrac{1}{3}(n-1)(n-\tfrac{1}{2})n \ < \ \tfrac{1}{3}n^3$$

Como hemos visto que se puede hacer la diferencia S_n - s_n menor que cualquiera número positivo.

Supongamos $V>\frac{1}{3}W$, entonces podemos tomar n de tal modo que

$$V-\tfrac{1}{3}W>S_n-s_n \qquad\qquad (*)$$

Vale:

$$\frac{s_n}{W} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

o bien

$$s_n < \tfrac{1}{3}W$$

Combinando con (*) obtenemos

$$V - \tfrac{1}{3}W > S_n - \tfrac{1}{3}W$$

:

entonces:
$V > S_n$

Pero S_n es una estimación superior de *V*, entonces vale:
$V < S_n$

Por eso el hipótesis
$V > \frac{1}{3}W$
es absurdo.

Análogamente se demuestra el absurdo del hipótesis
$V < \frac{1}{3}W$
.

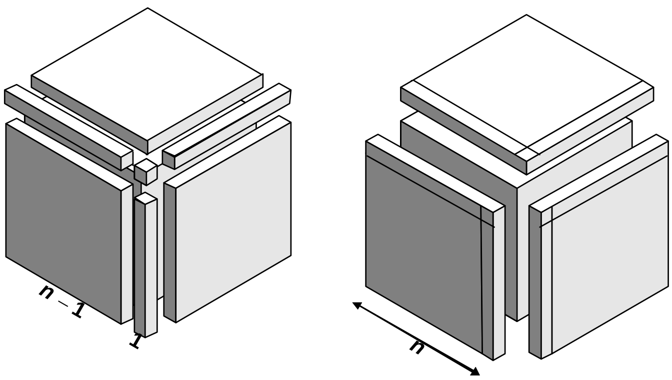
El razonamiento de Arquímedes implica dos límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

Para su demostración usó dos igualdades, deducidos por su fórmula de la suma de cuadrados.
¡Pero de hecho este artillería es demasiado gruesa!
Podemos deducirlas por una otra desigualdad:

$$\mathbf{3(n-1)^2 < n^3 - (n-1)^3 < 3n^2}$$

Se puede entender esa desigualdad mirando los bloques......



Entonces aplicamos el ‘principio de telescopio’:

$$3\cdot 0^2 < 1^3 - 0^3 < 3\cdot 1^2$$

$$3\cdot 1^2 < 2^3 - 1^3 < 3\cdot 2^2$$

$$3\cdot 2^2 < 3^3 - 2^3 < 3\cdot 3^2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

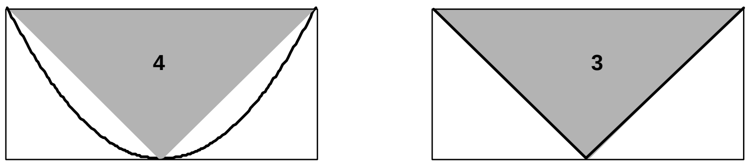
$$3(n-1)^2 < n^3 - (n-1)^3 < 3n^2$$

$$+ \overline{}$$

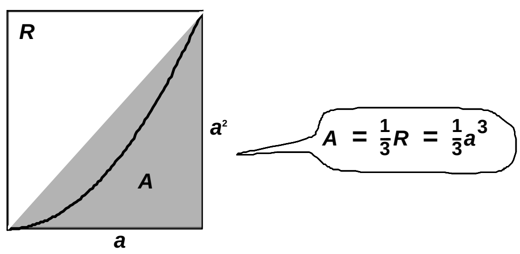
$$3(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) < n^3 < 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

Es por eso que no necesitamos la fórmula para la suma de cuadrados consecutivos.
La pregunta es si el método lo más sofisticado, sea lo más deseable desde el punto de vista didáctica.
Para calcular la aproximación del volumen de la pirámide por una ‘pirámide escalonada’, sin duda el primer impulso sea calcular el volumen de la escalera con la fórmula llamada.
Por supuesto es muy útil a discutir con los estudiantes sobre el método aplicado, y explicitar que solamente el factor
$\frac{1}{3}$
en la fórmula parece relevante. Al final pueden entender que la fórmula de la suma es abundante.

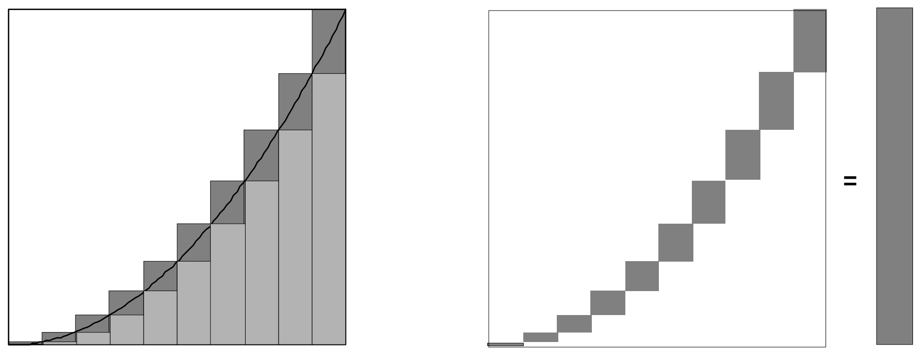
A veces se pueden coger problemas o situaciones distintos en el mismo modelo matemático se habla de problemas o situaciones *isomorfos*.
Así manifiesta que la determinación de la razón entre el volumen de una pirámide y su paralelepipedo envolvente es similar a la determinación de la razón entre un segmento simétrico de la parábola y su rectángulo envolvente.



Arquímedes demostró que la razón entre el segmento parabolisch y el triángulo inscrito es como 4 a 3. Usó sucesiones geometrícas para probar el teorema. Aquí quiere seguir una otro camino.
Observo que la afirmación de Arquímedes es equivalente con



En la figura el intervalo [0 , *a*] es partido en diez partes iguales. Con tal partición corresponde una estimación inferior y una estimación superior del área abajo la parábola. La diferencia entre las dos aproximaciones es exactamente igual al área del última ‘tira superior’.



Supon que el intervalo es partido en ***n*** partes iguales. La diferencia de la aproximación por exceso ypor defecto es igual al área del rectángulo envolvente dividido por ***n*** y entonces puede ser hecho menor que cualquiera pequeño número positivo. Por este proceso limite obtenemos el área del 'triángulo parábolico'.
Vamos a calcular.

'tira'	*inferior*	*superior*
1	0	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}a\right)^2$
2 ·	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}a\right)^2$	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}a\right)^2$
3	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}a\right)^2$	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}a\right)^2$
⋮	⋮	⋮
n - 1	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{n-2}{n}a\right)^2$	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}a\right)^2$
n	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}a\right)^2$	$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}a\right)^2$

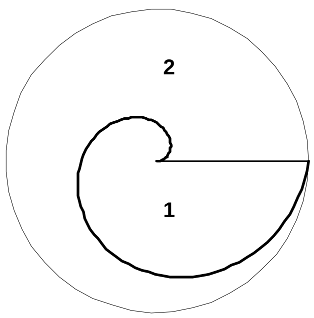
Entonces;

$$\frac{a^3}{n^3}(1^2+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^2) < A < \frac{a^3}{n^3}(1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2)$$

y por uno razonamiento similar a lo que hemos vista con la pirámide, vale

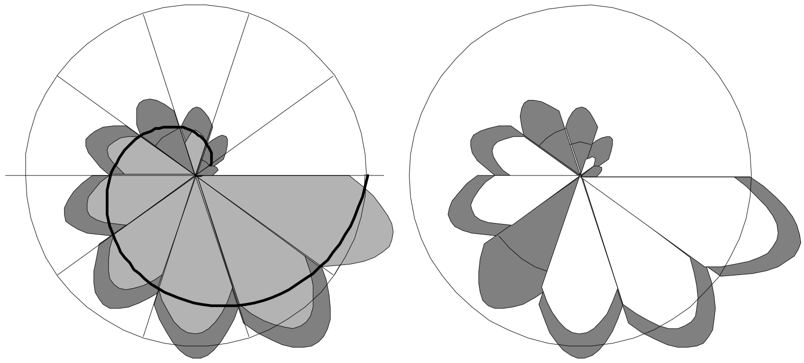
$$A = \tfrac{1}{3}a^3$$

Volvamos



a la obra de Arquímedes. En 'Sobre espirales' da una definición que es equivalente con la siguiente:
el lugar de los puntos que recorren una raya con una velocidad constante, mientras que la raya gira alrededor su extremo con una velocidad angular constante, es una ***espiral.***
Después un tratamiento de unas propiedades de esta curva, entre otros sobre la construcción de la tangente en cualquiera punto, sigue una 'proposición' bonita sobre el área hecho por la primera espira.
El área, encerrado por la primera espira de la curva y el segmento que une el punto de salida con el último punto, es igual al tercero del área del circulo envolvente.

Para demostrar su proposición, Arquímedes usó el método de compresión y el principio de reducción ad absurdo.



Para eso Arquímedes dividío el círculo en sectores congruentes. En cada parte tomó dos menores sectores circulares que aproximan un 'sector de la concha' por defecto y por exceso. La figura muestra una partición del círculo con radio *r* en diez sectores. La diferencia entre la estimación superior (S_{10}) y la estimación inferior (s_{10}) es igual a la suma de los 'segmentos anillos' y estos segmentos juntos forman exactamente un sector circular de la partición.
Generalmente vale:

$$S_n - s_n = \frac{C}{n}$$

en que *C* es el área del círculo.
Entonces se puede hacer este diferencia menor que cualquiera número postitivo. Por eso las dos aproximaciones del área de la espiral tienen el mismo valor limite.

Ahora el cálculo. Por la comodidad supongamos que la velocidad angular de la raya que genera la espiral es 1 radial por segundo y también que la velocidad del; movimiento rectilíneo es 1 cm por segundo.
Después una vuelta completa la distancia entre el punto de la espiral y el punto de salida es igual a 2□.
Las distancias intermedias hasta el centro son respectivamente

$$\frac{1}{n} \cdot 2\pi, \frac{2}{n} \cdot 2\pi, \ldots, \frac{n-1}{n} \cdot 2\pi$$

Sea *E* es el área encerrado por la espiral y el último radio.
La razón de los áreas de dos sectores circulares con el mismo ángulo claramente es igual a la razón de los cuadrados de sus radios. Entonces:

$$\frac{1}{n} \times (0^2 + (\tfrac{1}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{n-1}{n})^2) < \boldsymbol{\frac{E}{C}} < \frac{1}{n} \times ((\tfrac{1}{n})^2 + (\tfrac{2}{n})^2 + \ldots + 1^2)$$

o bien:

$$\frac{1}{n^3} \times (1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2) < \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{C}} < \frac{1}{n^3} \times (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

El resto sea claro. Se puede copiar el razonamiento en el caso de la pirámide o de la parábola.
Con resultado final:

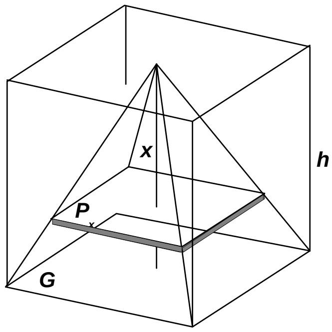
$$E = \tfrac{1}{3}C = \tfrac{4}{3}\pi^3$$

Este método 'pre-cálculo' tiene un valor didáctico por que anticipa al concepto 'suma de Riemann'.
Por supuesto el método 'moderno' es mucho más eficiente, pero eficaz no debe ser siempre el hilo conductor de la enseñanza. Lo hacer visible de la ruta desde concreto hacia abstracto, lo comparar de metodos distintos y lo contemplar de los procesos son condiciones necesarias para el desarrollo de comprensión verdadera. Una ventaja de dar una vista del génesis del cálculo infinitesimal también es que el estudiante experimentará y estimará mas la potencia del cálculo infinitesimal y eso pueda contribuir a una actitud positiva.
El terno: pirámide, parábola, espiral sea muy adecuado para un tratamiento en llamado espíritu.
Después, cuando el instrumento del cálculo infinitesimal sea desarrollado suficientemente, se puede volver a los problemas y eso puede llevar a aoluciones como se puede hallar en muchos libros de Análisis:

$$P_x = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \cdot G \cdot \Delta x$$

Volumen pirámide =

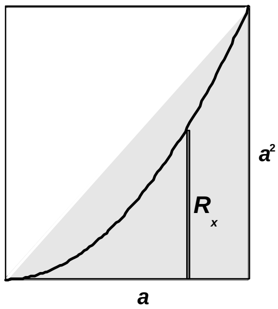
$$\int_0^h \frac{x^2}{h^2} G\,dx = \frac{G}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{G}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}hG$$



$$R_x = x^2 \cdot \Delta x$$

Area 'triángulo parábolico' =

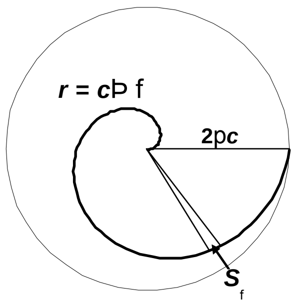
$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$$



$$S_f = \frac{\Delta\phi}{2\pi}\cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\Delta\phi$$

Area 'concha espiral' =

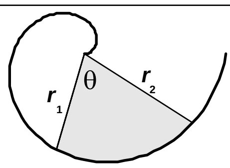
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\,d\phi = \frac{1}{2}c^2\int_0^{2\pi} \phi^2\,d\phi = \frac{4}{3}\pi^3 c^2$$



En cuanto a la espiral Arquímedes hizo un trabajo admirable por deducir una fórmula para el área de cualquiera sector. Necesitó un calculo bastante complicado, que despierta más admiración, si se da cuenta que no pudo disponer de nuestro idioma algebraico.
Descubrió esta fórmula:

área sector espiral =

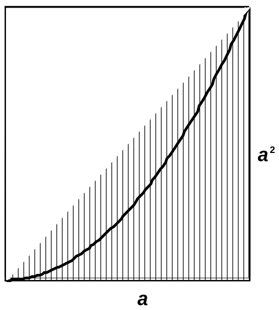
$$\frac{\theta}{2}\cdot\left[r_1 r_2 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)^2\right]$$

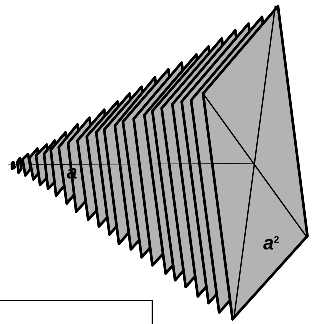


El lector puede hallar este fórmula sin muchos problemas, usando el cálculo integral.

Dos discípulos de Galileo

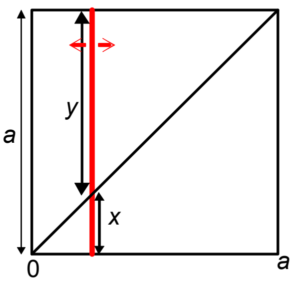
Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y Evangelista Torricelli (1608 - 1647) fueron alumnos de Galileo.
Ambos son famosos por sus resultados en pre-cálculo.
Cavalieri desarrolló una teoría, que fue llamado ‘el método de los indivisibles’.
Según su teoría una área es la suma de infinitas rectas y un volumen es la suma de infinitos planos.
Por este método se puede comprender fácilmente la relación entre el área de un triángulo parárabolico y el volumen de la pirámide.
El área del triángulo abajo de la parábola $y = x^2$, es la ‘suma continua’ de infinitos segmentos verticales.
La longitud de cada segmentos es igual al cuadrado de la abscisa correspondiente.
Pero un cuadrado puede ser representado geométricamente por una figura 2-dimensional. Así obtenemos una serie continua de cuadrados que forman una pirámide cuya altura = a y cuya base tiene el área $a^{\square}$.
Por eso obtenemos la misma fórmula para el área del triángulo parábolico y la pirámide.





$$\sum_{0}^{a} x^2 = \tfrac{1}{3}a \cdot a^2 = \tfrac{1}{3}a^3$$

Este enfoque parece osado, pero da una comprensión sorprendida.
Si quiere, se puede escribir todo con sumas de Riemann y así se puede obtener una demostración correcta, según las pautas de nuestra epoca.
Cavalieri logró a hallar las fórmulas para los áreas abajo de las curvas $y = x^3$, $y = x^4$, ... , $y = x^9$.
Por dar una idea de su enfoque es tratado aquí el primero caso. Mira la figura.



$$a^2 = \sum_{0}^{a} a = \sum_{0}^{a} (x+y) = \sum_{0}^{a} x + \sum_{0}^{a} y = 2\sum_{0}^{a} x$$

por simetría

Entonces:

$$\sum_{0}^{a} x = \tfrac{1}{2}a^2$$

Claro que está fórmula sigue directamente de la representación geometríca. Solamente es un arranque a la deducción de las fórmulas para

$$\sum_0^a x^3,\quad \sum_0^a x^4,\quad \sum_0^a x^5,\quad \text{etc.}$$

Veamos la deducción algebraica de la ‘suma continua’ de los cubos::

$$a^4 = \sum_0^a a^3 = \sum_0^a (x+y)^3 = \sum_0^a x^3 + 3\sum_0^a x^2 y + 3\sum_0^a x y^2 + \sum_0^a y^3 =$$

por simetría

$$2\sum_0^a x^3 + 6\sum_0^a x^2 y \ =$$

$$2\sum_0^a x^3 + 6\sum_0^a x^2 (a-x) \ =$$

$$2\sum_0^a x^3 + 6a\sum_0^a x^2 - 6\sum_0^a x^3 \ =$$

$$-4\sum_0^a x^3 + 6a\,\tfrac{1}{3}a^3 \ =$$

$$-4\sum_0^a x^3 + 2a^4$$

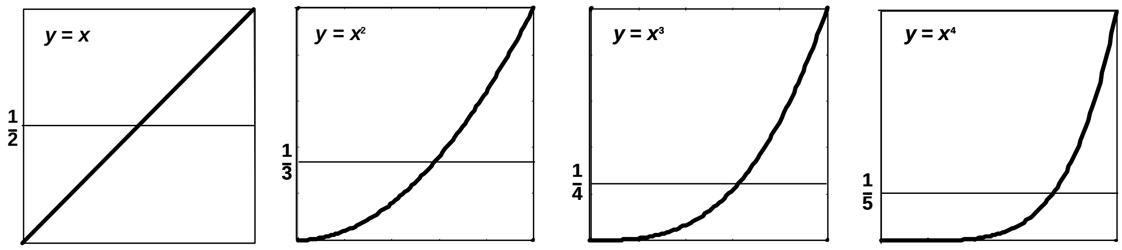
Entonces $a^4 = -4\sum_0^a x^3 + 2a^4$ *o bien* $\boxed{\sum_0^a x^3 = \tfrac{1}{4}a^4}$

Cavalieri usó este método para inferir la regla

$$\sum_0^a x^k = \frac{1}{k+1}a^{k+1} \quad \text{o en notación moderna} \quad \int_0^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}a^{k+1}$$

en los casos hasta n = 9.

Se puede ilustrar el descubrimiento de Cavalieri con una serie de figuras como las siguientes:



Por lo comodidad es dibujado el caso a = 1.

En cada cuadrado es dibujado una linea horizontal, que indica la altura media de la curva. Es decir: el área abajo de la curva es igual al área abajo de la linea horizontal.
Si el exponente de ***x*** crece, la linea horizontal baja y el ‘patrono armónico’ de las alturas medias, se continua.
Cavalieri publicó estas cosas en 1635. Durante los años siguientes matemáticos franceses, es decir Fermat, Pascal y Roberval lograron a demostrar la regla para el área abajo la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^n$ de manera exacta.
Cada de los tres uso su propio método. Una demostración bastante sencilla es basado en la desigualdad:

$$\mathbf{1}^{k} + \mathbf{2}^{k} + \ldots + (n - \mathbf{1})^{k} < \frac{n^{k+1}}{k+1} < \mathbf{1}^{k} + \mathbf{2}^{k} + \ldots + n^{k}$$

Esta desigualdad sigue, por el principio telescopio, desde:

$$(k + 1) \cdot (n - 1)^{k} < n^{k+1} - (n - 1)^{k+1} < (k + 1) \cdot n^{k}$$

y esta regla es una consecuencia de: :

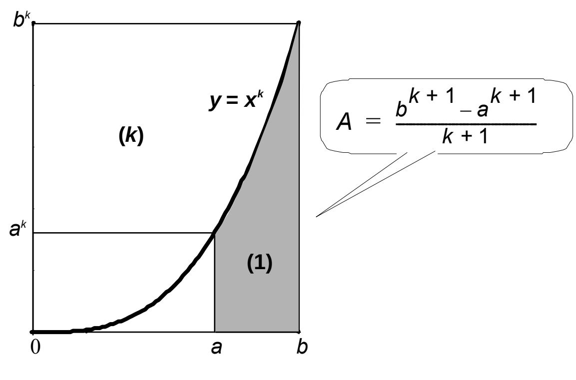
$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \underbrace{n^{k} + n^{k-1}(n-1) + \ldots + n(n-1)^{k-1} + (n-1)^{k}}_{\boldsymbol{k}\ \mathbf{+\ 1\ terminos}}$$

Dos extensiones de esta proposición.
I.
Consideramos el área A encerrado por la curva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^k$, la linea $y = 0$ y las líneas $x = a$ y $x = b$.
La curva divide tanto el rectángulo [0 , a] □ [0 , a^{k}] como el rectángulo [0 , b] □ [0 , b^{k}] en partes cuyas áreas son como **1** a k.

Por eso la región (de la forma L) que está a fuera el primero rectángulo y dentro el segundo, es dividido en partes con la misma razón, es decir 1 : k.
Esta región tiene el área $\boldsymbol{b}^{k+1} - \boldsymbol{a}^{k+1}$

Combinando las dos conclusiones, sabemos que el área A es igual a

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$



Observación:
la fórmula vale también si a o b son negativos; se puede demostrarla por propiedades de simetría, con distinción de los casos k es *par* y k es *impar*.
Aquí gana el cálculo integral, por que con el cálculo de

$$\int_{a}^{b} x^{k}\,\mathrm{d}x = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

no necesita una distinción de los casos.

II.
Consideramos la otra parte de la 'L'. Tiene el área:

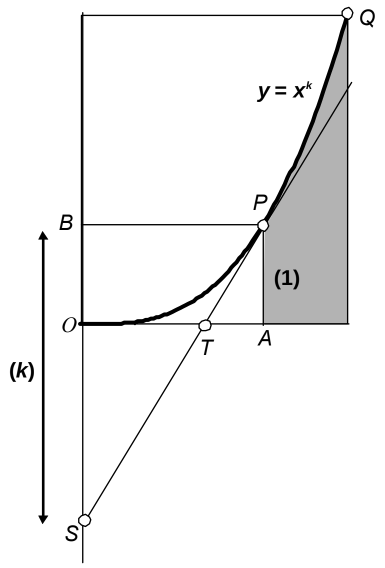
$$\frac{k}{k+1}\cdot\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

Supón que $a^k = A$ y $b^k = B$
Pues tenemos:

$$\int_A^B y^{\frac{1}{k}}dy = \frac{k}{k+1}\cdot\left(B^{\frac{k+1}{k}} - A^{\frac{k+1}{k}}\right) = \frac{B^{\frac{1}{k}+1} - A^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1}$$

y nos da una extensión de la fórmula para exponentes de la forma $\frac{1}{k}$

Torricelli ya conoció una regla geometríca para determinar la tangente de las curvas $y^m = x^k$ *(m, k números enteros). Me restrinjo al caso m = 1, k > 1.*



Sea P un punto de la curva $y = x^k$, que no coincide con O.

Entonces:

***TP* es una tangente de la curva $y = x^k$.**

si y solamente si

$$\frac{AT}{AO} = \frac{AP}{BS} = \frac{1}{k}$$

Una demostración del estilo pre-cálculo puede ser la siguiente.
Nos restringimos al parte de la curva que corresponde con $x > 0$.
Supón que P tiene las coordenadas $(a\ ,\ a^k)$
Si $TA = \frac{1}{k}a$, o bien $BS = ka^k$, la pendiente de la recta TA es igual a

$$\frac{ka^k}{a} = ka^{k-1}$$

Supón que el punto *Q* de la curva, distinto de *P*, tiene las coordenadas (b , b^k)
La pendiente del segmento *PQ* es igual a:

$$\frac{b^k - a^k}{b - a} = \underbrace{b^{k-1} + b^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}}_{k \text{ terminos}}$$

Si $b > a$ como en la figura, vale:

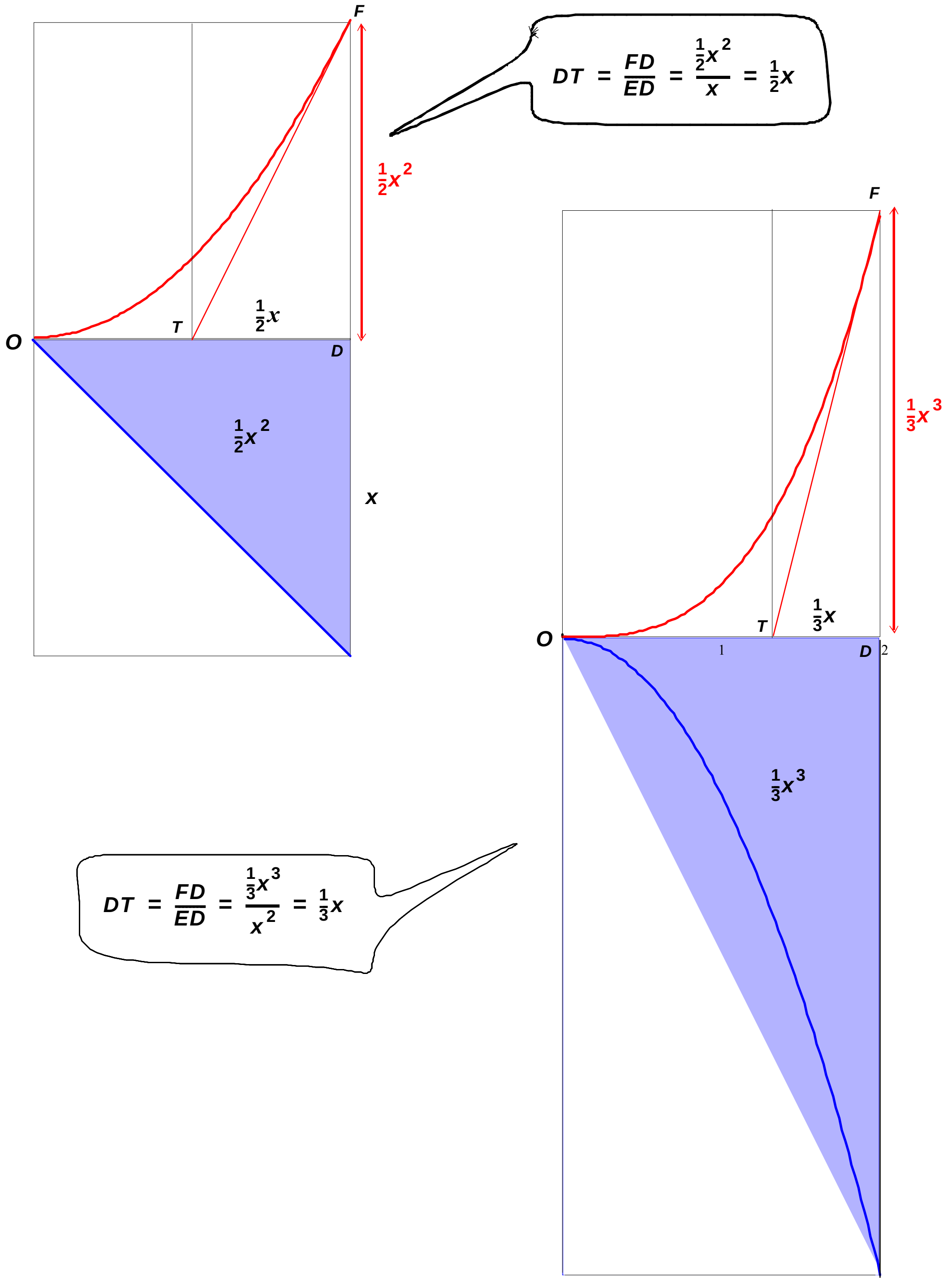
$$\frac{b^k - a^k}{b - a} > \underbrace{a^{k-1} + a^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}}_{k \text{ terminos}} = ka^{k-1}$$

Entonces la recta *PQ* es más empinada que la recta *TP* y por eso *Q* está arriba de la última recta.
Análogamente podemos razonar que, en el caso $b < a$, la recta *PQ* es menos empinada que la recta *TP*.
Entonces todos los puntos de la curva con coordenadas positivas y con excepción de *P*, están arriba de la recta *TP* y por eso esta recta es la tangente de la curva en *P*.
Observación:
He usado el concepto 'pendiente' que de hecho es un anacronismo. Pero se puede reemplazarla sin dificultades con el ángulo que hace una recta con el eje horizontal.

La conclusión es que Torricelli, y también otros, supieron la *derivada* de $y = x^k$.
Me pregunto si los estudiantes de este epoca saben la interpretación geometríca, que fue el núcleo de la proposición mencionada. Se puede decir que esta significación geometríca da la fórmula de la derivada de $y = x^k$ 'una cara' y de tal modo puede ser más que un truco algebraico para los estudiantes. Tanto aquí, como en el caso del cálculo integral, quiero recomendar fuertemente a usar las lecciones de la historia en la enseñanza.

En el comienzo de esta conferencia hemos visto la idea de Barrow para conectar 'área' y 'tangente'.

Es instructivo aplicar su construcción por ejemplo para las curvas
$y = \frac{1}{2}x^2$
. y
$y = \frac{1}{3}x^3$



Así se cierre el círculo de mi conferencia. Solamente he mostrado unos frutos históricos, que se podría integrar en la enseñanza de álgebra y análisis.

Pero no quiero producir la impresión que debemos seguir la historia paso por paso.

Tampoco quiero propagar una ley, análoga a la ley biogenética de Haeckel, que dice que el génesis de conocimiento matemático del individuo debe seguir el mismo camino, pero abreviado, del génesis de conocimiento de la humanidad. Creo que este punto de vista es demasiado dogmático.

De otro lado tengo la experiencia que una introducción histórica de los conceptos guiadores de las matemáticas, no solo es muy inspirando, pero también promueve mucho la comprensión.

Me doy cuenta que, para poder aplicar la historia de las matemáticas de manera didáctica, el profesor debe tener cierta experticia histórica. Una ventaja de este epoca es que se puede hallar mucha información sobre la historia de las matemáticas en Internet. No pocas veces esta información es superficial, pero por las muchas referencias a la literatura se pueden profundizarse si lo quieren. Además yo se que hay muchas excelentes publicaciones en castellano respecto de la historia de matemáticas.

Entonces quiero estimular cada uno que se encuentra mezclado en la educación matemática, para buscar posibilidades de usar ejemplos históricos en el aula.