Matemáticas y Música

Sobre la contribución de las Matemáticas a la Teoría del Sonido

J. C. González-Dávila

1 Introducción

En tiempos de la antigua Grecia, la Música no sólo se consideró como una expresión artística de las Matemáticas sino que su estudio y análisis estuvo siempre ligado a la Teoría de los Números y a la Astrología. De hecho, para los griegos la teoría matemática de la música formaba parte de una teoría general conocida como la *Armonía del Cosmo*. Pitágoras y sus discípulos, Platón, Aristógenes, Aristóteles y Claudio Ptolomeo fueron algunos de los filósofos y astrólogos más relevantes que profundizaron en los intervalos musicales como fuente de nociones matemáticas y de importantes extrapolaciones científicas y cosmológicas. No debemos olvidar además que la Música en la Edad Media era una de las materias de la rama de las Ciencias del Quadrivium, que comprendía Aritmética, Geometría, Astronomía y Música. Muchos de los avances y descubrimientos relacionados con la Música en su dimensión más amplia, esto es como *el arte de bien combinar el sonido con el ritmo*, han sido abordados por matemáticos y desde las Matemáticas.

En este trabajo trataremos un aspecto de la teoría y practica musical donde las matemáticas han jugado un papel fundamental: "La teoría del Sonido". Analizaremos las contribuciones que sobre el sonido han realizado muchos grandes matemáticos a lo largo de la historia y en especial en los siglos XVII, XVIII y XIX. Centraremos nuestra atención fundamentalmente en el problema de las *cuerdas vibrantes* y en la discusión que tal problema suscitó entre los matemáticos de época. Desde Brook Taylor a principios del XVIII hasta la resolución final del problema por parte de Joseph Fourier ya bien avanzado el siglo XIX, se produjo un interesante debate en el que participaron entre otros, Johann Bernoulli y especialmente su hijo, Daniel, Leonhard Euler, Jean-le-Rond D'Alembert, J. L. Lagrange y L. Dirichlet. Este debate, dirigido a explicar cómo una cuerda en vibración es el resultado de una suma infinita de movimientos vibratorios de diferentes frecuencias, se convertiría en una abigarrada maraña de preguntas profundas y extremadamente difíciles relativas a la posibilidad de pasar al límite y el intercambio de límites. También se cuestionó la convergencia de la serie de Taylor de una función infinitamente derivable; la diferencia entre una función y su representación analítica; la prolongabilidad analítica de una función; discontinuidades y, en particular, se analizarón las series trigonométricas. Son éstas las que ocuparon un puesto tan importante a lo largo y después del debate que, posteriormente, han llegado a denominarse como "el eje de rotación de todo el Análisis Matemático".

Pero no todos los instrumentos musicales de la orquesta cumple la *Ley de Fourier* o de las cuerdas vibrantes. Este hecho, está relacionado con la existencia de *armónicos* o *sobretonos* que acompañan al sonido fundamental y que configuran el *timbre* o calidad del sonido. Buscaremos aquí explicaciones desde las Matemáticas para entender cómo el oído humano es capaz de distinguir sonidos de igual frecuencia producidos por distintos instrumentos musicales.

2 Preliminares: El sonido

El sonido se produce como resultado de las vibraciones de los cuerpos elásticos sometidos al efecto del choque o roce con un agente externo. Esta vibración transmitida en forma de *movimiento ondulatorio* impresiona el sentido del oído, experimentándose la sensación sonora. Por tanto, el sonido se puede definir como *la sensación experimentada cuando llegan al oído ondas producidas por determinados movimientos vibratorios.* Entre dos sonidos distintos, el sentido del oído tiene la posibilidad de distinguir características particulares y diferenciadoras entre ambos que sirven para identificarlos. Estas características particulares se denominan *cualidades del sonido.* Las cualidades que se distinguen en toda sensación sonora, son tres:

Intensidad o sonoridad: Es la mayor o menor amplitud de las ondas y depende de la fuerza con que son producidas. Las variaciones de intensidad han dado lugar en la música a las diferencias de matices, creando con ello una enorme riqueza emotiva. La Intensidad se mide en *decibelios* (dB).

Tono: Es la mayor o menor altura de los sonidos comparados entre sí. El tono de los sonidos depende del número de vibraciones por segundo producidas, lo que se entiende como frecuencia de la vibración. Cuanta mayor sea el número de vibraciones por segundo, más agudo será el sonido y viceversa. La frecuencia se mide en Hercios (Hz).

Timbre: Es la forma vibratoria de la onda sonora y se manifiesta como la *calidad* del sonido. Merced al tiembre, es posible distinguir el instrumento o agente productor del sonido, aunque se produzcan varios sonidos a la vez con el mismo tono a altura.

3 La vibración fundamental de B. Taylor

El matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) fue el primero en dar una solución formal, aunque errónea, del problema de las cuerdas vibrantes. Él determinó la ecuación de una supuesta curva para la forma de la cuerda de tal manera que cada punto alcanzaría la posición de reposo en el mismo tiempo. A esta vibración, que la llamó la *vibración fundamental*, también sería estudiada posteriormente por Johann Bernoulli quién en 1727 estableció el importante principio de que la fuerza actuando sobre una partícula material en una vibración fundamental es siempre proporcional a la distancia de esa partícula a su posición de equilibrio. Pero la realidad es que la manera de vibrar de una cuerda es mucho más complicada que el tratamiento de Taylor, como tendremos acasión de analizar en lo que sigue. Sin embargo, sirvió en aquel momento para abrir el camino a técnicas matemáticas más elaboradas como las de Daniel Bernoulli (1700-1782), las de Leonhard Euler (1707-1783) y, en especial, las de Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783) que consideró la introducción de derivadas parciales y la representación de la ecuación del movimiento en la moderna forma de trabajar en matemáticas.

De la investigación de Taylor, los matemáticos de la época se aferraron a la visión errónea, compartida en un principio por el propio Daniel Bernoulli, de que toda vibración compuesta tiende muy rápidamente a *status uniformis*, esto es, a una única vibración: la fundamental de Taylor. El modelo de Taylor sólo tiene validez si se coloca un peso fijado en el punto medio de la cuerda. Entonces este sistema se convierte en un oscilador armónico simple. En general, todo movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f puede representarse como

$$y(t) = A\sin(2\pi f t + \phi_o), \tag{3.1}$$

donde a ϕ_o se le conoce como *fase.* Aquí $A\sin\phi_o$ es la elongación inicial o para $t = 0$. El movimiento armónico simple que hemos considerado es un caso ideal que se mantendría con las mismas características, incluida su amplitud, por tiempo indefinido. En la práctica real estos movimientos son *amortiguados*, *movimientos armónicos amortiguados* o también llamados *forzados*, producto del roce y la resistencia del medio en el cual se realiza el movimiento.

4 Vibración de las cuerdas sonoras

Años antes de la publicación de Taylor sobre la vibración de las cuerdas, alrededor de 1700, algunos teóricos de la música especialmente Wallis (1616-1703) en Inglaterra y Joseph Sauveur (1653-1716) en Francia, observaron experimentalmente que una cuerda tensada puede vibrar en partes con ciertos puntos, los cuales Sauveur los denominó *nodos*, en los que no había movimiento alguno, a pesar que entre ellos se produjera movimientos dando origen a los *vientres.* También fue muy pronto reconocido que tales vibraciones correspondían a frecuencias más altas que la asociada con la simple vibración de la cuerda total sin nodos, y más aún que las frecuencias eran múltiplos enteros de la frecuencia de la vibración simple. Los correspondientes sonidos emitidos fueron denominados por Sauveur los *tonos armónicos*, mientras el sonido asociado con la vibración simple se denominó *fundamental.* La notación así introducida ha sobrevivido hasta hoy. Sauveur observó también el hecho importante de que una cuerda vibrante podía producir los sonidos correspondientes a sus armónicos al mismo tiempo.

Este hecho físico ya es comentado en los trabajos de Daniel Bernoulli de 1732 y 1739, quién realizó experimentos con una cuerda vibrante y observó que ésta no rechazaba trozos de papel colocados en sus nodos. En aquella época sobre 1734, L. Euler todavía mencionaba únicamente vibraciones fundamentales. Años más tarde en 1755, Daniel Bernoulli en una célebres memorias publicadas por la Academia de Berlín, *Réflections et éclairissements sur les nouvelles vibrations des cordes, Exposées dans les Mémoires de l'Academie de 1747 et 1748, Royal Academy, Berlin, 1755, 147ff.*, propone que el movimiento más general de una cuerda vibrante se obtiene mediante la superposición de vibraciones producidas por movimientos armónicos simples. D. Bernoulli concluye entonces con la siguiente ecuación:

$$y = \alpha \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + \dots,$$

donde $y = y(x,t)$ representa la posición de la cuerda en el instante t, siendo x la posición de reposo de una de sus partículas. Así D. Bernoulli conjetura que es posible que una cuerda vibre de manera que estén presentes una multitud de oscilaciones armónicas simples al mismo tiempo y que cada una de ellas contribuya independientemente a la vibración resultante. Este hecho le llevó a descubrir el famoso principio de la *coexistencia de pequeñas oscilaciones*, o el *Principio de Superposición*. Principio de suma importancia en el desarrollo de la teoría de oscilaciones. Pero mientras D. Bernoulli comprendió la importancia y el significado de su *Principio de Superposición* de vibraciones, fue incapaz de justificarlo matemáticamente, lo que provocó durísimas críticas tanto de Euler como de D'Alembert, quienes vieron inmediatamente que tal principio produciría la posilidad de expresar cualquier función, en particular la forma inicial de una cuerda vibrante, en términos de una serie infinita de senos y cosenos.

5 El método de D'Alembert. Reflexión de ondas

D'Alembert fue quién consiguió una solución casi exahustiva de este problema en su famoso artículo de 1747 *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, Hist. Acad. Sci. Berlin 3 (1747), 214-219.* Él establece directamente que el objetivo de su artículo es probar que la forma de la cuerda vibrante posee infinitas soluciones además de la fundamental. Para ello considera que el desplazamiento y de la cuerda es una función de dos variables: el tiempo t y la posición x a lo largo de la cuerda. Por tanto las ecuaciones más apropiadas deben ser escrita en términos de las derivadas parciales. La ecuación describiendo la vibración de una cuerda se denomina la *ecuación de ondas* uni-dimensional y viene dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

donde c denota la velocidad de propagación de una perturbación transversal en la cuerda. Esta es una constante que depende únicamente de la tensión τ a la que está sometida y de la masa por unidad de longitud ρ. La ecuación de ondas anterior es una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y homogénea que estará sujeta a las condiciones de contorno:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \ (t \geq 0),$$

siendo L la longitud de la cuerda. Además suponemos que inicialmente la cuerda sigue la curva $y = f(x)$ y que posee una velocidad incial determinada por una función $v = v(x)$. Entonces, se tiene

$$y(x,0) = f(x), \qquad (0 \leq x \leq L)$$

$$v(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0).$$

Aunque es razonable suponer que f deba de ser continua ya que representa una cuerda, conviene suponer que f sea diferenciable de clase C^2 para verificar la unicidad de las soluciones a este problema. D'Alembert descubrió un simple método para encontrar la solución general de la ecuación de ondas uni-dimensionales y probó en ese artículo de 1747, salvo con algunas modificaciones, el siguiente resultado:

Teorema 5.1 *(D'Alembert). La solución general de la ecuación de ondas*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

viene dada por

$$y = y(x,t) = \phi(x+ct) + \varphi(x-ct)$$

para adecuadas funciones ϕ y φ. La solución satisfaciendo las condiciones de contorno $y = 0$ para $x = 0$ y para $x = L$, para todos los valores de t, es de la forma

$$y(x,t) = \phi(x+ct) - \phi(-x+ct),$$

donde ϕ es períodica de período $2L$.

Si $y = f(x)$ representa la posición inicial de la cuerda y $v(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(-x) &= f(x); \\ \phi(x) + \phi(-x) &= \tfrac{1}{c}\int v(x)dx. \end{aligned}$$

En particular, si no posee velocidad inicial, ϕ es una función períodica impar extensión de $\frac{1}{2}f$.

De aquí se concluye con el importante *principio de reflexión* de que toda onda se refleja en el extremo fijo de una cuerda con un cambio de signo. Siempre se puede comprender esa reflexión imaginando que lo que viene del extremo de la cuerda sale invertido desde atrás.

Al año siguiente, Euler siguiendo a D'Alembert aborda el mismo problema lo que origina un histórico debate al que fueron uniéndose D. Bernoulli y posteriormente un joven matemático, J. L. Lagrange (1736-1813) que en una amplia memoria de la Academia de Turín en 1759 intenta explicar el problema de las cuerdas vibrantes.

6 El método de Fourier. Las Leyes de Mersenne

En 1822 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), en su "Teoría Analítica del Calor", introdujo la idea de que las funciones períodicas pueden analizarse usando series trigonométricas. Este hecho fue crucial para la resolución definitiva del problema de las cuerdas vibrantes. Se entiende por *serie trigonomética de Fourier* correspondiente a una función ϕ a la dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})), \tag{6.2}$$

donde a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, y b_n, $n \in \mathbb{N}$, son coeficientes constantes y $L > 0$. Salvando los problemas de convergencia, la serie siempre definirá una función ϕ que es períodica con periodo $2L$, ya que cada uno de los sumandos son períodicos de período $2L$. Dada una función definida por una serie trigonométrica como la anterior, los coeficientes fueron determinados por J. Fourier como sigue:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi \cos(\frac{n\pi x}{L})dx, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi \sin(\frac{n\pi x}{L})dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Desafortunadamente, no es cierto en general que dado una función períodica cualquiera podamos formar los coeficientes a_n y b_n de acuerdo con las fórmulas anteriores y obtener de nuevo mediante la correspondiente serie trigonométrica la función f. Un argumento definitivo a favor de J. Fourier fue una sucesión de artículos de Leujene Dirichlet (1805-1859) en los cuales demuestra que si la función es diferenciable a trozos de clase C^1 (se entiende que es de clase C^1 salvo a lo sumo en un número finito de puntos donde puede ocurrir que ϕ como ϕ' tengan discontinuidades de salto finito), entonces podemos recuperarla como serie trigonométrica.

Teorema 6.1 *La solución del problema de cuerdas vibrantes viene dada por*

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\Big(K_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + M_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\Big), \tag{6.3}$$

donde

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ M_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \end{aligned}$$

De este resultado podemos obtener el siguiente teorema que demuestra la existencia de vibraciones armónicas que acompañan a la vibración fundamental.

Teorema 6.2 *La frecuencia f y el período T de un movimiento vibratorio sobre una cuerda no depende de su posición inicial, ni de la velocidad inicial y vienen dados por*

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{d\pi r^2}} \tag{6.4}$$

donde L es la longitud de la cuerda, d es su densidad y r su radio. Además, se expresa como suma de movimientos vibratorios cuyos períodos son $T, T/2, T/3, T/4$, etc. y frecuencias $f, 2f, 3f, 4f$, etc.

Cada sumando $y_n(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$, en (**??**) puede también expresarse por

$$y_{nx}(t) = N_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\Big(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n\Big), \tag{6.5}$$

donde $K_n = N_n \sin\phi_n$, $M_n = N_n \cos\phi_n$ lo que representa un movimiento vibratorio de frecuencia $f_n = nf$. Por tanto son funciones períodicas de período $\frac{2L}{nc} = \frac{T}{n}$.

Definición 6.3 A los sonidos producidos por los movimientos vibratorios y_n, $n \in \mathbb{N}$, de una cuerda sonora se les denominan *armónicos.* El correspondiente para $n = 1$, esto es el más grave de todos, se denomina *fundamental.*

Los movimientos $y_n(x,t)$ en un movimiento vibratorio cualquiera $y(x,t)$ de una cuerda sonora determinan lo que se conocen como *ondas estacionarias.* En este caso, la cuerda aparece dividida en un cierto número de segmentos separados por unos puntos fijos, llamados *nodos*, como ya J. Sauveur de forma experimental había adelantado. En cada segmento, lo que se denomina *vientre*, la amplitud es variable, aunque se mantine fija en posición, es decir, no se desplaza. Los nodos del armónico que origina $y_n(x,t)$ se obtienen en aquellos $x \in]0, L[$ tal que $y_{nx}(t) = 0$, para todo t, o equivalentemente, usando (**??**), en aquellos x satisfaciendo

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = 0.$$

Por tanto, existen exactamente $n-1$ nodos para el enésimo armónico y éstos se consiguen en

$$x = \frac{kL}{n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Marin Mersenne (La Soulletière 1588-París 1648) teólogo franciscano y científico francés, publicó en 1636 su obra *Harmonie Universelle (La théorie et la practique de la musique)*, en la que exponía cuáles eran las leyes que regían la frecuencia de los sonidos producidos por una cuerda en vibración. El enunciado de las mismas lo recogemos a continuación como una consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 6.4 Leyes de Mersenne: *La frecuencia del sonido producido por una cuerda cumple los siguientes enunciados:*

(i) *Es inversamente proporcional a la longitud de la misma.*

(ii) *Es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión a la que está sometida.*

(iii) *Es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad de la misma.*

(iv) *Es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la sección de la misma, o lo que es lo mismo de su diámetro.*

7 Timbre

El timbre depende del grado de complejidad del movimiento vibratorio que origina dicho sonido. Esta cualidad, a diferencia de la altura y la intensidad, no es mensurable, ni existe por tanto una unidad que permita comparar timbres de distintos sonidos.

Definición 7.1 Un instrumento musical se dice que verifica la *Ley de Fourier* si el movimiento vibratorio que da como resultado un sonido de frecuencia f se puede expresar como composición de movimientos armónicos simples de frecuencias f, $2f$, $3f$, etc.

Gran parte de los instrumentos de una orquesta completa, llamada generalmente *orquesta sinfónica*, emiten sonidos que cumplen esta definición. Este es el caso de los instrumentos de cuerda o de los de viento. Sin embargo, existen otros instrumentos de la orquesta, como son los de percusión, los placófonos y los membranófonos que no la verifican.

Si el instrumento musical cumple el la Ley de Fourier, entonces el sonido que produce se puede descomponer en los sonidos puros que provienen de los denominados *armónicos simples componentes*. En general, todo sonido es composición de otros no necesariamente armónicos simples. El más grave de todos esos sonidos es el *fundamental* y los demás se llaman *parciales*, que pueden ser *armónicos*, si son semejantes a la serie armónica derivada de la misma fundamental, también llamados *concordantes* o *alicuotas*, o bien, si los *parciales* no son semejantes a la serie armónica, éstos serán *discordantes* y no se les llama *armónicos*, recibiendo el nombre de *sobretonos*.

El número de *armónicos* que forman el timbre de cada sonido depende del cuerpo sonoro que lo produce y de la manera de excitar a éste. Así por ejemplo entre dos notas iguales producidas por instrumentos distintos como el piano y el violín, presentan una característica distintiva que es el *timbre*. En efecto, los armónicos que se pueden escuchar de cada uno de estos sonidos serán distintos en cuanto a intensidad y a la distribución de energía entre ellos. Los dos sonidos tienen los mismos armónicos en frecuencias, pero la distribución de las intensidades es distinta.

8 Vibración en los tubos sonoros

Se denomina *tubos sonoros* a aquellos que contienen una columna de gas capaz, al ser excitada, de producir un sonido. A este tipo pertenecen todos los instrumentos llamados de viento o más propiamente *aerófonos*.

Desde el punto de vista acústico, los tubos sonoros se clasifican en dos grandes grupos: *tubos abiertos* y *tubos cerrados*. Se denominan *tubos abiertos* a aquellos que disponen de dos o más orificios, en general con los dos extremos abiertos, y *cerrados* a aquellos que disponen de un solo orificio, esto es, tienen tapado el extremo contrario al que se introduce el aire. La generalidad de los instrumentos aerófonos convencionales están formados por tubos abiertos, quedando los cerrados para casos muy concretos como son ciertos tubos de Órgano, la flauta de Pan o flauta travesera y algún otro. En la memoria de Lagrange de 1759 ya referida hay también un tratamiento de los sonidos producidos por órganos de tubos e instrumentos musicales de viento en general. Los hehos experimentales básicos ya eran conocidos y Lagrange fue capaz de predecir teóricamente las frecuencias armónicas de los tubos abiertos y cerrados.

El movimiento ondulatorio que se produce en un tubo es longitudinal, es decir el movimiento de las partículas gaseosas tienen la misma dirección que el desplazamiento de la onda, tratándose por lo tanto de *ondas longitudinales*. Dichas ondas que se propagan a lo largo del tubo, se reflejan en los extremos del mismo. El desplazamiento a lo largo de un tubo sonoro desde una posición x del aire en reposo en el tiempo t por la acción de una vibración en uno de sus extremos lo denotamos, como para el caso de cuerdas sonoras, por $y(x,t)$. Entonces se verifica de nuevo la ecuación de ondas unidimensional donde la constante c denota la velocidad de propagación de la onda dentro del tubo. Las condiciones de frontera o contorno que debemos considerar en esta ecuación dependerá de si el extremo final del tubo es abierto o cerrado.

Tubos abiertos

En los instrumentos musicales de tubos abiertos, éste ha de ser estrecho en comparación con la longitud de onda de la onda que se propaga por el mismo. Aquí, las condiciones de frontera de la ecuación de ondas para la presión acústica son las mismas que para una cuerda de longitud la longitud del tubo L y fijada a los extremos. Entonces obtenemos directamente:

Teorema 8.1 *Los tubos abiertos de instrumentos musicales verifican la Ley de Fourier. El sonido fundamental posee frecuencia*

$$f = \frac{c}{2L},$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda sonora a lo largo del tubo y L es su longitud. Además, se pueden producir (teóricamente) todos los armónicos.

Tubos cerrados

Para un tubo cerrado el desplazamiento $y(x,t)$ es forzado a ser cero en el extremo cerrado, esto es $y(L,t) = 0$, para todo t. Se tiene por tanto un nodo en el extremo cerrado y un vientre en el extremo abierto.

Teorema 8.2 *Los tubos cerrados de instrumentos musicales verifican la Ley de Fourier. El sonido fundamental posee frecuencia*

$$f = \frac{c}{4L},$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda sonora a lo largo del tubo y L es su longitud. Sólo se producen (teóricamente) armónicos impares.

Existen instrumentos, como es el caso del clarinete, que si bien es un instrumento con extremo abierto, se comporta como un tubo cerrado.

9 Vibraciones de varillas, placas y membranas

La extensión de los métodos descritos en los anteriores párrafos a las vibraciones de cuerpos sólidos alargados como varillas y platos naturalmente demandaron un conocimiento de la relación entre la deformación de un sólido y la fuerza de deformación. Afortunadamente este problema había sido ya resuelto por Hooke, quién en 1660 lo descubrió y en 1676 anunció la ley sobre la tensión de los cuerpos a través de la deformación *elástica*. Esta ley forma de hecho la base para la teoría completa matemática de la elasticidad incluyendo las vibraciones que producen el sonido. Su aplicación a las vibraciones de las varillas se debe en gran medida a Euler en 1744 y a Daniel Bernoulli en 1751, aunque debemos tener en cuenta que las fechas de publicación de las correspondientes memorias no siempre reflejan fielmente el tiempo del descubrimiento.

De manera paralela e incluso en el tiempo, los problemas análogos de las vibraciones de membranas flexibles, importantes para entender los sonidos emitidos por un tambor, fueron primeramente resueltos por S. D. Poisson (1781-1840), aunque no completó el caso de las membranas circulares. Esto fue hecho por Clebsch (1833-1872) en 1862.

10 La Propagación del sonido

Aunque desde muy antiguo la propagación del sonido en el aire fue comparada con el movimiento de las ondas sobre la superficie del agua, el primer intento serio por teorizar la teoría de ondas del sonido fue realizada por Isaac Newton (1642-1727), quién en el segundo libro de su Principia (1687) (Propositions 47, 48 y 49) compara la propagación del sonido con los latidos o pulsos producidos cuando un cuerpo vibrando mueve la zona cercana del aire que lo rodea y éstas a su vez mueve la inmediatamente próxima y así con las siguientes. Sin embargo, Newton propuso algunas hipótesis demasiado específicas y arbitrarias, entre ellas, la hipótesis de que cuando una vibración cualquiera es propagada a través de un fluido las partículas de éste siempre se desplazan siguiendo un movimiento armónico simple.

Cuando un movimiento vibratorio se propaga en un medio elástico, se origina en éste un *movimiento ondulatorio*. Se denomina *onda* a la vibración periódica del medio, sea cual fuere la causa de esa vibración. Se llama *onda longitudinal o movimiento ondulatorio longitudinal*, cuando la dirección de propagación es la misma que la de la vibración de las partículas. Por el contrario se llama *onda transversal o movimiento ondulatorio transversal*, cuando la dirección de propagación es perpendicular a la de la vibración de las partículas. Los movimientos ondulatorios aparecen tanto en el cuerpo productor (el instrumento musical) como en un medio transmisor (generalmente en el aire). En el aire el movimiento ondulatorio de las ondas sonoras producidas por las vibraciones de instrumento musical forman *ondas esféricas concéntricas*, cuyo centro es el elemento productor, esto es esferas con radio creciente. El registro por el oído de estas alternancias de sobrepresión y expansiones es lo que posibilita la audición del sonido. Estas sobrepresiones y depresiones, hacen que dicha presión se eleve por encima del valor de la presión atmosférica (1 atm.) para hacerse después inferior a ella, siguiendo la misma ley que el movimiento vibratorio que originó dicho sonido y por lo tanto con la misma frecuencia.

Como ya se ha comentado, el primer tratamiento del movimiento de las ondas por una ecuación diferencial en derivadas parciales se debe a D'Alembert en 1750, en conexión con la vibración de las cuerdas. En el resto del siglo XVIII aparecieron numerosos trabajos para teorizar sobre las ondas en medios continuos y al final de este siglo, se establece el tratamiento general de la solución de ecuación de ondas para sonidos en tubos, al ser sometida a las condiciones de frontera específicas según las características de los extremos del tubo sonoro. Los experimentos realizados en ese período sobre las frecuencias de los armónicos dieron como resultado que éstos se acercaban con razonable precisión a los obtenídos en las soluciones de la ecuación de onda. En 1817 Poisson en una memoria de más de cien páginas explica una teoría aún más elaborada de la propagación del sonido en tubos, incluyendo la teoría de ondas estacionarias para tubos de longitud finita, tanto cerrados como abiertos.

Tres años más tarde, en unas memorias publicadas en 1820 Poisson ataca el problema más difícil de la propagación de ondas, cuándo se consideran tres dimensiones y algunos años más tarde, en 1829 analiza cómo las ondas elásticas que se producen en cuerpos sólidos extendidos, como varillas para el caso de ondas sonoras, pueden ser mixtas, esto es longitudinales y transversas al mismo tiempo. Este hecho ha tenido grandes consecuencias no ya sólo en acústica sino también obviamente sobre el estudio de ondas sísmicas en la geofísica moderna. En 1838 es el genio autididacta de Nottingham, George Green (1793-1841) es quién estudia la reflexión y refracción de una onda de sonido plana. Sus estudios, entre otras aplicaciones, sirvió para clarificar las similitudes y diferencias entre la reflexión y refracción del sonido y de la luz.

La función u que determina el desplazamiento de las partículas por un movimiento ondulatorio se expresa en términos de la posición $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y el tiempo $t > 0$. Entonces $u(x, y, z; t)$ representa el desplazamiento al tiempo t de la posición (x, y, z) perturbada por la onda sonora. La ecuación del desplazamiento de una onda, la *ecuación de onda*, es la ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

donde c es la velocidad (constante) de propagación del medio y Δu es el Laplaciano de u, esto es,

$$\Delta u = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big).$$

Referencias

[CM] A. Calvo-Manzano, *Acústica físico-musical*, Real Musical, Madrid, 1991.

[FFW] J. Fauvel, R. Flood, R. Wilson, *Music and mathematics. ¿From Pythagoras to Fractals*, Oxford Univ. Press, 2003.

[F] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Física. Feynman, Vol I, Mecánica, radiación y calor*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

[P] H. J. Pain, *The physics of vibrations and waves*, Fourth edition, J. Wiley and sons, 1993.

[Pt] C. Ptolomeo, *Armónicas*, Traducción y Notas de Demetrio Santos Santos, Ediciones Miguel Gómez, Málaga 1999.

[R] J. Ray Hanna, *Fourier series and integrals of boundary value problems*, Pure and Applied Math., Wiley-Interscience Public., 1982.