MÉTODOS MATEMÁTICOS DE CONSTRUCCIÓN DE MODELOS EN ASTROFÍSICA

E. Casuso
Instituto de Astrofisica de Canarias, 38200, La Laguna, Tenerife, España

Resumen: Las estructuras lógicas que nos describen el cambio de un conjunto de magnitudes mensurables que caractericen los sistemas físicos a estudio son los modelos matemáticos**,** basados esencialmente en conjuntos de ecuaciones diferenciales**.** Presento aquí algunos métodos para plantear y construir los modelos matemáticos en base a: los datos observacionales, el conocimiento que se tiene de los sistemas similares en la Tierra, y las ligaduras o condiciones de contorno que deben cumplir. También presento diversas aproximaciones para resolver las ecuaciones. Estos algoritmos serán tanto analíticos (métodos perturbativos, aproximaciones polinómicas, etc.) como numéricos (programas de ordenador**)**. Como ejemplos plantearemos y resolveremos el problema de la inversión de la transformada de Abel aplicado a la predicción del comportamiento temporal de algunos sistemas físicos que, como el proceso de formación de estrellas en las nubes de gas de las galaxias, son caóticos desde el punto de vista diferencial; la dinámica de un disco galáctico en rotación inmerso en un campo magnético (linearización matricial); un sistema de ecuaciones diferenciales que representa el proceso de producción y consumo de elementos químicos tanto dentro de las estrellas como en el medio interestelar; y una ecuación diferencial estocástica que representa la evolución temporal de la distribución de nubes de gas en el medio interestelar, donde surgirá el eterno debate sobre la dualidad fractal/dependecia de escala.

1.-Introducción.-

"El libro de la Naturaleza
fue escrito por Dios
en lenguaje matemático"
(Galileo)

Toda actividad del ser humano está condicionada por los fenómenos naturales (el clima, las estaciones, los días y las noches, etc.), y éstos a su vez son el resultado de las interacciones del sistema físico en el que vivimos (la Tierra) con el resto del Universo, empezando por el Sol, la Luna y los planetas de nuestro sistema solar, y continuando con las nubes de gas interestelar e intergaláctico así como el resto de las galaxias. De esta forma, se nos hace esencial tratar de conocer cuales son los mecanismos que hacen que estos fenómenos tengan lugar en la forma en que lo hacen, con el fin último de poder predecirlos y utilizarlos para nuestra propia evolución como seres vivos. Así es como surge la necesidad de construir estructuras lógicas que nos describan el cambio de un conjunto de magnitudes mensurables (temperatura, densidad, etc.) que caractericen los sistemas físicos a estudio, y estas estructuras lógicas son los modelos matemáticos basados esencialmente en conjuntos de ecuaciones diferenciales, que no son otra cosa que dependencias funcionales, extraídas de la observación, así relaciones entre las primeras derivadas (velocidades de cambio), las segundas derivadas (aceleraciones o fuerzas o causas) y las magnitudes involucradas.

En Astrofisica tenemos la necesidad de simplificar los modelos mas que en ninguna otra ciencia debido a la dificultad añadida de la imposibilidad de manipular los objetos a estudio dada su naturaleza extraterrestre: no podemos manejar en el laboratorio estrellas, nubes de gas, galaxias, agujeros negros, etc. A esto le tenemos que añadir la limitación en la propia naturaleza de los datos observados: prácticamente la totalidad de éstos provienen de la información que transporta la luz emitida por los objetos en estudio, casi siempre tan lejanos que nos aporta datos de tiempos remotos.
Galileo (S. XVII) hablaba ya de la "Simplicidad de la Naturaleza". Lagrange (S XVIII) sostenía que en una ecuación diferencial que represente un proceso real, la contribución de la parte lineal de las funciones involucradas era la que expresaba los aspectos característicos de la dinámica del proceso mismo, mientras que las partes no lineales podían ser despreciadas en el estudio de la parte esencial de los fenómenos (hoy sabemos que hay ocasiones en las que la parte no-lineal supera en importancia a la lineal). Einstein dijo: "Tenemos derecho a creer que la Naturaleza es la realización de lo que podemos imaginar como lo mas simple desde el punto de vista matemático". Los errores (tanto de cálculo como observacionales) se amplifican mucho más con las dependencias no-lineales.
Un modelo matemático es un esquema conceptual que intenta representar un conjunto de fenómenos utilizando el lenguaje matemático. El mismo fenómeno puede ser representado por varios modelos. Pero cada modelo proyecta una serie de predicciones para otros fenómenos relacionados, y es así como a medida que se contrastan esas predicciones con las posteriores observaciones, que se van restringiendo el número de modelos que son coherentes con el mayor número de observaciones (ligaduras). Así, estamos condenados a modificar permanentemente (en tanto en cuanto aparecen nuevos datos observacionales con los que comparar) nuestros modelos matemáticos para mejorar nuestra "aproximación" a la simulación de los fenómenos reales.

2.- Planteamiento y construcción de modelos.-

"Los ideales son como las
estrellas: no los alcanzas,
pero iluminan nuestro camino"
(Demócrito)

Tenemos la necesidad de descubrir un conjunto de leyes matemáticas que relacionen de forma coherente una serie de magnitudes observables en la Naturaleza, pero sobre todo, tenemos la necesidad de tratar de conocer la evolución de estas magnitudes con el tiempo. Así, para Aristóteles la Naturaleza es esencialmente κινησις (kinesis=movimiento).

Para construir un modelo seguimos habitualmente los siguientes pasos:
1.-Recopilar información tanto en bibliografía como obteniendo datos personalmente, para saber cuáles son las condiciones físicas cualitativas (dónde esta situado, qué otros sistemas pueden influirlo interaccionando con él) y cuantitativas (qué valores toman los distintos parámetros que caracterizan el sistema) del sistema.
2.-Buscar dependencias funcionales o de otro tipo entre los valores de las magnitudes observadas y de éstas con el tiempo.
3.-Establecer un conjunto de ecuaciones básicas con el mínimo número de parámetros libres. Así como un conjunto de condiciones iniciales $F(x,t=0) = F_0$ y condiciones de contorno $F(x=x_i,t) = F_i$, $\partial^n F_{x,t=a,b} = C_n$.
4.-Resolverlas y cotejar las soluciones con los datos variando los parámetros. Si no es bueno el ajuste se replantean las ecuaciones introduciendo nuevos factores o incluso nuevas ecuaciones. Tener en cuenta la estabilidad de las soluciones así como la evolución de los errores según las ecuaciones diferenciales.
5.-Interpretar el significado físico que tienen las soluciones válidas y comparar con otros modelos previos y con el resto de la teoría para asegurar la coherencia del sistema formal.
Tipos de ecuaciones:
A)Ecs. Difs. simples (parciales o totales)

$$\partial^n f(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f,x,v,t,\lambda)$$
$$\text{ó} \qquad (1)$$
$$d^n f(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f,x,v,t,\lambda)$$

Ej. Ley de Newton $m\, d^2x(t)/dt^2 = F[x(t),v(t),t]$ donde F es la ley de proporcionalidad entre las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia en el caso de la gravitación, y λ representa a los parámetros del modelo (llamados de control o libres).

B)Ecs. Dif. Acopladas (ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, ecuaciones de la dinámica de fluidos en Meteorología, en Astrofísica,etc.)

$\partial^n f_1(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda)$, $1 \leq j \leq m$
..... (2)
$\partial^n f_m(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda)$

C)Mapas ó relaciones de recurrencia.
$f_{n+1} = F(f_p,\lambda)$, $1 \leq p \leq n$ (3)
Ej. El mapa logístico $X_{n+1} = X_n \lambda (1-X_n)$ donde X_n representa la cantidad de individuos existente en un tiempo dado de una cierta población biológica, y X_{n+1} es la cantidad en el paso siguiente de tiempo.

D)Ecs. Difs. Estocásticas
$\partial^n f(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f,x,v,t,\lambda) + A(t)$ (4)
donde A(t) representa un término fluctuante estocástico, habitualmente en el sentido de browniano, no determinista.

E)Ecs. Integrales proyectivas
$f(x,\lambda) = I[f(w,\lambda)]dw$ (5)
con I siendo una transformada integral (Abel, Laplace, Fourier, etc.); x, w son habitualmente espacio o tiempo.

En definitiva un modelo matemático aplicable a la Astrofísica es un sistema formal que restringe el conjunto infinito de posibles valores de un conjunto de parámetros libres así como de las variables y sus sucesivas derivadas, lo que se llama el espacio de las fases. Dentro de la zona restringida deben caer los valores de las observaciones para que el modelo sea considerado.

3.-Métodos de resolución.-

La vida es como una nuez.
No puede cascarse entre
Almohadones de plumas.
(Arthur Miller)

1.-Integración directa.
Siempre que sea posible invertir el operador diferencial.
Ej. Ley de Newton para la posición x(t) de una partícula puntual de masa M sometida a la actuación de una fuerza como la gravedad constante g:
$M\, d^2x(t)/t^2 = -M\, g$ (6)
La integral: $dx(t) = -g\, t + C_1$ (7)
Integrando otra vez: $x(t) = -1/2\, g\, t^2 + C_1\, t + C_2$ (8)
Con C_1 y C_2 constantes indefinidas hasta que restrinjamos nuestro problema a cumplir con unas condiciones iniciales: velocidad y posición en el tiempo t=0.

-Constantes del movimiento o integrales primeras: leyes de conservación.
A veces, las ecuaciones diferenciales no pueden ser integradas mediante funciones conocidas. Sin embargo, y aun cuando no puedan obtenerse soluciones completas, a veces se pueden encontrar integrales primeras de las ecuaciones, es decir relaciones entre las variables, sus derivadas primeras y el tiempo, y cuya derivada como conjunto es igual a cero, es decir son constantes del movimiento que, como la energía, el momento angular, etc., lo serán en función de cada problema concreto, y que nos permitirán integrar al menos parcialmente las ecuaciones diferenciales. El interés de estas integrales primeras radica en que nos dan una información de primer orden desde el punto de vista de su significado físico.

Ej. La ecuación del movimiento para una partícula de masa m en coordenadas polares r, θ y sometida a una fuerza central $f(r) = d/dr\, V(r)$:
$mr'' - mr\theta'^2 = d/dr\, V(r)$ (9)
con r'' indicando la derivada segunda respecto del tiempo. Puede ser reducida mediante el aprovechamiento de la simetría esférica del problema, que implica que la función $mr^2\theta'$ tiene derivada cero respecto del tiempo, es decir es una constante del movimiento o integral primera llamada módulo del momento angular l; con lo que la ecuación (11) se convierte en una ecuación diferencial con una sola variable en lugar de dos:
$mr'' - l^2/(mr^3) = d/dr\, V(r)$ (10)
ecuación que podrá ser resuelta empleando otra constante del movimiento del problema, la energía total

$E = ½ m(r'^2 + r^2\theta'^2) + V(r)$, junto con los valores iniciales (t=0) de las variables r_0, θ_0; obteniendo

$t = \int^r_{r0} dr / \{2/m[(E - V - l^2/(2mr^2)]\}^{1/2}$ (11)

$\theta = l \int^t_0 dt / [mr^2(t)] + \theta_0$ (12)

-Variables separables.

Cuando en una ecuación diferencial en derivadas parciales aparecen derivadas respecto de distintas variables, es muy útil intentar separar la ecuación en varias ecuaciones diferenciales ordinarias suponiendo que la función a buscar es expresable como un producto de varias funciones cada una de las cuales depende únicamente de una variable. Si es posible o no en un problema dado, la solución nos lo dirá.

Ej. Ec. de Schrödinger para la función de onda de una partícula en Mecánica Cuántica

$-\hbar^2/(2m)\, \partial^2/\partial x^2\, \Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\, \partial/\partial t\, \Psi(x,t)$ (13)

suponiendo $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$, tenemos al sustituir

$1/\psi(x)\, [-\hbar^2/(2m)\, d^2/dx^2\, \psi(x) + V(x)\psi(x)] = i\hbar\, 1/\varphi(t)\, d/dt\, \varphi(t)$ (14)

y como el miembro de la izquierda solo depende de la variable x, y el de la derecha solo de t, solo pueden tener en común una constante (consideraciones físicas de las soluciones nos llevan a asignar esa constante a la energía total E), con lo que tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias fáciles de resolver:

$1/\psi(x)\, [-\hbar^2/(2m)\, d^2/dx^2\, \psi(x) + V(x)\psi(x)] = E$ (15)

$i\hbar\, 1/\varphi(t)\, d/dt\, \varphi(t) = E$ (16)

en concreto, la última tiene por solución $\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$.

-Ligaduras: Método de los multiplicadores de Lagrange.

En muchas ocasiones, en un modelo necesitamos encontrar el valor máximo o mínimo de alguna variable, que a su vez viene obligada a cumplir un conjunto de condiciones (ligaduras). Así, por ejemplo podemos querer encontrar el lugar geométrico de los puntos del espacio (x,y,z) donde la variable temperatura T(x,y,z) se hace máxima, pero al mismo tiempo nuestro problema nos obliga a movernos a lo largo de una curva dada en forma implícita como intersección de dos superficies $g_1(x,y,z)=0$ y $g_2(x,y,z)=0$. Si fuera posible encontrar las formas explícitas, podríamos sustituir ambas expresiones en la de T y derivar, pero muchas veces no lo es. Así empleamos el resultado encontrado por Lagrange que nos dice que si el punto (x,y,z) hace máximo (o mínimo) la función T, también lo hace para la combinación lineal $F(x,y,z) = T(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$, donde los coeficientes λ_1 y λ_2 se llaman multiplicadores de Lagrange. Así tenemos que resolver el sistema formado por 5 ecuaciones (las 3 derivadas de F respecto de cada variable x,y,z más las2 condiciones $g_1(x,y,z)=0$ y $g_2(x,y,z)=0$) con 5 incógnitas $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$. Dado que este criterio es una condición sólo necesaria, la solución no asegura que sea máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas, por lo que hay que emplear consideraciones de tipo físico o geométrico para asegurarlo.

2.-Transformadas integrales: Funciones de Green, transformada de Laplace, transf. de Fourier, etc.

Una ecuación diferencial puede ser escrita en forma compacta $L(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, donde $L(\mathbf{x})$ representa un operador diferencial lineal (Ej. bidimensional $\Delta(\mathbf{x}) \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$), $u(\mathbf{x})$ la función incógnita y $f(\mathbf{x})$ una función dada.

Despejando tenemos $u(\mathbf{x}) = L^{-1}(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x})$. Para realizar el cálculo definimos una función $G(\mathbf{x},\mathbf{x'})$ asociada al operador $L(\mathbf{x})$, llamada función de Green, tal que

$u(\mathbf{x}) = L^{-1}(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x},\mathbf{x'}) f(\mathbf{x'}) d\mathbf{x'}$ (17)

(Nota: si G(x,x') toma unas formas especiales, tenemos las llamadas transformadas integrales de Fourier, Laplace, Abel, etc.)

$L(\mathbf{x})\, G(\mathbf{x},\mathbf{x'}) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x'})$ (18)

con $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x'})$ siendo la función Delta de Dirac.

Ejemplo 1: $L= \Delta$, $G(\mathbf{x},\mathbf{x'})=-1/(2\pi) \ln r$, con $r=[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}$.

Ejemplo 2: encontrar la velocidad de una partícula que está sometida a una fuerza F(t) aplicada sólo en el instante t' (impulso) y frenada por otra fuerza viscosa $\lambda v(t)$, la ecuación del movimiento

$m\, dv(t)/dt + \lambda v(t) = F(t)$ (19)

, la función de Green $G(t,t')=1/m\, e^{-\lambda(t-t')/m}$, con lo que la solución del problema es

$v(t) = \int_0^t 1/m\, e^{-\lambda(t-t')/m}\, F(t')\, dt'$ (20)

Ej. de cálculo de $G(\mathbf{x},\mathbf{x'})$:

Consideremos la ec. de Helmholtz tridimensional $[\Delta(\mathbf{x}) + k^2]\, u(\mathbf{x}) = 0$, (21)

con lo que $L(\mathbf{x})= \Delta(\mathbf{x}) + k^2$. Si aplicamos la transformada de Fourier ($G(\mathbf{x},\mathbf{x'})=1/(2\pi)^3 e^{-i\mathbf{x}\mathbf{x'}}$) a la ecuación (18) tenemos $(q^2-k^2)\, G^T(\mathbf{q}) =1/ (2\pi)^3$ (22)

, donde hemos hecho el cambio de variable **r=x-x'** y la transformada de Fourier es $u^T(\mathbf{q})= 1/ (2\pi)^3 \int u(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{qr}} d\mathbf{r}$, y donde $q^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2$. Como $G^T(\mathbf{q}) =[(2\pi)^3(q^2-k^2)]^{-1}$. E invirtiendo (22) tenemos lo que buscamos $G(\mathbf{r}) = 1/(4\pi R)\, e^{ikR}$, con R siendo el módulo de **r**.

Ej. Transformada de Laplace: $G(\mathbf{x,x'})=e^{-\mathbf{xx'}}$
Resolvamos la ecuación y'' + y = sent, con las condiciones iniciales y(0)=0, y'(0)=1
Aplicando la transformada de Laplace tenemos $x'^2Y(x') - x'y(0) - y'(0) + Y(x') = 2/(x'^2+4)$, despejando y sustituyendo los valores de las condiciones iniciales tenemos $Y(x') = (5/3)/(x'^2+1) - (2/3)/(x'^2+4)$, e invirtiendo la transformada tenemos la solución: y= 5/3 sent – 1/3 sen2t.

3.-Integracion en tiempos propios.
En ocasiones las causas o fuerzas que intervienen en la dinámica de un proceso físico tienen expresiones funcionales que sólo son válidas durante intervalos de tiempo distintos para cada causa (tiempos propios de relajación, con lo que al invertir las ecuaciones diferenciales (al integrar) no podemos usar el mismo paso de tiempo, sino que tenemos que hacer la transformación pertinente.

$$d/dt\, F(x) = f(x) + g(x) \qquad (23)$$
$$F(x) = \int f(x)\, dt_1 + \int g(x)\, dt_2 \qquad (24)$$
Y para uniformizar debemos hacer las transformaciones oportunas:
$$F(x) = \int f(x)\, v(x)/v_1(x)\, dt + \int g(x)\, v(x)/v_2(x)\, dt \qquad (25)$$
Siendo v_1 y v_2 las velocidades características de cada una de las dos causas cuando éstas actúan por separado.

4.-Aproximaciones analíticas (polinomios).
Dado que la integración de polinomios es inmediata, es útil sustituir las funciones o tablas de datos por polinomios que aproximan el comportamiento de éstas. Sólo hay que tener cuidado de que las aproximaciones polinómicas elegidas converjan para que sean cuantificables. Así tenemos desde los polinomios más sencillos de Taylor, hasta los armónicos esféricos ó los polinomios de Laguerre, Jacobi, Bessel, Hermite, etc., que son en sí mismos soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales (para saber más de estos polinomios ver Abramowitz y Stegun 1972).

Ej. Polinomio de Taylor: $F(x) = F(x_0) + \Sigma_{k=1}^{n-1} F^{(k)}(x_0)/k!\, (x-x_0)^k + F^{(n)}(x_1)/n!\, (x-x_0)^n$ (26)
válida cuando existen unos ciertos valores x_1 y n. La idea consiste en sustituir la función F(x), que no es posible integrar analíticamente, por una serie de potencias cuyas integrales son inmediatas:
$$\int F(x)\, dx = \int F(x_0) + \Sigma_{k=1}^{n-1} F^{(k)}(x_0)/k!\, (x-x_0)^k + F^{(n)}(x_1)/n!\, (x-x_0)^n\, dx \qquad (27)$$

5.-Métodos perturbativos: linearización, matrices.
Dado un sistema de varias ecuaciones diferenciales acopladas
$$\partial^n f_1(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda),\ 1\leq j\leq m$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad (28)$$
$$\partial^n f_m(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda)$$
el método perturbativo consiste en perturbar las soluciones añadiéndolas unas variaciones infinitesimales $f_1 + \delta f_1, \ldots\ldots, f_m+ \delta f_m$, para tras sustituir en el sistema y operar, despreciar los términos de orden superior a 2, es decir, las potencias superiores a 1 de las variaciones infinitesimales, así como eliminar los términos sin variaciones, ya que cumplen las ecuaciones del sistema sin variar. Así, lo que nos queda es un sistema de ecuaciones lineales en las variaciones δf_m; sistema que podemos resolver mediante el álgebra de matrices obligando a que el determinante de la matriz de los coeficientes sea igual a cero para que la solución sea distinta de la nula si, como ocurre en numerosas ocasiones, el sistema linealizado se torna homogéneo.
Ej.
$$\left.\begin{aligned} \partial/\partial t\, f &= f^2 + g \\ \partial/\partial t\, g &= g^2 + f \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$
variando infinitesimalmente:
$$\left.\begin{aligned} \partial/\partial t\, (f+\delta f) &= (f+\delta f)^2 + g+\delta g \\ \partial/\partial t\, (g+\delta g) &= (g+\delta g)^2 + f+\delta f \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$
usando el sistema principal y anulando términos de orden superior:
$$\left.\begin{aligned} \partial/\partial t\, \delta f &= 2f\delta f + \delta g \\ \partial/\partial t\, \delta g &= 2g\delta g + \delta f \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$
asumiendo que tanto δf como δg se comportan como una fluctuación en forma de onda $Ae^{i(wt-kx)}$ y $Be^{i(wt-kx)}$, respectivamente, siendo A y B las amplitudes de la perturbación, tenemos el sistema:
$$\left.\begin{aligned} (iw-2f)\, A - B &= 0 \\ A + (iw-2g)\, B &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Con lo que para que tenga soluciones distintas de la trivial (iw-2f)(iw-2g) + 1 = 0. Con lo que, aunque no disponemos de la solución completa, si tenemos una relación entre f,g y la frecuencia de las oscilaciones en el medio físico representado por el sistema de ecuaciones.

6.-Cálculo numérico:

En numerosas ocasiones, las ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales que se nos plantean, no nos permiten una integración analítica, bien porque las funciones involucradas son complicadas o bien porque ni siquiera son conocidas las expresiones analíticas de esas funciones, sino que lo que conocemos son tablas numéricas de datos. En estos casos lo más habitual y conveniente, dado que cada vez disponemos de más facilidades para acceder a ordenadores más potentes, es construir programas de ordenador que repitan un número muy grande de veces el conjunto de operaciones aritméticas incluidas en el sistema de ecuaciones y en el orden que éste establece, partiendo de unos valores iniciales de las variables y tomando unos incrementos convenientes para optimizar el cálculo. Para ello disponemos de un conjunto de técnicas cada vez más refinadas que llamamos métodos numéricos:

Euler ó método de las tangentes:

Consiste en discretizar las derivadas linealmente. Así, si tenemos la ecuación $y' = F(x,y)$ con la condición $y(x_0) = y_0$, iremos calculando los valores de la incógnita paso a paso:

$$y_1 = y_0 + F(x_0,y_0)\,(x_1-x_0),\ldots\ldots,y_{n+1} = y_n + F(x_n,y_n)\,(x_{n+1}-x_n) \qquad (33)$$

El error cometido mediante esta aproximación lineal a la curva real $y = f(x)$ es menor cuanto menor sea el tamaño del intervalo o paso $x_{n+1}-x_n$ elegido.

Runge-Kutta:

Toma valores promedios y pesados de la función, en diferentes puntos del intervalo $[x_n,x_{n+1}]$.

Dada la misma ecuación como ejemplo, la solución paso a paso:

$$y_{n+1} = y_n + h/6\,(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}) \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} k_{n1} &= F(x_n,y_n) \\ k_{n2} &= F(x_n+h/2,y_n+hk_{n1}/2) \\ k_{n3} &= F(x_n+h/2,\ y_n+hk_{n2}/2) \\ k_{n4} &= F(x_n+h,\ y_n+hk_{n3}) \end{aligned} \qquad (35)$$

Monte Carlo:

Este es un método muy usado últimamente, porque compensa los errores de cálculo al tomar valores aleatorios de la partición del intervalo en el que integramos.

$$y' = f(x) \qquad (36)$$

$$y = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (37)$$

con un cambio de variable siempre podemos

$$y = \int_0^1 f(x')\,dx' \qquad (38)$$

mediante este método en su forma más elemental obtenemos

$y = 1/n\ \Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)$, con ξ_i siendo números aleatorios pertenecientes al intervalo [0,1). Hay otras variantes más sofisticadas del método (ver por ejemplo Riley, Hobson and Bence 2002).

Dado que los programas de ordenador son métodos aproximativos de la solución analítica, es crucial antes de utilizar un programa su calibración, es decir, hacerlo correr para un conjunto de datos conocidos del comportamiento real del sistema que vamos a modelar en condiciones que luego serán distintas, y comparar la evolución de las soluciones numéricas con los datos de la tabla, con el fin de tener control sobre los errores. Lo errores provienen de 3 causas: a) el método ó fórmula que aproxima pero no es exactamente igual a la forma de la función solución del problema, b) el error cometido en la medida de los valores iniciales ó de entrada en el cálculo, c) las limitaciones físicas del ordenador que hacen que no pueda tomar en cada cálculo que realiza un número infinito de decimales para los números que como los irracionales lo necesitarían.

4.-Aplicación de las técnicas a algunos casos concretos.

"Se le dijo... y lo olvidó,
lo vió... y lo creyó,
lo hizo... y lo comprendió"
(Confucio, S. VI a.c.)

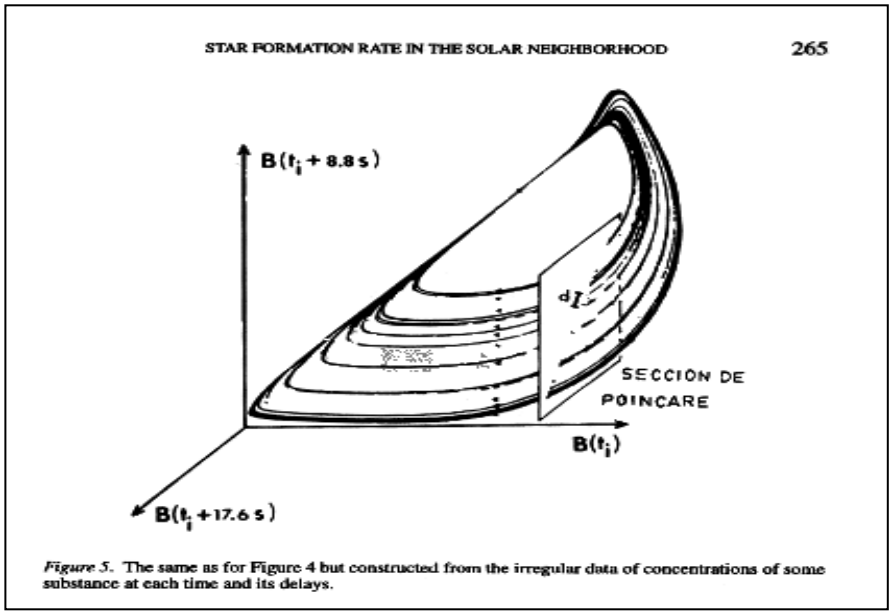


Figure 5. The same as for Figure 4 but constructed from the irregular data of concentrations of some substance at each time and its delays.

A)Dinámica de un disco galáctico en rotación e inmerso en un campo magnético:

Modelemos, siguiendo a Chandrasekhar (1954), la dinámica de un disco galáctico simplificándolo como un medio extenso homogéneo y de conductividad eléctrica infinita en rotación con velocidad circular $\mathbf{\Omega}$, inmerso en un campo magnético uniforme de intensidad $\mathbf{H}$. Así, el sistema de ecuaciones diferenciales que muestra el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el sistema, las ecuaciones de Maxwell que rigen la evolución del campo magnético, y las ecuaciones de conservación de la masa y la del campo gravitatorio, para las fluctuaciones de densidad $\delta\rho$, de presión δp, del campo magnético $\delta\mathbf{H}$, y del potencial gravitacional δV, son:

$$\begin{aligned}
&\rho\,\partial/\partial t\ \mathbf{u} = 1/(4\pi)\ \mathrm{rot}\ \delta\mathbf{H}\times\mathbf{H} + 2\rho\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega} - \mathrm{grad}\ \delta p + \rho\,\mathrm{grad}\ \delta V\\
&\partial/\partial t\ \delta\mathbf{H} = \mathrm{rot}\ \mathbf{u}\times\mathbf{H}\\
&\mathrm{div}\ \delta\mathbf{H} = 0 \qquad\qquad (39)\\
&\partial/\partial t\ \delta\rho = -\rho\ \mathrm{div}\ \mathbf{u}\\
&\nabla^2\ \delta V = -4\pi G\ \delta\rho
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}$ representa el vector velocidad lineal. Asumimos que los cambios en la presión y en la densidad tienen lugar adiabáticamente, es decir $\delta p = c^2\ \delta\rho$, con c siendo la velocidad del sonido en el medio. Elegimos la orientación adecuada para el sistema de referencia, de forma que $\mathbf{H} = (0,H_y,H_z)$ y $\mathbf{\Omega} = (\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$. Buscando soluciones del sistema que sean fluctuaciones en forma de onda que se propaga en la dirección z, tenemos que en los gradientes, sólo $\partial/\partial z$ es distinto de cero; y además de la condición de div $\delta\mathbf{H} = 0$ se tiene que $\delta H_z = 0$. Así, el sistema se transforma en un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para las amplitudes de las distintas magnitudes que fluctúan como ondas ($e^{i(wt-kz)}$) propagándose en la dirección del eje z, sistema que en forma matricial sería

$$\begin{pmatrix}
w & 0 & kH_z & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & w & 0 & kH_z & -kH_y & 0 & 0\\
\frac{kH_z}{4\pi\rho} & 0 & w & 2i\Omega_z & -2i\Omega_y & 0 & 0\\
0 & \frac{kH_z}{4\pi\rho} & -2i\Omega_z & w & 2i\Omega_x & 0 & 0\\
0 & -\frac{kH_y}{4\pi\rho} & 2i\Omega_y & -2i\Omega_x & w & \frac{-c^2k}{\rho} & k\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\rho k & w & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi G & -k^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta H_x\\ \delta H_y\\ u_x\\ u_y\\ u_z\\ \delta\rho\\ \delta V
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0
\end{pmatrix}
\qquad (40)$$

Obligando a que cumpla la condición de tener alguna solución distinta de la trivial, tenemos que el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser igual a cero, lo que nos ofrece una ecuación del tipo $w^6+Aw^4+Bw^2+C=0$, cuyas soluciones posibles son dicen que habrá tres modos (w_1,w_2,w_3) en los que una onda se propaga por ese medio, y tal que

$$w_1^2+w_2^2+w_3^2 = 4\Omega^2+2\Omega_A^2+ \Omega_B^2+ \Omega_J^2, \quad y \quad w_1w_2w_3 = \Omega_A^2\, \Omega_J \qquad (41)$$

con $\Omega_J^2 = c^2k^2-4\pi G\rho$. Así, si Ω_J es imaginaria, entonces w_1,w_2,w_3 también lo serán, con lo que la propagación se torna inestable (deja de ser periódica para hacerse exponencial). Así obtenemos la famosa condición de Jeans para que un sistema gaseoso se torne gravitacionalmente inestable ($\Omega_J^2 < 0$), es decir que $c^2k^2 < 4\pi G\rho$; que es la condición esencial para que una nube de gas colapse gravitacionalmente y de lugar al nacimiento de las estrellas en una galaxia.

B)Evolución química de un disco galáctico:

Sabemos que los diferentes elementos químicos (C,N,O,Fe,etc.) se forman en el interior de las estrellas a partir del H a través de reacciones nucleares (comprobado en laboratorio terrestre), además también sabemos que otros como el Li se formaron durante los primeros segundos de vida del Universo durante el Big Bang y todavía se están formando y destruyendo en el medio interestelar (ver Casuso and Beckman 2000).

1.-Modelo analítico de producción de Li:

Suponiendo que la producción actual de Li está asociada a la de rayos cósmicos de baja energía por estrellas de masa inferior a $3M_*$ tenemos

$$d/dt\ Li(t) \propto e^{kt}, \qquad (42)$$

e integrando y usando el ajuste observacional $[Fe/H] \approx -(1-t/15)^2$, tenemos

$$Li \approx k_1(1+e^{k'[1-\sqrt{(-[Fe/H])}]}) \qquad (43)$$

, donde k_1 y k' son constantes de integración.

2.-Método numérico de producción de Li:

Aquí tenemos en cuenta detalladamente cada uno de los procesos (reacciones químicas que sabemos de experimentos en laboratorio que pueden dar lugar a ese elemento químico). Primero modelamos la producción de He,C,N,O y Fe en el interior de las estrellas para que tras su expulsión al medio interestelar por explosiones SN o por vientos estelares, puedan producirse las reacciones de estos elementos con los rayos cósmicos y producir Li. Así, tendremos un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas

$$d/dt\ g = -SFR(t) + E(t) \qquad (44)$$

donde g es la fracción de la masa total de la galaxia que permanece en forma de gas frente al resto que serán estrellas SFR(t), y E(t) es la fracción de masa de gas que llega como consecuencia de dos procesos: expulsión de gas por las estrellas durante toda su vida (vientos, explosiones supernovas), y la llegada de nubes de gas desde el exterior de la galaxia.

$$E(t) = \int_{mt}^{mu} SFR(t-t_m)IMF(m)R(m)\, dm + P(t) \qquad (45)$$

donde t_m es el tiempo de vida de una estrella de masa m (se coge de una tabla de un modelo teórico bien contrastado con las observaciones), mt es la masa de una estrella que tiene un tiempo de vida t), mu es la máxima masa admitida para una estrella ($\sim 100M_*$), $SFR(t) \propto g$, $IMF(m) \propto m^{-2.35}$, R(m) y P(t) se toman de tablas de modelos teóricos contrastados.

$$d/dt\ (gX_i) = \int_{mt}^{mu} SFR(t-t_m)IMF(m)\ \{Q_i(m)+X_i(t-t_m)[R(m)-Q_i(m)]-R(m)X_i(t)\}dm + P(t)[X_i'(t)-X_i(t)] \qquad (46)$$

con $Q_i(m)$ la producción de elemento químico i por parte de una estrella de masa m durante toda su vida (tabla), $X_i(t)$ la abundancia del elemento i en el medio interestelar, $X_i'(t)$ la abundancia del elemento i en las nubes de gas exteriores.

Y por último la producción de Li

$$d/dt\ Li = \Sigma_j X_j(t)\ \Sigma_i \int F_i(E,t)\sigma_{ij}(E)\, dE \qquad (47)$$

donde $F_i(E,t) \propto (E+E_0)^{-\lambda}$ es el flujo de rayos cósmicos, con E_0 la energía del protón y λ toma distintos valores observacionales para los distintos rangos de energía; y $\sigma_{ij}(E)$ es la probabilidad de que tenga lugar cada reacción química i+j Li (se toma de la observación en laboratorio).

Mediante la iteración se va calculando ordenadamente, en cada paso de tiempo, cada magnitud de la que va a depender el cálculo de la siguiente magnitud, y así sucesivamente hasta llegar al tiempo actual.

C)Tratamiento diferencial del Proceso de formación de estrellas:

Partiendo de la misma ec. (46) para la formación de estrellas a partir del colapso gravitacional de las nubes de gas, y tomando incrementos finitos de tiempo

$$g_{n+1} = g_n + (-SFR_n + E_n)\ \Delta t \qquad (48)$$

adoptando $SFR_n = \mu_n g_n$, con $\mu_{n+1} = \delta.\mu_n$, tenemos

$$SFR_{n+1} = SFR_n(1-\mu_n\Delta t)\delta(1+\Upsilon\Delta t SFR_n) \qquad (49)$$

Siendo $\Upsilon = 1 + P_n/\{SFR_n^2 \Delta t[1/(\mu_n \Delta t)-1]\}$ (50)

Y dado que sabemos que $\mu_n = 10^{-4}$ Myr^{-1}, y que $\Delta t = 10^2$ Myr, la ec. (49) queda

$SFR_{n+1} = SFR_n \delta(1+\Upsilon \Delta t SFR_n)$ (51)

que es exactamente el mapa logístico (ver ec. (3)) en el caso en que $\Upsilon \Delta t = -1$, es decir cuando la cantidad de gas que sale expulsada de la galaxia es aproximadamente el doble de la que suministran las estrellas. Así, esta relación de recurrencia nos indica que la SFR tendrá una evolución regular, seguida de una duplicación del período de repetición de los valores de SFR, hasta que el parámetro de control δ toma valores iguales o superiores a un valor crítico (3.8415... número de Feigenbaum) y la dinámica se torna caótica (impredecible), es decir, que iterando la ec. (51) la solución no se estabiliza. De hecho, dos valores iniciales de SFR_0 tan próximos como queramos, tras su paso por (51) tendrán resultados completamente distintos, y su diferencia crecerá exponencialmente con el tiempo siguiendo la ley $\Delta = 4.317\ e^{0.013t}$ siendo 0.013 el llamado exponente de Lyapunov para este proceso (ver Casuso and Beckman 1997).

D)Tratamiento integral del proceso de formación de estrellas:

Ahora emplearé una técnica integral proyectiva que generaliza la proyección incremental básica

$X(t+\Delta t) = X(t) + X'(t)\ \Delta t$ (52)

, donde es observado que en muchas ocasiones reales $X'(t) = k\ X(t)$, con lo que (52) queda

$X'(t) = k/(1+k\Delta t)\ X(t+\Delta t)$, es decir, que la primera derivada de la magnitud X en un tiempo t es proporcional al valor de la magnitud en el tiempo futuro $t+\Delta t$. Generalizamos para flexibilizar este supuesto y hacemos la hipótesis de que la derivada fraccionaria de Lyouville de orden β (que toma valores entre 0 y 1) es proporcional a la magnitud en el futuro, e invirtiendo tenemos

$X(t_{pasado}) \propto I^{\beta}_{frac}\ X(t_{fut})$ (53)

donde $X(t_{pasado})$ no representa una expresión analítica de una función sino un distribución de valores reales (no estadísticos). La ventaja de este método es que, mientras el método diferencial (ec. (52)) sólo contabiliza lo que ocurre en el tiempo t para proyectar hacia el $t+\Delta t$, aquí proyectamos los sucesos reales observados con un conjunto todo lo grande que queramos de valores de X. Usamos como herramienta la integral fraccionaria de Lyouville, que no es sino la transformada de Abel

$I^{\beta}_{frac}\ X(x) = 1/\ (\beta) \int_a^x (x-t)^{\beta-1}\ X(t)\ dt$ (54)

El método consiste en calcular el valor de β a partir de la 2ª cuarta parte inicial de los datos observacionales de que disponemos para el sistema en estudio proyectándolos sobre la 1ª cuarta parte y ajustando hasta que el error sea mínimo. Y después proyectamos la primera mitad de los datos que ya hemos usado para "predecir" la segunda mitad, así comparamos y si la "predicción" es buena en comparación con los datos, podemos proyectar el conjunto total de los datos para predecir realmente el comportamiento futuro del sistema. Esto se hace invirtiendo de nuevo la ec. (54) mediante el uso del desarrollo en serie de polinomios ortogonales de Jacobi, con coeficientes obtenidos por integración numérica, que NO sufre del grave problema de la amplificación de los errores inherente al tratamiento diferencial, con lo que la proyección es limpia (ver Casuso 1999 y Simonneau , Varela, Muñoz-Tuñon 1993).

E)Formación de nubes de gas interestelar:

Para modelar el comportamiento de las nubes de gas en una galaxia utilizamos la ecuación diferencial estocástica de Langevin (ver Casuso and Beckman 2002)

$d/dt\ u(t) = -\lambda\ u(t) + A(t) - q\ B\ u(t)/m$ (55)

donde u(t) es la velocidad, q la carga eléctrica y m la masa, de cada nube; B el campo magnético supuesto uniforme y constante, λ es el coeficiente del rozamiento que experimenta cada nube como consecuencia de su movimiento a través de las demás nubes, y A(t) es una fuerza aleatoria que modela el comportamiento browniano de las nubes de gas como consecuencia de las múltiples colisiones entre nubes, y que suponemos que fluctúa mucho más rápidamente que las variaciones de u(t). La ecuación (55) puede ser escrita

$d/dt\ u(t) = -\beta u(t) + A(t)$ (56)

con $\beta = (\lambda + qB/m)$

Y dado que es una ecuación estocástica, su solución tendrá carácter estadístico, es decir, su solución vendrá dada por la función distribución de probabilidad de que una nube tenga un desplazamiento $x-x_0$, en una dirección dada, en un tiempo t, partiendo de unos valores iniciales $x=x_0$, $t=0$, $u(0)=0$: $W(x,t;x_0,u_0)$.

Las restricciones a W serán:

1) $W(u,t;u_0)$ $\delta(u_x-u_{x,0})$ $\delta(u_y-u_{y,0})$ $\delta(u_z-u_{z,0})$ cuando t 0, siendo $\delta(x)$ la función delta de Dirac.
2) $W(u,t;u_0)$ $[m/(2\ kT)]^{3/2} \exp[-mu^2/(2kT)]$ cuando t , que es una maxwelliana dada la naturaleza del problema de colisiones múltiples.

Dado que la solución formal de (56) es: $u-u_0e^{-\beta t} = e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta c}A(c)\ dc$, las propiedades estadísticas de la parte izquierda de la igualdad deben ser las mismas que las de la derecha, y como la izquierda tiende a u(t) cuando

t , esto nos indica que la parte derecha debe tender hacia una función de distribución maxwelliana en el límite cuando t . Esto nos lleva (ver deducción completa en Chandrasekhar 1943) a que cuando t β^{-1}

$$W(x,t;x_0,u_0) = 1/(4\ Dt)^{1/2} \exp[-(x-x_0)^2/(4Dt)] \qquad (57)$$

Siendo $D = kT/(\lambda m+qB)$ un coeficiente de difusión.

De esta solución, de la asunción de que los desplazamientos antes de una colisión son similares al tamaño de las nubes que colisionan, y de la relación observacional entre los tamaños y las masas de las nubes tenemos:

$$d/dm\ N \propto m^{\alpha-1}\exp(-m^{2\alpha}/\sigma) \qquad (58)$$

con α y σ constantes a determinar por ajuste con las observaciones. Esta es una distribución con una masa característica, es decir dependiente de escala. Pero, dado que las nubes de gas tienen su movimiento geométricamente limitado (por Ej. dentro de un brazo espiral galáctico), y esto implica (ver Chandrasekhar 1943) que la función de distribución final es la suma de una gausiana principal centrada en el origen (ec. (58)), y otras secundarias (efecto de la reflexión de las nubes) centradas en las las "paredes" de la región limitada. Así, el resultado es una tendencia general en forma de ley de potencias (fractal) salpicada de jorobas gausianas (más cuanto más varíe con el tiempo el tamaño de la región).

$$d/dm\ N \propto m^{\alpha-1}\{\exp(-m^{2\alpha}/\sigma) + \exp[-(M_c^{\alpha}-m^{\alpha})^2/\sigma] + ...\} \qquad (59)$$

con M_c la masa característica del tamaño de la región. Esto nos explica el comportamiento dual de las observaciones: fractal global + dependecia de escala múltiple.

5.-Conclusiones.-

En esta conferencia he pretendido dar una visión, necesariamente somera pero de conjunto, de las técnicas tanto de planteamiento como de resolución de los diversos modelos matemáticos que nos sirven para ir conociendo más y mejor los mecanismos que rigen los diversos fenómenos físicos que observamos más allá de los confines de nuestro sistema solar. Y lo hacemos siempre contrastando nuestros razonamientos lógico-matemáticos (modelos) con la ingente cantidad de nuevos datos observacionales. Este conocimiento de la física de los sistemas extraterrestres es la base para conocer el comportamiento de los sistemas físicos terrestres en condiciones diferentes de las del laboratorio: el Universo en su conjunto como un gran laboratorio.

Agradecimientos.- Quiero agradecer a los Doctores Rodrigo Trujillo e Isabel Marrero por su apoyo y su confianza al invitarme a dar esta conferencia.

Referencias.-

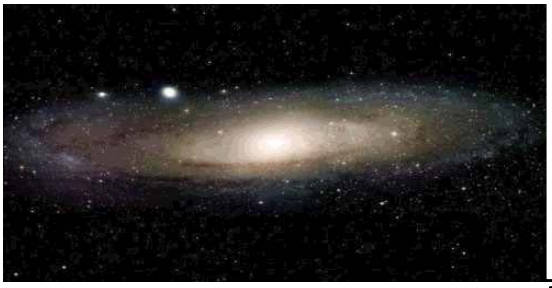
-Abramowitz, Stegun 1972
-Casuso,E., Beckman, J. E., 1997, Astr. Spac. Sci. 249, 257
-Casuso, E. 1999, IJMPA 14, 3239
-Casuso, E., Beckman, J. E., 2000, , PASP 112, 942
-Casuso, E., Beckman, J. E., 2002, , PASJ, 54, 405
-Chandrasekhar, 1943 , Reviews of Modern Physics 15,1
-Chandrasekhar, 1954, ApJ 119, 7
-Riley, K. F., Hobson, M. P., Bence, S. J., 2002, "Mathematical Methods for Physics and Engineering, Cambridge Univ. Press 2002
-Simonneau, Varela, Muñoz-Tuñon, 1993, JQSRT 49,149

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE CONSTRUCCIÓN

DE MODELOS EN ASTROFÍSICA

Dr. E. Casuso

Instituto de Astrofísica de Canarias, 38200, La Laguna, Tenerife, España



1.-INTRODUCCIÓN.-

"El libro de la Naturaleza
fue escrito por Dios
en lenguaje matemático"

(Galileo)

➡Toda actividad del ser humano está condicionada por los fenómenos naturales (el clima, las estaciones, los días y las noches, etc.), y estos a su vez son el resultado de las **interacciones** del sistema físico en el que vivimos (la Tierra) **con el resto del Universo**, empezando por el Sol, la Luna y los planetas de nuestro sistema solar, y continuando con las nubes de gas interestelar e intergaláctico y así como el resto de las galaxias.

➡De esta forma, se nos hace esencial tratar de conocer cuales son los mecanismos que hacen que estos fenómenos tengan lugar en la forma en que lo hacen, con el fin último de poder **predecirlos** y utilizarlos para nuestra propia evolución como seres vivos.

➡Así es como surge la necesidad de construir estructuras lógicas que nos describan el cambio de un conjunto de magnitudes mensurables (temperatura, densidad, etc.) que caractericen los sistemas físicos a estudio, y estas **estructuras lógicas son los modelos matemáticos** basados esencialmente en conjuntos de **ecuaciones diferenciales**, que no son otra cosa que dependencias funcionales, extraídas de la observación, así relaciones entre las primeras derivadas (velocidades de cambio), las segundas derivadas (aceleraciones o fuerzas o causas) y las magnitudes involucradas.

➡El uso de modelos matemáticos para describir fenómenos reales es una practica científica reciente; nunca antes del **siglo XX** fue utilizada.

➡De hecho fue durante la **Segunda Guerra Mundial** que se estimuló la construccion de modelos matematicos para predecir el clima, para la localizacion de recursos, para la organización de planes de desarrollo como el **Plan Marshall**, para resolver problemas de aerodinamica y balistica, desarrollo de la energia nuclear, problemas relacionados con la extraccion de petroleo, metodos de organización de la produccion industrial, la carrera espacial, etc.

➡Fue entonces cuando se produjo una verdadera revolucion en las tecnicas de desarrollo de los modelos matematicos con la llegada de los **computadores electronicos**, lo que permitio el **calculo numerico**, es decir la realizacion en un tiempo razonable de miles y millones de operaciones aritmeticas que simulan el comportamiento real de los sistemas fisicos.

➡ Mas aun, la introduccion reciente de las **computadoras graficas** con la subsiguiente representacion geometrica de las soluciones (hasta entonces solo representadas por tablas numericas), nos permite hoy hacer una valoracion cualitativa directa del comportamiento de las soluciones de los modelos.

➡Hace unos 40 años **John von Neumann** se referia a la modelizacion matematica de la Naturaleza en los siguientes terminos: "Las ciencias no intentan explicar, incluso ni siquiera intentan interpretar, ellas basicamente hacen modelos. Por modelo se entiende aquella construccion matematica que con la ayuda de ciertas interpretaciones verbales describe los fenomenos observados en la Naturaleza. La justificacion de tales construcciones matematicas es unica y precisamente que funcionen, esto es, que describan

correctamente los fenomenos desde un punto de vista razonablemente amplio.

➡Mas aun, deben satisfacer ciertos criterios esteticos,es decir que en relacion con cuanto describe deben ser suficientemente **simples**. Aunque uno no puede decir exactamente como de simple deben ser. La simplicidad es un asunto esencialmente historico, de condicionamientos previos, de antecedentes, de procedimientos previamnete usados". Entonces la Ciencia nos suministraria las imágenes matematicas (los modelos) que son evaluados exclusivamente de acuerdo con un criterio de **efectividad**, es decir de acuerdo a si funcionan o no, y asi nos permite que algunos efectos sean predichos o al menos que tengamos una idea, aunque parcial, de los hechos.

➡Por el contrario, **Issac Newton (S. XVII)** en su "Opticks" aseguraba que la principal tarea de la Filosofia Natural (hoy Fisica-Matematica) es argüir en el **origen de los fenomenos** sin hacer hipotesis, e inferir las **causas** a partir de los efectos hasta alcanzar la Causa Primera. La Filosofia Natural tiene según Newton la tarea no solo de explicar el mecanismo del mundo sino que es fundamental resolver cuestiones como ¿que hay en los lugares que estan completamente vacios de materia, y de donde se obtiene que el sol y los planetas gravitan unos alrededor de los otros sin que haya ninguna materia densa entre ellos?. Asi, la Matematica, desde Kepler y Galileo, no es una mera herramienta descriptiva de naturaleza, sino que **contiene en si misma la esencia intima de los fenomenos**.

➡En **Astrofisica** tenemos la necesidad de simplificar los modelos mas que en ninguna otra ciencia debido a la dificultad añadida de la **imposibilidad de manipular** los objetos a estudio dada su naturaleza extraterrestre: no podemos manejar en el laboratorio estrellas, nubes de gas, galaxias, agujeros negros, etc.

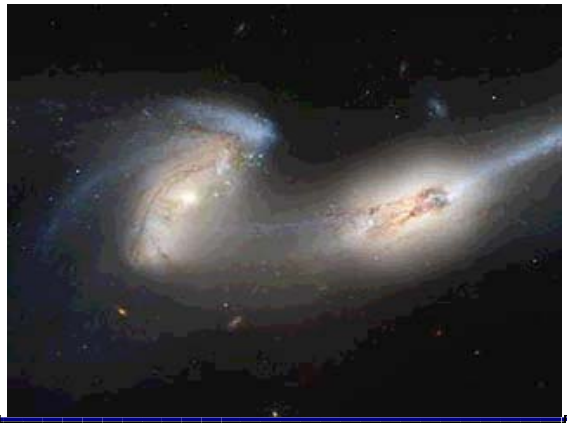
➡A esto le tenemos que añadir la **limitacion en la propia naturaleza de los datos** observados: practicamente la totalidad de estos provienen de la informacion que transporta la luz emitida por los objetos en estudio, casi siempre tan lejanos que nos aporta datos de tiempos remotos. Además los datos provenientes de objetos lejanos son muy inciertos (errores llamados sistemáticos) dada la falta de un conocimiento completo del **medio intergaláctico** que es atravesado por la **luz** hasta nosotros. Y otro factor importante es la dificultad en la medida precisa de las **distancias** entre objetos en el Universo.

➡**Galileo (S. XVII)** hablaba ya de la "Simplicidad de la Naturaleza". **Lagrange (S XVIII)** sostenia que en una **ecuacion diferencial** que represente un proceso real, la contribucion de **la parte lineal** de las funciones involucradas era la que expresaba los aspectos caracteristicos de la dinamica del proceso mismo, mientras que **las partes no lineales** podian ser despreciadas en el estudio de la parte esencial de los fenomenos (hoy sabemos que hay ocasiones en las que la parte no-lineal supera en importancia a la lineal).

➡ **Einstein** dijo: "Tenemos derecho a creer que la Naturaleza es la realizacion de lo que podemos imaginar como **lo mas simple desde el punto de vista matematico**". Los errores (tanto de calculo como observacionales) se amplifican mucho mas con las dependencias no-lineales. Hay un gran numero de fenomenos que presentan un comportamiento cuasi-periodico u oscilatorio (ciclos economicos, acustica, dinamica de poblaciones, ciclos solares, ritmo cardiaco, etc.).

➡**Ejemplo** tipico de esta dicotomia lineal-nolineal podemos usar el del **oscilador armonico simple** que esta representado matematicamente por una proporcionalidad directa entre la segunda derivada de la posicion y la propia posicion, con lo que la solucion es periodica; sin embargo, cuando se le introduce un impulso exterior periodico se torna mucho mas complejo, ya no es representado por una ecuacion lineal y la solucion se torna incluso **caotica** para ciertos valores del parametro que regula la intensidad de la perturbacion externa.

➡Un **modelo matematico es un esquema conceptual que intenta representar un conjunto de fenomenos utilizando el lenguaje matematico**. Como no es un reflejo exacto de un fenomeno, un modelo determinado **no es la unica representacion posible**, no hay una relacion de equivalencia uno a uno entre modelos y fenomenos. El mismo fenomeno puede ser representado por varios modelos. Pero cada modelo proyecta una serie de predicciones para otros fenomenos relacionados, y es asi como a medida que se contrastan esas predicciones con las posteriores observaciones, que se van restringiendo el numero de modelos que son **coherentes con** el mayor numero de **observaciones** (ligaduras). Asi, estamos condenados a modificar permanentemente (en tanto en cuanto aparecen permanetemente nuevos datos onbservacionales con los que comparar) nuestros modelos matematicos para mejorar nuestra "aproximacion" a la simulacion de los fenomenos reales.



➡Es obvio que, dado el limitado tiempo de esta conferencia, no podremos tratar todas las posibilidades, sino que nos centraremos en ofrecer una **perspectiva muy general**, aunque nos detendremos en algunos problemas caracteristicos concretos en Astrofisica.

2.- PLANTEAMIENTO Y CONSTRUCCIÓN DE MODELOS.-

"Los ideales son como las estrellas: no los alcanzas, pero iluminan nuestro camino"
(Demócrito)

➡Tenemos la necesidad de descubrir un conjunto de **leyes matematicas** que relacionen de forma coherente una serie de **magnitudes observables** en la Naturaleza, pero sobre todo, tenemos la necesidad de tratar de conocer la **evolución** de estas magnitudes con el tiempo. Asi, para **Aristoteles** la Naturaleza es esencialmente **κινησις** (kinesis=movimiento).

➡**1.-Observación** de magnitudes que caractericen los sistemas fisicos (que distingan unos de otros): presión, temperatura, densidad, posición, velocidad, aceleración, etc.

➡**2.-**Buscar **relaciones de dependencia** entre ellas (con la precaución de que existan estas relaciones dentro de las barras de error observacionales, y es por eso que se empieza por establecer **correlaciones lineales** alli donde las haya, para ir afinando la forma de estas relaciones a medida que se conocen mas datos y se reducen las barras de error), y entre ellas y su cambio con el tiempo. Relaciones que se expresan matemáticamente por lo general en forma de ecuaciones, mapas logisticos, programas de ordenador. Ej. La **IMF** que primero era lineal en logN/logm , despues es normal-logarítmica y ahora incluso responde mejor a una cuya grafica tiene muchos picos y es mejor reproducida por un progama iterativo de ordenador:

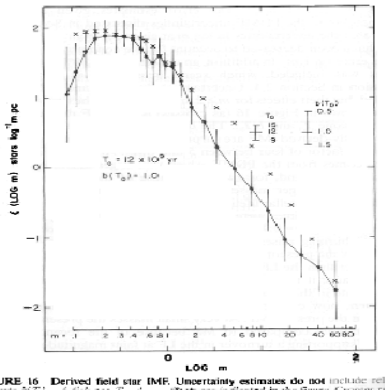
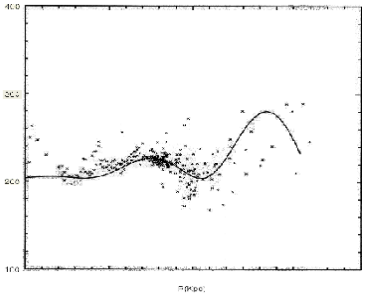


FIGURE 16 Derived field star IMF. Uncertainty estimates do not include relative birthrate $b(T_0)$ and disk age T_0, whose effects are indicated in the figure. Crosses represent the IMF derived in Miller and Scalo (1979)

➡O la **curva de rotación de nuestra Galaxia** (velocidad de rotación de las estrellas y nubes de gas en función de su distancia al centro galactico, donde se puede observar cómo los datos observados se prestan a hacer una primera aproximación lineal para continuar afinando con polinomios de orden superior, casi como si estuvieramos construyendo una aproximacion en desarrollo de **Taylo**r.



➡**3.-**Cuando estas relaciones no solo se cumplen en unos sistemas determinados sino que se generalizan y son validas para cualquier sistema fisico se les llama **leyes**, como la **Ley de la Gravitacion universal** de Newton

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-GMm}{r^2} \qquad (1)$$

con *r* la distancia entre dos masas puntuales *M* y *m*, *M*»*m*, la **Ley de Coulomb del campo electrico** (igual a la anterior salvo sustituir G por k y las masas por cargas de distinto signo), la **Ley de Gauss** que relaciona el flujo de un campo con el origen de este (cargas, masas, etc.)

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi G \int_V \rho(\mathbf{x})dx \qquad (2)$$

➡O las **leyes de conservacion** (en ciertas circunstancias) de algunas magnitudes como la masa, la energia, el momento lineal o el momento angular; que son en realidad constantes del movimiento, es decir que sus valores permanecen invariables a lo largo de la dinamica del sistema.

➡Para plantear y **construir un nuevo modelo** que explique (en el sentido de que reproduzca el mismo comportamiento dadas unas condiciones iniciales y de contorno y dadas unas ligaduras que deben cumplir los valores de los parametros libres) los datos observados, **partimos de las leyes básicas** o bien de un modelo previo y modificamos razonadamente (en base a argumentos nuevos o previamente despreciados por considerarse de poca importancia cuantitativa) alguna de las funciones, aunque lo mas comun es **añadir algun nuevo término en las ecuaciones**, término que tendría en cuenta una nueva causa del comportamiento a explicar.

➡En **Astrofisica** debemos muchas veces hacer hipotesis en las que generalmente **extrapolamos** comportamientos conocidos en Tierra (laboratorio), **hipotesis** que seran validadas en el momento en que sean capaces de reproducir los datos en coherencia con el resto de las hipotesis previamente exitosas, y que [illegible]

➡Construir un **modelo** en Astrofisica (y en Fisica en general) consiste básicamente en **plantear una ecuación** que iguale la derivada segunda o aceleración a un asuma de fuerzas que causan el cambio en la dinamica del sistema: la gravedad, campos magneticos, rozamiento, etc. A veces se usa directamente la primera derivada y se iguala a la diferencia entre los aportes y los gastos o consumos. A estas ecuaciones básicas se añaden otras como condiciones de continuidad o de conservación.

MODELO:

➡**1.-Recopilar informaciòn** tanto en bibliografia como obteniendo datos personalmente, para saber cuales son las condiciones fisicas cualitativas (dónde esta situado, què otros sistemas pueden influirlo interaccionando con èl) y cuantitativas (qué valores toman los distintos parametros que caracterizan el sistema) del sistema.

➡**2.-Buscar dependencias funcionales** o de otro tipo entre los valores de las magnitudes observadas y de estas con el tiempo.

➡**3.-Establecer un conjunto de ecuaciones** basicas con el mínimo número de parámetros libres. Así como un conjunto de condiciones iniciales $F(x,t=0) = F_0$ y condiciones de contorno $F(x=x_i,t) = F_i$, $\partial^n F|_{x,t=a,b} = C_n$.

➡**4.-Resolverlas** y cotejar las soluciones con los datos variando los parámetros.Si no es bueno el ajuste se replantean las ecuaciones introduciendo nuevos factores o incluso nuevas ecuaciones. Tener en cuenta la estabilidad de las soluciones así como la evolución de los errores según las ecuaciones diferenciales.

➡**5.-Interpretar el significado fisico** que tienen las soluciones válidas y comparar con otros modelos previos y con el resto de la teoria para asegurar la coherencia del sistema formal.

TIPOS DE ECUACIONES

➡**A)Ecs. Difs. simples (parciales o totales)**

$\partial^n f(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f,x,v,t,\lambda)$

ó (3)

$d^n f(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f,x,v,t,\lambda)$

Ej. **Ley de Newton** $m\, d^2x(t)/dt^2 = F[x(t),v(t),t]$ donde F es la ley de proporcionalidad entre las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia en el caso de la gravitación. λ representa a los parámetros del modelo (llamados de control o libres).

➡**B)Ecs. Dif. Acopladas** (ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnetico, ecuaciones de la dinamica de fluidos en Meteorologia, en Astrofisica,etc.)

$\partial^n f_1(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda),\ 1 \le j \le m$

..... (4)

$\partial^n f_m(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda)$

➡**C)Mapas ó relaciones de recurrencia**.

$f_{n+1} = F(f_p,\lambda)$, $1 \le p \le n$ (5)

Ej. El **mapa logistico** $X_{n+1} = X_n\, \lambda\, (1-X_n)$ donde X_n representa la cantidad de individuos existente en un tiempo dado de una cierta poblacion biologica, y X_{n+1} es la cantidad en el paso siguiente de tiempo.

➡**D)Ecs. Difs. Estocásticas**

$\partial^n f(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f,x,v,t,\lambda) + A(t)$ (6)

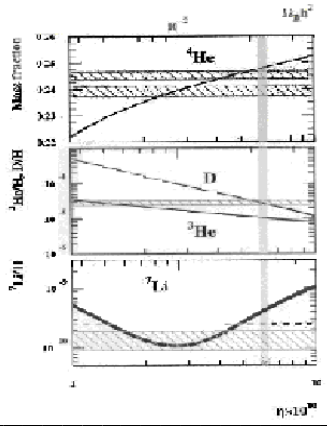
donde A(t) representa un termino fluctuante estocástico, habitualmente en el sentido de browniano, no determinista.

➡**E)Ecs. Integrales proyectivas**

$f(x,\lambda) = I[f(w,\lambda)]dw$ (7)

con I siendo una transformada integral (Abel, Laplace, Fourier, etc.); x, w son habitualmente espacio o tiempo.

➡En definitiva un **modelo matematico** aplicable a la Astrofisica es un sistema formal que **restringe** el conjunto infinito de posibles valores de un conjunto de parámetros libres asi como de las variables y sus sucesivas derivadas, lo que se llama el espacio de las fases. Dentro de la zona restringida deben caer los valores de las observaciones para que el modelo sea considerado. Ejemplos:



STAR FORMATION RATE IN THE SOLAR NEIGHBORHOOD 265

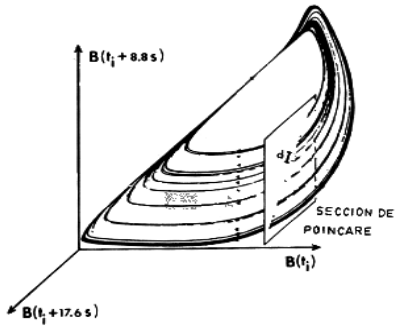


Figure 5. The same as for Figure 4 but constructed from the irregular data of concentrations of some substance at each time and its delays.

3.-MÉTODOS DE RESOLUCIÓN.-

La vida es como una nuez.
No puede cascarse entre
Almohadones de plumas.
(Arthur Miller)

➡**1.-Integración directa**

Siempre que sea posible invertir el operador diferencial.

Ej. Ley de Newton para la posicion x(t) de una particula puntual de masa M sometida a la actuacion de una fuerza como la gravedad constante g:

$M\, d^2x(t)/t^2 = -M\, g$ (8)

La integral: $dx(t) = -g\, t + C_1$ (9)

Integrando otra vez: $x(t) = -1/2\, g\, t^2 + C_1\, t + C_2$ (10)

Con C_1 y C_2 constantes indefinidas hasta que restrinjamos nuestro problema a cumplir con unas condiciones iniciales velocidad y posicion en el tiempo t=0.

➡**Constantes del movimiento o integrales primeras: leyes de conservación**.
A veces, las ecuaciones diferenciales no pueden ser integradas mediante funciones conocidas. Sin embargo, y aun cuando no puedan obtenerse soluciones completas, a veces se pueden encontrar integrales primeras de las ecuaciones, es decir relaciones entre las variables, sus derivadas primeras y el tiempo, y cuya derivada como conjunto es igual a cero, es decir son constantes del movimiento que, como **la energía, el momento angular**, etc., lo serán en función de cada problema concreto, y que nos permitirán integrar al menos parcialmente las ecuaciones diferenciales. El interés de estas integrales primeras radica en que nos dan una información de primer orden desde el punto de vista de su significado físico.

➡Ej. La **ecuacion del movimiento para una particula** de masa m en coordenadas polares r,θ y sometida a una fuerza central f(r) = d/dr V(r) :

$$mr'' - mr\theta'^2 = d/dr\ V(r) \qquad (11)$$

con r'' indicando la derivada segunda respecto del tiempo.

➡ Puede ser reducida mediante el aprovechamiento de la **simetria esferica** del problema, que implica que la función $mr^2\theta'$ tiene derivada cero respecto del tiempo, es decir es una constante del movimiento o integral primera llamada módulo del momento angular l; con lo que la ecuación (11) se convierte en una ecuación diferencial con una sola variable en lugar de dos:

$$mr'' - l^2/(mr^3) = d/dr\ V(r) \qquad (12)$$

➡ecuación que podrá ser resuelta empleando otra constante del movimiento del problema, la energia total $E = ½\, m(r'^2 + r^2\theta'^2) + V(r)$, junto con los valores iniciales (t=0) de las variables r_0, θ_0; obteniendo

$$t = \int_{r0}^{r} dr / \{2/m[(E - V - l^2/(2mr^2)]\}^{1/2} \qquad (13)$$

$$\theta = l \int_0^t dt / [mr^2(t)] + \theta_0 \qquad (14)$$

➡**Variables separables**.
Cuando en una ecuación diferencial en **derivadas parciales** aparecen derivadas respecto de distintas variables, es muy útil intentar separar la ecuación en varias ecuaciones diferenciales ordinarias suponiendo que la función a buscar es expresable como un producto de varias funciones cada una de las cuales depende únicamente de una variable. Si es posible o no en un problema dado, la solución nos lo dirá.

➡Ej. **Ec. de Schrodinger** para la función de onda de una particula en Mecánica Cuántica

$$-\hbar^2/(2m)\ \partial^2/\partial x^2\ \Psi(x,t) + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\ \partial/\partial t\ \Psi(x,t) \qquad (15)$$

suponiendo $\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$, tenemos al sustituir

$$1/\psi(x)\ [-\hbar^2/(2m)\ d^2/dx^2\ \psi(x) + V(x)\psi(x)] = i\hbar\ 1/\varphi(t)\ d/dt\ \varphi(t) \qquad (16)$$

➡Y como el miembro de la izquierda solo depende de la variable **x** y el de la derecha solo de **t**, solo pueden tener en comun una **constante** (consideraciones fisicas de las soluciones nos llevan a asignar esa constante a la energia total E), con lo que tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias fáciles de resolver:

$$1/\psi(x)\ [-\hbar^2/(2m)\ d^2/dx^2\ \psi(x) + V(x)\psi(x)] = E \qquad (17)$$

$$i\hbar\ 1/\varphi(t)\ d/dt\ \varphi(t) = E \qquad (18)$$

en concreto, la última tiene por solución $\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}$.

➡**Ligaduras: Método de los multiplicadores de Lagrange**.
En muchas ocasiones, en un modelo necesitamos encontrar el valor **máximo o mínimo** de alguna variable que a su vez viene obligada a cumplir un conjunto de condiciones (ligaduras). Así, por ejemplo podemos querer encontrar el lugar geometrico de los puntos del espacio (x,y,z) donde la variabe temperatura T(x,y,z) se hace máxima, pero al mismo tiempo nuestro problema nos obliga a movernos a lo largo de una curva dada en forma implicita como intersección de dos superficies $g_1(x,y,z)=0$ y $g_2(x,y,z)=0$.

➡ Si fuera posible encontrar las **formas explicitas**, podriamos sustituir ambas expresiones en la de T y derivar, pero muchas veces **no** lo es. Asi empleamos el resultado encontrado por Lagrange que nos dice que si el punto (x,y,z) hace máximo (o mínimo) la función T, también lo hace para la combinación lineal $F(x,y,z) = T(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z)$, donde los coeficientes λ_1 y λ_2 se llaman multiplicadores de Lagrange.

➡ Así tenemos que resolver el sistema formado por 5 ecuaciones (las 3 derivadas de F respecto de cada variable x,y,z más las2 condiciones $g_1(x,y,z)=0$ y $g_2(x,y,z)=0$) con 5 incógnitas $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$. Dado que este criterio es una **condición sólo necesaria**, la solución no asegura que sea máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas, por lo que hay que emplear consideraciones de tipo fisico o geométrico para asegurarlo.

➡**2.-Transformadas integrales:** Funciones de Green, transformada de Laplace, transf. de Fourier, etc.

Una ecuación diferencial puede ser escrita en forma compacta $L(\mathbf{x})\ u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, donde $L(\mathbf{x})$ representa un operador diferencial lineal (Ej. bidimensional $\Delta(\mathbf{x}) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$), $u(\mathbf{x})$ la función incógnita y $f(\mathbf{x})$ una función dada.

➡Despejando tenemos $u(\mathbf{x}) = L^{-1}(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})$. Para realizar el cálculo definimos una función $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ asociada al operador $L(\mathbf{x})$, llamada **función de Green**, tal que

$$u(\mathbf{x}) = L^{-1}(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x},\mathbf{x}')f(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \qquad (19)$$

(Nota: si $G(x,x')$ toma unas formas especiales, tenemos las llamadas **transformadas integrales** de Fourier, Laplace, Abel, etc.)

$$L(\mathbf{x})\ G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (20)$$

con $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ siendo la función **Delta de Dirac**.

➡**Ejemplo 1**: $L = \Delta$, $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-1/(2\ n)\ \ln r$, con $r=[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}$.

➡**Ejemplo 2**: encontrar la velocidad de una partícula que está sometida a una fuerza F(t) aplicada sólo en el instante t' (impulso) y frenada por otra fuerza viscosa λv(t), la ecuación del movimiento

$$m\ dv(t)/dt + \lambda v(t) = F(t) \qquad (21)$$

, la función de Green $G(t,t')=1/m\ e^{-\lambda(t-t')/m}$, con lo que la solución del problema es

$$v(t) = \int_0^t 1/m\ e^{-\lambda(t-t')/m}\ F(t')\ dt' \qquad (22)$$

➡Ej. de cálculo de $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$:
Consideremos la ec. de Helmholtz tridimensional $[\Delta(\mathbf{x}) + k^2]\ u(\mathbf{x}) = 0$, (23)

con lo que $L(\mathbf{x}) = \Delta(\mathbf{x}) + k^2$. Si aplicamos la **transformada de Fourier** $(G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=1/(2\pi)^3 e^{-i\mathbf{kx}'})$ a la ecuación (20) tenemos

$$(q^2-k^2)\ G^T(\mathbf{q}) = 1/\ (2\pi)^3 \qquad (24)$$

, donde hemos hecho el cambio de variable $\mathbf{r}=\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ y la transformada de Fourier es $u^T(\mathbf{q}) = 1/\ (2\pi)^3 \int u(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{qr}} d\mathbf{r}$, y donde $q^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2$. Como $G^T(\mathbf{q}) = [(2\ \pi)^3(q^2-k^2)]^{-1}$. E invirtiendo (24) tenemos lo que buscamos $G(\mathbf{r}) = 1/(4\pi R)\ e^{ikR}$, con R siendo el módulo de **r**.

➡Ej. **Transformada de Laplace**: $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=e^{-\mathbf{xx}'}$
Resolvamos la ecuación $y'' + y = \text{sent}$, con las condiciones iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=1$
Aplicando la transformada de Laplace tenemos

$$x'^2Y(x') - x'y(0) - y'(0) + Y(x') = 2/(x'^2+4) \qquad (25)$$

, despejando y sustituyendo los valores de las condiciones iniciales tenemos

$$Y(x') = (5/3)/(x'^2+1) - (2/3)/(x'^2+4) \qquad (26)$$

, e invirtiendo la transformada tenemos la solución: y= 5/3 sent − 1/3 sen2t.

3.-Integracion en tiempos propios

En ocasiones las causas o fuerzas que intervienen en la dinámina de un proceso fisico tienen expresiones funcionales que sólo son válidas durante intervalos de **tiempo distintos para cada causa** (tiempos propios de relajación, con lo que al invertir las ecuaciones diferenciales (al integrar) no podemos usar el mismo paso de tiempo, sino que tenemos que hacer la transformación pertinente.

$d/dt\ F(x) = f(x) + g(x)$ (27)

$F(x) = \int f(x)\, dt_1 + \int g(x)\, dt_2$ (28)

➡Y para uniformizar debemos hacer las transformaciones oportunas:

$F(x) = \int f(x)\, v(x)/v_1(x)\, dt + \int g(x)\, v(x)/v_2(x)\, dt$ (29)

Siendo v_1 y v_2 las velocidades características de cada una de las dos causas cuando éstas actúan por separado.

➡4.-Aproximaciones analíticas (polinomios).

Dado que la **integración de polinomios es inmediata**, es útil sustituir las funciones o tablas de datos por polinomios que aproximan el comportamiento de éstas. Sólo hay que tener cuidado de que las aproximaciones polinómicas elegidas converjan para que sean cuantificables. Así tenemos desde los polinomios más sencillos de **Taylor**, hasta los **armónicos esféricos** ó los polinomios de **Laguerre, Jacobi, Bessel, Hermite**, etc., que son en sí mismos soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales (para saber más de estos polinomios ver Abramowitz y Stegun 1972).

➡Ej. **Polinomio de Taylor**: $F(x) = F(x_0) + \Sigma_{k=1}^{n-1} F^{(k)}(x_0)/k!\ (x-x_0)^k + F^{(n)}(x_1)/n!\ (x-x_0)^n$ (30)
válida cuando existen unos ciertos valores x_1 y n. La idea consiste en sustituir la función F(x), que no es posible integrar analíticamente, por una serie de potencias cuyas integrales son inmediatas:

$\int F(x)\, dx = \int F(x_0) + \Sigma_{k=1}^{n-1} F^{(k)}(x_0)/k!\ (x-x_0)^k + F^{(n)}(x_1)/n!\ (x-x_0)^n\, dx$ (31)

➡5.-Métodos perturbativos: linearización, matrices.

Dado un sistema de varias ecuaciones diferenciales **acopladas**

$\partial^n f_1(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda),\ 1 \le j \le m$
.....
$\partial^n f_m(x,v,t,\lambda) = \Sigma F_i(f_j,x,v,t,\lambda)$ (32)

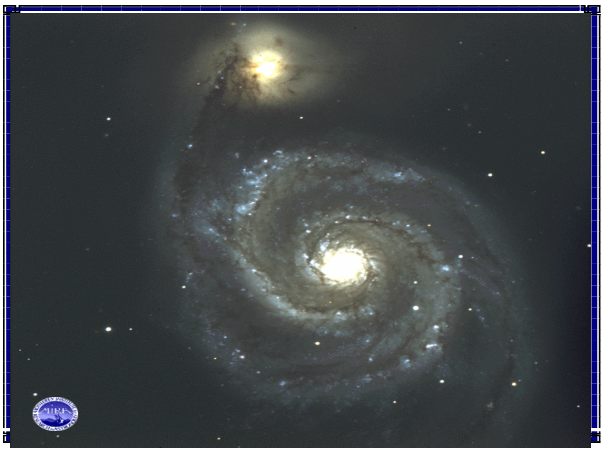
el método perturbativo consiste en perturbar las soluciones añadiéndolas unas **variaciones infinitesimales** $f_1 + \delta f_1$, ..., $f_m + \delta f_m$, para tras sustituir en el sistema y operar, **despreciar los términos de orden superior a 2**, es decir, las potencias superiores a 1 de las variaciones infinitesimales, así como eliminar los términos sin variaciones, ya que cumplen las ecuaciones del sistema sin variar.

➡ Así, lo que nos queda es un sistema de **ecuaciones lineales** en las variaciones δf_m; sistema que podemos resolver mediante el **álgebra de matrices** obligando a que el determinante de la matriz de los coeficientes sea igual a cero para que la solución sea distinta de la nula si, como ocurre en numerosas ocasiones, el sistema linealizado se torna homogéneo.

➡Ej. $\partial/\partial t\ f = f^2 + g$
$\partial/\partial t\ g = g^2 + f$ (33)

variando infinitesimalmente:

$\partial/\partial t\ (f+\delta f) = (f+\delta f)^2 + g+\delta g$
$\partial/\partial t\ (g+\delta g) = (g+\delta g)^2 + f+\delta f$ (34)



➡Asumiendo que tanto δf como δg se comportan como una **fluctuación** en forma de onda $Ae^{i(wt-kx)}$ y $Be^{i(wt-kx)}$, respectivamente, siendo A y B las amplitudes de la perturbación, tenemos el sistema:

$(iw-2f)\ A - B = 0$
$A + (iw-2g)\ B = 0$ (35)

Con lo que para que tenga soluciones distintas de la trivial **(iw-2f)(iw-2g) + 1 = 0**. Con lo que, aunque no disponemos de la solución completa, si tenemos una relación entre f,g y la frecuencia de las oscilaciones en el medio físico representado por el sistema de ecuaciones.

➡6.-Cálculo numérico:

En numerosas ocasiones, las ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales que se nos plantean, **no nos permiten una integración analítica**, bien porque las funciones involucradas son complicadas o bien porque ni siquiera son conocidas las expresiones analíticas de esas funciones, sino que lo que conocemos son tablas numéricas de datos. En estos casos lo más habitual y conveniente, dado que cada vez disponemos de más facilidades para acceder a **ordenadores** más potentes, es construir **programas** de ordenador que repitan un número muy grande de veces el conjunto de operaciones aritméticas incluidas en el sistema de ecuaciones y en el **orden** que éste establece, partiendo de unos valores iniciales de las variables y tomando unos incrementos convenientes para **optimizar** el cálculo. Para ello disponemos de un conjunto de técnicas cada vez más refinadas que llamamos métodos numéricos:

➡**Euler ó método de las tangentes**:
Consiste en discretizar las derivadas linealmente. Así, si tenemos la ecuación y' = F(x,y) con la condición $y(x_0) = y_0$, iremos calculando los valores de la incógnita paso a paso:

$y_1 = y_0 + F(x_0,y_0)\ (x_1-x_0),\ldots,y_{n+1} = y_n + F(x_n,y_n)\ (x_{n+1}-x_n)$ (36)

➡El error cometido mediante esta aproximación lineal a la curva real y = f(x) es menor cuanto menor sea el tamaño del intervalo o paso $x_{n+1}-x_n$ elegido.

➡**Runge-Kutta**:
Toma valores promedios y pesados de la función, en diferentes puntos del intervalo $[x_n,x_{n+1}]$.
Dada la misma ecuación como ejemplo, la solución paso a paso:

$y_{n+1} = y_n + h/6\ (k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})$ (36)

$k_{n1} = F(x_n,y_n)$
$k_{n2} = F(x_n+h/2, y_n+hk_{n1}/2)$
$k_{n3} = F(x_n+h/2, y_n+hk_{n2}/2)$ (37)
$k_{n4} = F(x_n+h, y_n+hk_{n3})$

➡**Monte Carlo:**
Este es un método muy usado últimamente, porque compensa los errores de cálculo al tomar valores aleatorios de la partición del intervalo en el que integramos.

y' = f(x) (38)

$y = \int_a^b f(x)\, dx$ (39)

con un cambio de variable siempre podemos $y = \int_0^1 f(x')\, dx'$ (40)
mediante este método en su forma más elemental obtenemos
$y = 1/n\ \Sigma_{i=1}^{n} f(\xi_i)$, con ξ_i siendo números aleatorios pertenecientes al intervalo [0,1). Hay otras variantes más sofisticadas del método (ver por ejemplo Riley, Hobson and Bence 2002).

➡Dado que los programas de ordenador son métodos aproximados de la solución analítica, es crucial antes de utilizar un programa su **calibración**, es decir, hacerlo correr para un conjunto de datos conocidos del comportamiento real del sistema que vamos a modelar en condiciones que luego serán distintas, y **comparar** la evolución de las soluciones numéricas con los datos de la tabla, con el fin de tener control sobre los errores.

➡Lo **errores** provienen de 3 causas:
a) el método ó fórmula que aproxima pero **no** es exactamente igual a la forma de **la función solución** del problema,
b) el error cometido en la medida de los **valores iniciales** ó de entrada en el cálculo,
c) las **limitaciones físicas** del ordenador que hacen que no pueda tomar en cada cálculo que realiza un número infinito de decimales para los números que como los irracionales lo necesitarían.

➡7.-Cálculo de errores:

Aunque existen muchas formas de calcular errores, aquí vamos a presentar un caso concreto con el fin de hacerlo más comprensible: el del error que se comete al construir un modelo tomando la **aceleración de la gravedad** como una constante, es decir, que no varía con la distancia al objeto masivo que la produce.

➡Así, supongamos que queremos calcular el **tiempo de caída libre** de un objeto situado inicialmente a una altura **z=h** sobre la superficie de un objeto masivo y esférico (planeta, estrella, cúmulo de estrellas, etc.) de radio **R** sabiendo que la aceleración producida por el objeto masivo en su superficie es **g**. Si no tenemos en cuenta el hecho de que esta aceleración varía al alejarnos de la superficie, el tiempo de caida será el que se obtiene de despejar la variable **t** en la fórmula obtenida tras la doble integración de la ecuación del movimiento $\mathbf{d^2z/dt^2 = -g}$ **,** es decir:

$\mathbf{t_0 = (2h/g)^{1/2}}$ (41)

➡Ahora vamos a hacer el cálculo correcto con la ecuación completa del moviento

$$d^2z/dt^2 = -g/(1+ z/R)^2 \qquad (42)$$

si aproximamos para $z \ll R$ podemos linearizar la ecuación haciendo un desarrollo en serie de potencias de z/R y así resolverla, obteniendo

$$d^2z/dt^2 = -g(1-2\, z/R) \qquad (43)$$

➡cuya solución con las condiciones iniciales $z=h$ y $dz/dt=0$ en $t=0$, es

$$(2z-R)/(2h-R) = \cosh t(2g/R)^{1/2} \qquad (44)$$

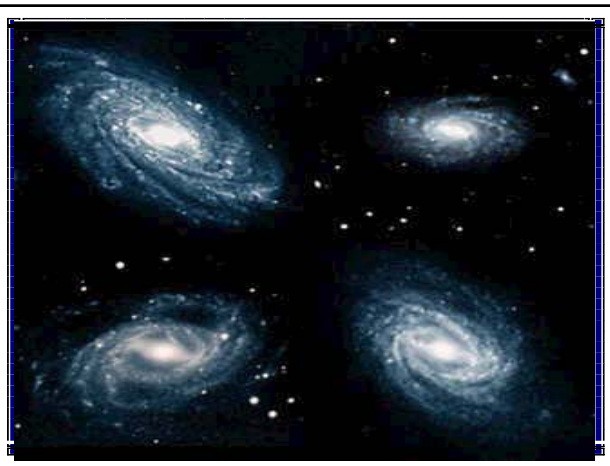
y para $z=0$ tendremos el tiempo τ de caida libre hasta la superficie, de

$$R/(R-2h) = \cosh \tau(2g/R)^{1/2} \qquad (45)$$

➡Y dado que hemos supesto que $h \ll R$, $R/(R-2h)$ es muy próximo a 1, por lo que podemos desarrollar el **cosh** en serie de potencias y linearizar. Así obtenemos un valor para τ que nos permite comparar con t_0 y calcular el error relativo

$$\varepsilon = (\tau - t_0)/ t_0 = h/R \qquad (46)$$

cuantificando para el ejemplo de un objeto cayendo hacia la superficie de la Tierra ($R \cong 10^7$ m), un objeto cayendo desde una altura de 1 km nos da un error de 0.01%.



➡**4.-APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS A ALGUNOS CASOS CONCRETOS.**

"Se le dijo... y lo olvidó,
lo vió... y lo creyó,
lo hizo... y lo comprendió"
(Confucio, S. VI a.c.)

➡**A)Dinámica de un disco galáctico en rotación e inmerso en un campo magnético:**
Modelemos, siguiendo a **Chandrasekhar** (1954), la dinámica de un disco galáctico simplificándolo como un medio extenso homogéneo y de conductividad eléctrica infinita en rotación con velocidad circular $\mathbf{\Omega}$, inmerso en un campo magnético uniforme de intensidad $\mathbf{H}$.

➡Así, el sistema de ecuaciones diferenciales que muestra el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el sistema, las ecuaciones de **Maxwell** que rigen la evolución del campo magnético, y las ecuaciones de conservación de la masa y la del campo gravitatorio, para las fluctuaciones de densidad $\delta\rho$, de presión δp, del campo magnético $\delta\mathbf{H}$, y del potencial gravitacional δV, son:

$$\begin{aligned}
&\rho\partial/\partial t\, \mathbf{u} = 1/(4\pi)\, \mathrm{rot}\, \delta\mathbf{H}\times\mathbf{H} + 2\rho\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega} - \mathrm{grad}\, \delta p + \rho\, \mathrm{grad}\, \delta V\\
&\partial/\partial t\, \delta\mathbf{H} = \mathrm{rot}\, \mathbf{u}\times\mathbf{H}\\
&\mathrm{div}\, \delta\mathbf{H} = 0 \qquad\qquad (47)\\
&\partial/\partial t\, \delta\rho = -\rho\, \mathrm{div}\, \mathbf{u}\\
&\nabla^2 \delta V = -4\pi G\, \delta\rho
\end{aligned}$$

➡donde $\mathbf{u}$ representa el vector velocidad lineal. Asumimos que los cambios en la presión y en la densidad tienen lugar adiabáticamente, es decir $\delta p = c^2\, \delta\rho$, con c siendo la velocidad del sonido en el medio. Elegimos la orientación adecuada para el sistema de referencia, de forma que $\mathbf{H} = (0,H_y,H_z)$ y $\mathbf{\Omega} = (\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$.

➡Buscando soluciones del sistema que sean **fluctuaciones en forma de onda** que se propaga en la dirección z, tenemos que en los gradientes, sólo $\partial/\partial z$ es distinto de cero; y además de la condición de div $\delta\mathbf{H} = 0$ se tiene que $\delta H_z = 0$. Así, el sistema se transforma en un **sistema de ecuaciones lineales homogéneo** para las amplitudes de las distintas magnitudes que fluctúan como ondas ($e^{i(wt-kz)}$) propagándose en la dirección del eje z, sistema que en forma matricial sería

$$\begin{pmatrix}
w & 0 & kH_z & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & w & 0 & kH_z & -kH_y & 0 & 0\\
\frac{kH_z}{4\pi\rho} & 0 & w & 2i\Omega_z & -2i\Omega_y & 0 & 0\\
0 & \frac{-kH_z}{4\pi\rho} & -2i\Omega_z & w & 2i\Omega_x & 0 & 0\\
0 & \frac{-kH_y}{4\pi\rho} & 2i\Omega_y & -2i\Omega_x & w & \frac{-c^2k}{\rho} & k\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\rho k & w & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi G & -k^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\delta H_x\\ \delta H_y\\ u_x\\ u_y\\ u_z\\ \delta\rho\\ \delta V
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0
\end{pmatrix}
\qquad (48)$$

➡Obligando a que cumpla la condición de tener alguna **solución distinta de la trivial**, tenemos que el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser igual a cero, lo que nos ofrece una ecuación del tipo $w^6+Aw^4+Bw^2+C=0$, cuyas soluciones posibles nos dicen que habrá tres modos (w_1,w_2,w_3) en los que una onda se propaga por ese medio, y tal que

$$w_1^2+w_2^2+w_3^2 = 4\Omega^2+2\Omega_A^2+ \Omega_B^2+ \Omega_J^2, \quad y \quad w_1w_2w_3 = \Omega_A^2\, \Omega_J \qquad (49)$$

➡con $\Omega_J^2 = c^2k^2-4\pi G\rho$. Así, si Ω_J es imaginaria, entonces w_1,w_2,w_3 también lo serán, con lo que la propagación se torna inestable (deja de ser periódica para hacerse exponencial).

➡Así obtenemos la famosa condición de **Jeans** para que un sistema gaseoso se torne gravitacionalmente inestable ($\Omega_J^2 < 0$), es decir que $c^2k^2 < 4\pi G\rho$; que es la condición esencial para que una nube de gas colapse gravitacionalmente y de lugar al **nacimiento de las estrellas en una galaxia**.

➡**B)Evolución química de un disco galáctico:**
Sabemos que los diferentes elementos químicos (C,N,O,Fe,etc.) se forman en el interior de las estrellas a partir del H a través de **reacciones nucleares** (comprobado en laboratorio terrestre), además también sabemos que otros como el Li se formaron durante los primeros segundos de vida del Universo durante el **Big Bang** y todavía se están formando y destruyendo en el medio interestelar (ver Casuso and Beckman 2000).

➡***1.-Modelo analítico de producción de Li***:
Suponiendo que la producción actual de Li está asociada a la de **rayos cósmicos** de baja energía por estrellas de masa inferior a $3M_\bullet$ tenemos

$$d/dt\, Li(t) \propto e^{kt}, \qquad (50)$$

e integrando y usando el ajuste observacional $[Fe/H] \approx -(1-t/15)^2$, tenemos

$$Li \approx k_1(1+e^{k'[1-\sqrt{(-[Fe/H])}]}) \qquad (51)$$

, donde k_1 y k' son constantes de integración.

➡Comparando con observaciones:

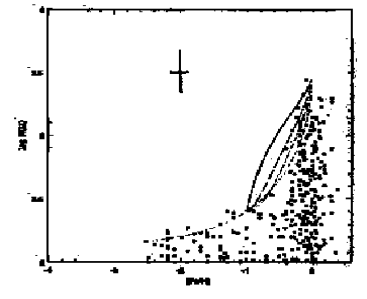


FIG. 1.—Normalized plots based on models satisfying analytical approximations to Li production rates and their evolution with Fe, to illustrate how we were selected scenarios for the evolution of Li. Models are shown with the form of the observations (the upper envelope of the points in Fig. 1a) that adjust. Points are the data as in Fig. 1. All curves are from analytic approximations by sinusoidal functions with two free parameters which are constrained to match the data envelope at [Fe/H] = −1.0 (where the 7Li disk initiates) and at [Fe/H] = 0.0. Long-dashed line: from eq. (17). Solid line: from eq. (6) and (8), which give a very similar result. Dashed line: from eq. (14). Dotted line: from eq. (12).

➡*2.-Método numérico de producción de Li:*
Aquí tenemos en cuenta detalladamente cada uno de los procesos (**reacciones químicas** que sabemos de experimentos en laboratorio que pueden dar lugar a ese elemento químico). Primero modelamos la **producción** de **He,C,N,O** y **Fe** en el interior de las estrellas para que tras su expulsión al medio interestelar por **explosiones SN** o por vientos estelares, puedan producirse las reacciones de estos elementos con los rayos cósmicos y producir **Li**.

➡Así, tendremos un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$d/dt\ g = -SFR(t) + E(t) \qquad (52)$$

donde **g** es la fracción de la masa total de la galaxia que permanece en forma de gas frente al resto que serán estrellas **SFR(t),** y **E(t)** es la fracción de masa de gas que llega como consecuencia de dos procesos: **expulsión de gas** por las estrellas durante toda su vida (vientos, explosiones supernovas), y la **llegada de nubes de gas** desde el exterior de la galaxia.

$$E(t) = \int_{mt}^{mu} SFR(t-t_m)IMF(m)R(m)\,dm + P(t) \qquad (53)$$

➡donde t_m es el **tiempo de vida** de una estrella de masa **m** (se coge de una tabla de un modelo teórico bien contrastado con las observaciones), **mt** es la masa de una estrella que tiene un tiempo de vida **t**, **mu** es la máxima masa admitida para una estrella (~100$M_\odot$), $SFR(t) \propto g$, $IMF(m) \propto m^{-2.35}$, **R(m)** y **P(t)** se toman de tablas de modelos teóricos contrastados. Y

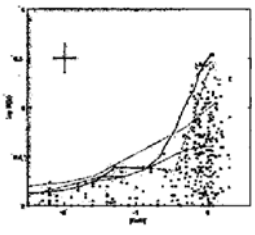
$$d/dt\ (gX_i) = \int_{mt}^{mu} SFR(t-t_m)IMF(m)\ \{Q_i(m)+X_i(t-t_m)[R(m)-Q_i(m)]-R(m)X_i(t)\}dm + $$
$$+P(t)[X_i'(t)-X_i(t)] \qquad (54)$$

➡con $Q_i(m)$ la producción de elemento químico **i** por parte de una estrella de masa **m** durante toda su vida (tabla), $X_i(t)$ la abundancia del elemento i en el medio interestelar, $X_i'(t)$ la abundancia del elemento **i** en las nubnes de gas exteriores.

➡Y por último la **producción de Li**

$$d/dt\ Li = \Sigma_j X_j(t)\ \Sigma_i \int F_i(E,t)\sigma_{ij}(E)\ dE \qquad (55)$$

donde $F_i(E,t) \propto (E+E_0)^{-\lambda}$ es el flujo de **rayos cósmicos**, con E_0 la energía del protón y **λ** toma distintos valores observacionales para los distintos rangos de energía; y $\sigma_{ij}(E)$ es la **probabilidad** de que tenga lugar cada reacción química **i+j⇒Li** (se toma de la observación en laboratorio). Mediante la **iteración** se va calculando ordenadamente, en cada paso de tiempo, cada magnitud de la que va a depender el cálculo de la siguiente magnitud, y así sucesivamente hasta llegar al tiempo actual.



➡C)Tratamiento diferencial del Proceso de formación de estrellas:

Partiendo de la misma ec. (52) para la formación de estrellas a partir del colapso gravitacional de las nubes de gas, y tomando **incrementos finitos de tiempo**

$$g_{n+1} = g_n + (-SFR_n + E_n)\ \Delta t \qquad (56)$$

adoptando $SFR_n = \mu_n g_n$, con $\mu_{n+1} = \delta\cdot\mu_n$, tenemos

$$SFR_{n+1} = SFR_n(1-\mu_n\Delta t)\delta(1+\Upsilon\Delta t SFR_n) \qquad (57)$$

Siendo $\Upsilon = 1 + P_n/\{SFR_n^2\Delta t[1/(\mu_n\Delta t)-1]\}$ (58)

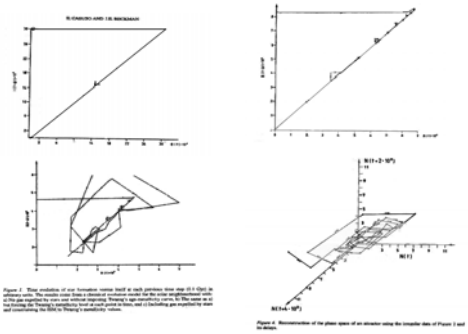
➡Y dado que sabemos que $\mu_n = 10^{-4}\ Myr^{-1}$, y que $\Delta t = 10^2\ Myr$, la ec. (57) queda

$$SFR_{n+1} = SFR_n\delta(1+\Upsilon\Delta t SFR_n) \qquad (59)$$

que es exactamente el mapa logístico (ver ec. (5)) en el caso en que $\Upsilon\Delta t = -1$, es decir cuando la cantidad de **gas que sale** expulsada de la galaxia es aproximadamente **el doble de la que suministran las estrellas**.

➡Así, esta **relación de recurrencia** nos indica que la **SFR** tendrá una **evolución regular**, seguida de una **duplicación del período** de repetición de los valores de SFR, hasta que el parámetro de control **δ** toma valores iguales o superiores a un **valor crítico** (3.8415... número de **Feigenbaum**) y la dinámica se torna **caótica** (impredecible), es decir, que iterando la ec. (59) la solución no se estabiliza.

➡De hecho, dos valores iniciales de SFR_0 tan **próximos** como queramos, tras su paso por (59) tendrán resultados completamente distintos, y su **diferencia crecerá exponencialmente con el tiempo** siguiendo la ley $\Delta = 4.317\ e^{0.013t}$ siendo 0.013 el llamado exponente de **Lyapunov** para este proceso (ver Casuso and Beckman 1997).



➡**D)Tratamiento integral del proceso de formación de estrellas:**

Ahora emplearé una técnica **integral proyectiva** que generaliza la proyección incremental básica

$$X(t+\Delta t) = X(t) + X'(t)\,\Delta t \qquad (60)$$

, donde es observado que en muchas ocasiones reales $X'(t) = k\,X(t)$, con lo que (60) queda $X'(t) = k/(1+k\Delta t)\,X(t+\Delta t)$, es decir, que la primera derivada de la magnitud **X** en un tiempo **t** es proporcional al valor de la magnitud en el tiempo futuro $t+\Delta t$.

➡Generalizamos para flexibilizar este supuesto y hacemos la hipótesis de que la **derivada fraccionaria de Lyouville** de orden **β** (que toma valores entre 0 y 1) es proporcional a la magnitud en el futuro, e invirtiendo tenemos

$$X(t_{pasado}) \propto I^{\beta}_{frac}\, X(t_{fut}) \qquad (61)$$

donde $X(t_{pasado})$ no representa una expresión analítica de una función sino un **distribución de valores reales** (no estadísticos).

➡ La ventaja de este método es que, mientras el método diferencial (ec. (60)) sólo contabiliza lo que ocurre en el tiempo **t** para proyectar hacia el $t+\Delta t$, aquí **proyectamos** los sucesos reales observados con un conjunto todo lo grande que queramos de valores de **X**. Usamos como herramienta la integral fraccionaria de Lyouville, que no es sino la transformada de **Abel**

$$I^{\beta}_{frac}\, X(x) = 1/\Phi(\beta) \int_a^x (x-t)^{\beta-1}\, X(t)\, dt \qquad (62)$$

➡El **método** consiste en calcular el valor de **β** a partir de la 2ª cuarta parte inicial de los **datos observacionales** de que disponemos para el sistema en estudio **proyectándolos** sobre la 1ª cuarta parte y **ajustando** hasta que el **error sea mínimo**. Y después proyectamos la primera mitad de los datos que ya hemos usado para **"predecir"** la segunda mitad, así comparamos y si la "predicción" es buena en comparación con los datos, podemos proyectar el conjunto total de los datos para predecir realmente el comportamiento futuro del sistema.

➡Esto se hace **invirtiendo** de nuevo la ec. (62) mediante el uso del **desarrollo en serie de polinomios ortogonales de Jacobi**, con coeficientes obtenidos por **integración numérica**, que **NO** sufre del grave problema de la **amplificación de los errores** inherente al tratamiento diferencial, con lo que la proyección es limpia (ver Casuso 1999 y Simonneau . Varela. Muñoz-Tuñon 1993).

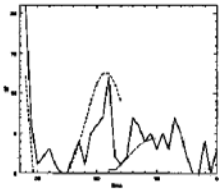


Fig. 3. Star formation rate in the solar neighborhood as a function of time. The solid line represents the data from Barry.[1] The dotted line is the fitting of the second quarter of the data using the first quarter of the data to obtain the best values of the two parameters "I" = 60 and α = 0.33 for further prediction. The dotted line is the prediction for the second half of the data using a Jacobian "I" = 60 (twice that of the observed data) and α = 0.33 and using the first half of data as input. Note the time scale is reversed: the zero is the current epoch, and time increases with stellar age.

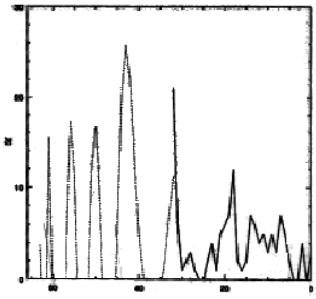


Fig. 4. The same as for Fig. 3, but predicting the unknown (yet not observed) future. Using I = 60 and α = 0.33 we predict (dotted line) the future behavior for the star formation process in the solar vicinity. The solid line is the complete data sample from Barry.[1] We use all the data as input.

➡**E)Formación de nubes de gas interestelar:**

1) Modelo analítico:

Para modelar el comportamiento de las nubes de gas en una galaxia utilizamos la ecuación **diferencial estocástica de Langevin** (ver Casuso and Beckman 2002)

$$d/dt\, u(t) = -\lambda\, u(t) + A(t) - q\, B\, u(t)/m \qquad (63)$$

donde **u(t)** es la velocidad, **q** la carga eléctrica y **m** la masa, de cada nube; **B** el campo magnético supuesto uniforme y constante, **λ** es el coeficiente del rozamiento que experimenta cada nube como consecuencia de su movimiento a través de las demás nubes, y **A(t)** es una fuerza aleatoria que modela el comportamiento **browniano** de las nubes de gas como consecuencia de las **múltiples colisiones** entre nubes, y que suponemos que fluctúa mucho más rápidamente que las variaciones de **u(t).**

➡ La ecuación (63) puede ser escrita

$$d/dt\, u(t) = -\beta u(t) + A(t) \qquad (64)$$

con $\beta = (\lambda + qB/m)$.Y dado que es una ecuación estocástica, su solución tendrá **carácter estadístico**, es decir, su solución vendrá dada por la función **distribución de probabilidad** de que una nube tenga un desplazamiento $x-x_0$ en una dirección dada, en un tiempo **t**, partiendo de unos valores iniciales $x=x_0$, $t=0$, $u(0)=0$: $W(x,t;x_0,u_0)$.Las **restricciones** a **W** serán:

a) $W(u,t;u_0) \Rightarrow \delta(u_x-u_{x,0})\ \delta(u_y-u_{y,0})\ \delta(u_z-u_{z,0})$ cuando $t \Rightarrow 0$, siendo $\delta(x)$ la función delta de Dirac.

b) $W(u,t;u_0) \Rightarrow [m/(2\Theta kT)]^{3/2} \exp[-mu^2/(2kT)]$ cuando $t \Rightarrow \infty$, que es una **maxwelliana** dada la naturaleza del problema de colisiones múltiples.

➡Dado que la **solución formal** de (64) es: $u-u_0e^{-\beta t} = e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta c} A(c)\, dc$, las propiedades estadísticas de la parte izquierda de la igualdad deben ser las mismas que las de la derecha, y como la izquierda tiende a **u(t)** cuando $t \Rightarrow \infty$, esto nos indica que la parte dercha debe tender hacia una **función de distribución maxwelliana** en el límite cuando $t \Rightarrow \infty$. Esto nos lleva (ver deducción completa en Chandrasekhar 1943) a que cuando $t \Theta \beta^{-1}$

$$W(x,t;x_0,u_0) = 1/(4\Theta Dt)^{1/2} \exp[-(x-x_0)^2/(4Dt)] \qquad (65)$$

Siendo $D = kT/(\lambda m+qB)$ un coeficiente de **difusión**.

➡De esta **solución**, de la asunción de que los **desplazamientos** antes de una colisión son **similares al tamaño de las nubes** que colisionan, y de la relación observacional entre los **tamaños y las masas** de las nubes tenemos:

$$d/dm\, N \propto m^{\alpha-1}\exp(-m^{2\alpha}/\sigma) \qquad (66)$$

con **α** y **σ** constantes a determinar por **ajuste con las observaciones**.

➡Esta es una distribución con una **masa característica**, es decir dependiente de escala. Pero, dado que las nubes de gas tienen su **movimiento geométricamente limitado** (por Ej. dentro de un brazo espiral galáctico), y esto implica (ver Chandrasekhar 1943) que la función de distribución final es la suma de una gausiana principal centrada en el origen (ec. (66)), y otras secundarias (efecto de la **reflexión** de las nubes) centradas en las las **"paredes"** de la región limitada. Así, el resultado es una tendencia general en forma de ley de potencias (**fractal**) salpicada de jorobas gausianas (más cuanto más varíe con el tiempo el tamaño de la región):

$$d/dm\ N \propto m^{\alpha-1}\{\exp(-m^{2\alpha}/\sigma) + \exp[-(M_c^{\alpha}-m^{\alpha})^2/\sigma] + ...\} \qquad (67)$$

con M_c la masa característica del tamaño de la región. Esto nos explica el **comportamiento dual** de las observaciones: **fractal global + dependencia de escala múltiple**.

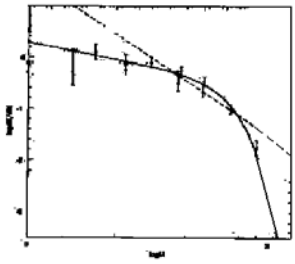


Fig 2. We have applied equation (7) to gas clumps in the Maddalena-Thaddeus molecular cloud, using data given by Williams et al 2000a (TMC). The 3x2 line is the result of regression (7), the dotted line is a (fractal) fit to intermediate masses, and the data are in histogram form with error bars.

➡Ej: La inversa de la gausiana:

$$X=[-\log(\sigma.\sqrt{2n.f_1(x)})]^{1/2}.\sigma.\sqrt{2}.\cos(2n.f_2(x))+X_0 \qquad (68)$$

Donde **X** es el valor de una **variable aleatoria** (temperatura por ejemplo) en un tiempo, X_0 el valor inicial, **σ** es la anchura de la gausiana, y $f_1(x)$, $f_2(x)$ son dos valores consecutivos aleatorios dados por la función **RAN**.

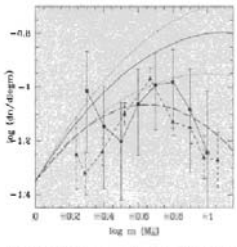


FIG. 2.—Disk mass function derived from the system II-based LF (*filled squares and solid line*) and the 2MT corrected MF (*triangles and thresholded line*) from Zheng et al. (2001). The solid line and corresponding dotted line display the lognormal form given by eq. (12) for single objects, as in Fig. 1, whereas the dashed line illustrates the lognormal form given by eq. (18).

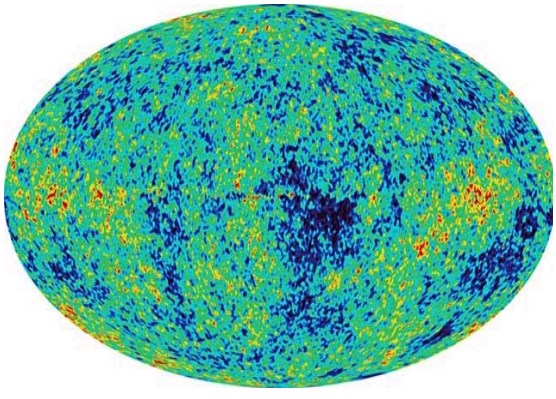
➡**2. Modelo numérico:**

Consideramos un conjunto grande (más de 1000) **nubes de gas interaccionando** mediante colisiones inelásticas (se pueden romper, rebotar y amalgamarse, según los valores de sus **temperaturas**, **densidades**, **velocidades relativas, masas** y **posiciones** dentro de un brazo espiral de una galaxia por ejemplo).

➡Para modelar su comportamiento se construye un **programa de ordenador** en el que en cada paso de tiempo (pueden llegar a 15000 pasos, uno por cada millón de años) se obliga a cada nube a **observar las leyes físicas de conservación** en una colisión: básicamente la **cantidad de movimiento** o momento lineal, así como los **cambios de masa** por dispersión del gas, por amalgamamiento o por rotura en varias nubes más pequeñas.

➡Para obtener **la distribución final** tras la evolución, es decir la distribución que compararemos con las observaciones, también se tiene en cuenta el hecho de que cuando se dan las **condiciones físicas adecuadas** (condiciones llamadas de **Jeans**) en una nube de gas (densidad, temperatura y masa críticas), se produce el **colapso gravitatorio** y se forman las estrellas, con lo que se produce un cambio de fase de gas a plasma estelar.

➡Pero todo esto se debe hacer **estadísticamente**, es decir, se asigna en cada paso del modelo unos valores de la **densidad**, **temperatura**, **velocidad** y **masa**, a cada nube de acuerdo con unos valores **aleatorios** suministrados por la función **RAN** del ordenador, pero valores que deben ser **filtrados** por unas funciones de distribución (**gausiana**, **ley de potencias-fractal**, **térmica**, o **constante**) que usamos como grado de libertad (nos quedaremos con aquella función de distribución que mejor prediga los valores observados, y cada una nos dá pistas sobre el estado físico del conjunto de nubes).



➡**5.-CONCLUSIONES.-**

En esta conferencia he pretendido dar una visión, necesariamente **somera pero de conjunto**, de las técnicas tanto de planteamiento como de resolución de los diversos **modelos matemáticos** que nos sirven para ir conociendo más y mejor los mecanismos que rigen los diversos **fenómenos físicos** que observamos más allá de los confines de nuestro sistema solar. Y lo hacemos siempre **contrastando** nuestros razonamientos **lógico-matemáticos (modelos)** con la ingente cantidad de nuevos **datos observacionales**. Este conocimiento de la física de los sistemas extraterrestres es la base para conocer el comportamiento de los sistemas físicos terrestres en condiciones diferentes de las del laboratorio: el **Universo** en su conjunto como un **gran laboratorio**.

➡**AGRADECIMIENTOS.-** Quiero agradecer a los Doctores Rodrigo Trujillo e Isabel Marrero por su apoyo y su confianza al invitarme a dar esta conferencia.

➡**REFERENCIAS:**

-Abramowitz, Stegun 1972
-Casuso,E., Beckman, J. E., 1997, Astr. Spac. Sci. 249, 257
-Casuso, E. 1999, IJMPA 14, 3239
-Casuso, E., Beckman, J. E., 2000, , PASP 112, 942
-Casuso, E., Beckman, J. E., 2002, , PASJ, 54, 405
-Chandrasekhar, 1943 , Reviews of Modern Physics 15,1
-Chandrasekhar, 1954, ApJ 119, 7
-Riley, K. F., Hobson, M. P., Bence, S. J., 2002, "Mathematical Methods for Physics and Engineering, Cambridge Univ. Press 2002
-Simonneau, Varela, Muñoz-Tuñon, 1993, JQSRT 49,149