La matemática borrosa en economía y gestión de empresas

Jaime Gil Aluja
Catedrático de Economía Financiera y Contabilidad
Departamento de Economía y Organización de Empresas, Universidad de Barcelona

De las leyes de la naturaleza a las leyes de la economía

Una y otra vez, un año tras otro, una generación después de otra, **los investigadores** que trabajan en el ámbito de la economía y gestión de empresas, han intentado encauzar sus esfuerzos hacia la búsqueda de un **cuerpo científico** capaz de comprender mejor, explicar más adecuadamente y tratar con rigor los fenómenos, cada vez más complejos, que pueblan el panorama de los estados, de las instituciones y de las empresas. Pretenden con ello proporcionar los cauces necesarios para hacer **menos hostil** la convivencia entre los miembros de nuestra sociedad y **más soportables** las batallas que se libran para conseguir ocupar un lugar en un **mundo mejor**.

Pero **cambiar** nuestro mundo exige, como paso previo, conocerlo en profundidad, descubrir, si existen, las **leyes** por las cuales se rige. Es necesario tomar conciencia de que nuestro minúsculo planeta es una brizna de polvo perdida en la inmensidad del universo. Desdeñar este importante aspecto conduce, inevitablemente, al despropósito investigador. La **ciencia económica** y, como consecuencia de ello, las **ciencias que estudian la empresa** han ido pulsando, prácticamente desde sus orígenes, las miradas con que los **físicos** observaban el universo, con la esperanza de encontrar aquellas señales mediante las cuales, de alguna manera, se pudieran estimar los futuros escenarios en los que se desenvolvería la actividad económico-financiera de las organizaciones. Fruto de esta actitud, se ha podido comprobar que a las **leyes de la naturaleza** le han seguido las **leyes económicas**. Pero también a los "vacíos" o "anomalías" en la naturaleza se han unido los "comportamientos anómalos" en los sistemas económicos. Y han surgido y se han agolpado en las mentes de tantos y tantos físicos las insistentes preguntas sobre el significado **de la realidad** y sobre la **existencia del tiempo**, al mismo tiempo que los economistas se interrogaban sobre la esencia de los **fenómenos económico-empresariales** y sobre el **funcionamiento** de las "fuerzas" que los provocan.

Tampoco nosotros hemos podido evitar que en los **recónditos vericuetos de nuestra mente** se agiten, en torbellino, unos **pensamientos** que buscan el impulso suficiente para emerger en **forma de palabras**, para, así, ser presentados en el escenario que proporcionan las ferias de la Ciencia. En esta espera, han acudido para prestar su ayuda los **recuerdos de la Historia**. Y desde su reposo oscuro, las enseñanzas recibidas, otrora casi olvidadas, se han convertido en letra escrita, recuperando, de esta manera, la memoria de **escondidos conocimientos.**

En el siglo XVI **Giordano Bruno** (12548-1600) escribía que *el universo es uno, infinito e inmóvil… **No tiene nada fuera de él**, entendiéndose que **es el todo**. No tiene **generación propia**, ya que no existe otra cosa que pueda buscar. No es **corruptible**, dado que no puede tornarse en otra cosa. No puede **disminuir o aumentar**, puesto que es infinito. No es **alterable**, por no haber nada externo que le pueda afectar*[1]. Esta idea, expresada así por **Bruno**, desteñiría el pensamiento científico occidental durante siglos y con ella cobraría intensidad la **concepción mecanicista del universo**.

Pero mientras nuestra civilización consideraba el universo como un mecanismo de relojería, pensando que las **ecuaciones deterministas** conducían siempre a un **comportamiento regular**, la filosofía oriental, y el hinduismo es un ejemplo, poseía una percepción más compleja. Así, en el pensamiento hindú el "cosmos" atraviesa tres etapas: creación (cuyo dios es Brahma), conservación (que tiene como dios Vishnú) y destrucción (con el dios Shiva). La conservación representa el **orden**, la destrucción el **desorden**. La distinción entre orden y desorden representa dos maneras de manifestar la divinidad: benevolencia, armonía por una parte; cólera, discordia por otra. Lo que **de ninguna forma** significa es la diferencia entre el bien y el mal. Los **matemáticos**, hoy, empiezan a considerar el orden y el desorden como dos manifestaciones diferentes de un **determinismo subyacente.** En otras palabras, un mismo fenómeno puede dar lugar a sistemas diferentes que proporcionan conjuntos de estados, unos "ordenados", otros "desordenados".

Esta actitud frente al funcionamiento del universo ha sido consecuencia de la observación de los movimientos que en él se producen y los intentos de resolver los problemas sobre ellos planteados. Ilustrativo es, en este sentido, el contenido del capítulo tercero de la memoria *El problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica* de **Jules Henri Poincaré** (1854-1912), en donde se esfuerza en poner de manifiesto la **existencia** de **soluciones periódicas** para las ecuaciones diferenciales. Parte del supuesto de que, en un determinado momento, un sistema se halla en un estado concreto y que en un momento posterior vuelve, de nuevo, al mismo estado. Todas las posiciones y velocidades son las mismas después que antes. Así, debe repetirse, una y otra vez, el movimiento que le ha conducido desde un estado de nuevo a sí mismo: **el movimiento es periódico.**

Para ejemplarizar esta idea, los físicos recurren a la sencilla imagen de un satélite artificial para el que se desea saber si posee una **órbita periódica**. Así, en lugar de seguir con un telescopio toda su trayectoria alrededor de la Tierra, lo enfocan de manera que "barra" un plano que vaya de norte a sur, desde un horizonte a otro, y que esté alineado con el centro de nuestro planeta. Toman nota del lugar donde pasa por primera vez, su rapidez y su dirección. Permanecen a la espera **sólo enfocando el plano**. **La periodicidad** exige que vuelva a pasar por el mismo punto, a la misma velocidad y en la misma dirección. Actuando de esta manera, en lugar de observar todos los estados, basta con mirar unos pocos. A esta superficie se la conoce como **sección de Poincaré**, quien la utilizó para **intentar** hallar **movimientos periódicos** de un cuerpo pequeño sujeto a las fuerzas de otros dos cuerpos con masas grandes, los cuales no se hallan afectados por él, por ejemplo una partícula

[1] G. Bruno: *De la causa*, Opera Italiane, quinto diálogo, I. Bari, 1907. [Citado por I. Leclerc: *The nature of physical existence*, George Allen and Unwin Ltd., Londres, 1972, p. 88].

interestelar y dos planetas. Los dos cuerpos grandes se mueven formando sendas elipses alrededor de su mutuo centro de gravedad, pero el cuerpo pequeño se mueve oscilante de un lado hacia otro sin que nada pueda hacer para cambiar su rumbo. Su comportamiento es complicado y anti-intuitivo. En efecto, el sistema inicia una actividad en un estado y sigue una curva. Cuando vuelve a la **sección de Poincaré** pasa por otro estado, luego por otro y por otro..., y así sucesivamente. El sistema, en definitiva, atraviesa la **sección de Poincaré**, por una **secuencia incierta** de puntos. **Poincaré** se hallaba ante un panorama que hoy llamaríamos caótico.

En nuestro ámbito del pensamiento se puede señalar que el **estudio del comportamiento de los sistemas económicos** ha sido realizado, con frecuencia y desde una cierta perspectiva, a partir de los procesos **markovianos** y **pseudomarkovianos**[2]. En base a ellos, los investigadores han podido encontrar algunas soluciones a los **problemas secuenciales**, los cuales nos ha llevado a considerar tres grandes grupos:

1. Cuando a partir de **datos ciertos** y de un **sistema conocido**, los resultados van a converger en el límite. Se trata de **sistemas ergódicos.**
2. Cuando bajo estas mismas circunstancias, el sistema no posee **una** solución única conocida, sino que tiene lugar una **oscilación regular de soluciones.** Nos hallamos ante **sistemas periódicos**.
3. Pero existen también sistemas en los cuales por muchos periodos de tiempo que transcurran, **no** somos capaces de hallar **regularidades**, sino **estados "desordenados".**

Nos sentimos **reconfortados** por la comodidad que proporciona el tratamiento de los dos primeros. Pero, en cambio, **nos desconcierta** la impotencia ante la falta de "normas" de **comportamiento regularizables**, en el último.

Este panorama, aún esbozado de manera grosera, puede explicar la ya señalada búsqueda de respuestas al significado de los dos elementos que subyacen en todo proceso de investigación: **la realidad y el tiempo.**

Breves consideraciones sobre la realidad y el tiempo

Al adentrarnos en esta senda surge la primera pregunta: ¿Son estos conceptos indisociables entre si? Normalmente, asociamos la **realidad** al momento actual. El pasado ha **dejado de ser** y el futuro **no es** todavía. Parece que nuestro pensamiento **se desplaza** de tal manera que la incertidumbre del mañana deja de serlo para convertirse en la realidad efímera de hoy, la cual deja paso, a su vez, a la certeza del pasado.

Pero esta **percepción vital** choca frontalmente con la **racionalidad** con que los físicos clásicos asumen el concepto de tiempo. Para ellos, existe un **"paisaje temporal"** en el cual se hallan todos los acontecimientos del pasado, del presente y del futuro. El tiempo no se

[2] A. Kaufmann, J. Gil Aluja: *Nuevas técnicas para la dirección estratégica*. Publicacions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 1991, pp. 45-66 y 129-133

mueve, se mueven los objetos en el tiempo. El tiempo no **transcurre**. Simplemente **es**. El **flujo del tiempo** es irreal, lo que es real es **el tiempo**.

Resulta reveladora, a este respecto, la correspondencia sostenida los últimos años de sus respectivas vidas, entre **Michele Besso** y **Albert Einstein**[3]. Ante la insistente pregunta del primero: *¿qué es el **tiempo**?, ¿qué es la **irreversibilidad**?*, el segundo le contesta: ***la irreversibilidad es una ilusión***. Con motivo del fallecimiento de **Besso**, **Einstein** escribe una carta a la hermana e hijo de aquél que contiene las siguientes palabras: ***Michelle** se me ha adelantado en dejar este extraño mundo. Carece de importancia. Para nosotros, físicos convencidos, la distinción entre pasado, presente y futuro es sólo una ilusión, por persistente que ésta sea*.

A pesar de tan rotundas aseveraciones, resulta difícil aceptar una naturaleza sin tiempo. **Homero**, en *La Ilíada*, coloca a **Aquiles** en una posición de búsqueda de algo **permanente e inmutable**, que sólo descubre tardíamente, al perder la vida. La obra se apoya, pues, en el problema del tiempo. Como contrapunto, en *La Odisea*, **Odiseo** puede elegir entre la **eterna juventud** y **la inmortalidad** (será siempre amante de Calipso) o el regreso a la humanidad, es decir **a la vejez y a la muerte**. Se decide por el **tiempo y el destino humano**, desdeñando la **eternidad y el destino de los dioses.** ¿Debemos nosotros elegir entre la **concepción atemporal** que presupone la alienación humana y la **aceptación del tiempo** que parece contravenir la racionalidad científica? Palpita una profunda incompatibilidad entre la **"razón clásica"** con una visión atemporal y "**nuestra propia existencia**" sazonada por el tiempo.

No se puede negar la validez de los conceptos **pasado** y **futuro**, aunque se sostenga la inexistencia del "flujo del tiempo". En economía y gestión de empresas existen multitud de fenómenos irreversibles. Diríamos que son mayoría. Existe, por tanto, **una asimetría de los objetos en el tiempo**, aunque no una **asimetría del tiempo**. En este sentido, por tanto, **la asimetría** es una **propiedad de los objetos**, no una propiedad del **tiempo.**

Para la física clásica, un reloj mide **duraciones entre acontecimientos**, no mide la velocidad con la que se pasa de un suceso a otro. Así, pues, el **transcurso del tiempo** depende de la persona que lo percibe. Se trata, entonces, de un concepto subjetivo.

En los estudios económicos y de gestión, el **transcurso del tiempo** se concibe como aquel proceso mediante el cual a medida que el reloj avanza, un instante va pasando y otro ocupa su lugar. Como reiteradamente hemos expuesto, en física, por el contrario, se acepta que son **igualmente reales** pasado, presente y futuro: la eternidad se halla presente en toda su infinita dimensión.

Si esto fuera así, nos podemos preguntar cómo ha llegado a arraigar en el subconsciente de economistas y gestores de empresas e instituciones, la idea de **transcurso del tiempo.** Quizás la respuesta se halle en los dos aspectos de la asimetría:

a) La **entropía de un sistema** se halla en relación directa con la información que recibe. Las nuevas sensaciones añaden información y, por tanto, aumentan la entropía. El almacenamiento de información es un proceso unidireccional, irreversible.

[3] P. Speziali (ed.): *Einstein-Besso. Correspondence*. Herman, París, 1972, p. 88.

b) El **principio de indeterminación** de **Heisenberg** implica un futuro no determinista. En la mecánica cuántica, un estado, hoy, **puede** dar lugar a varios estados en el futuro, sin que sea posible **predecir** cual de ellos se hará realidad.

Sea como fuere, resulta muy difícil arrancar del pensamiento económico la noción de **flujo temporal**, aun cuando, paradójicamente, la presencia de la **reversibilidad**, con toda su carga de lo **atemporal**, ha sido una frecuente constante en las aportaciones con más permanencia en el cuerpo científico de la economía.

Algunos antecedentes históricos del determinismo

Desde hace muchos siglos, la **idea de atemporalidad** ha ido imbuyendo las reflexiones de los pensadores, interesados en averiguar las regularidades del **funcionamiento del Cosmos**. Inicialmente, la **cosmología** se hallaba impregnada de la imaginación mitológica: se concebía la Tierra sostenida por un elefante, las estrellas colgando de cuerdas que se apagaban durante el día, el dios Sol conduciendo un carruaje a través del espacio. A pesar de ello, los filósofos griegos fueron capaces de **calcular** con gran precisión los **movimientos de los planetas**, aun cuando desconocían las "leyes" que rigen los más elementales fenómenos de nuestro entorno. En este sentido, sabemos que **Tales de Mileto** (624 a.C. – 546 a.C.) pudo estimar, con un reducido margen de error, la fecha de un eclipse de Sol. Sabemos que **Pitágoras introdujo las matemáticas,** aun considerando el significado mágico de los números. Que **Platón** suponía que la Tierra era el centro del universo con unas esferas huecas girando a su alrededor con una regularidad matemática. Que **Eudoxo** realizó una descripción matemática en la que los planetas estaban montados sobre veintiséis esferas concéntricas, cada una de las cuales giraba alrededor de un eje sostenido por la más próxima. Que, más tarde, **Apolonio de Perga** (262 a.C. – 200 a.C.) ideó la teoría de los epiciclos, según la cual los planetas se movían en pequeños círculos cuyos centros giraban, a su vez, en círculos mayores. Pero el triunfo de la "matemática empírica" vino de la mano de **Claudio Tolomeo** (100 d.C. - 160 d.C.) con el perfeccionamiento de la concepción epicíclica, de tal manera que los epiciclos se ajustaban tanto a las observaciones reales que su sistema tuvo vigencia durante XV siglos.

Estas han sido algunas de las efemérides que han jalonado el inicio de los "conocimientos sagrados" de las **leyes de la naturaleza**, que describen el universo a partir de equilibrios estables. Se puede decir, pues, que el concepto de **leyes de la naturaleza**, bien representado por la metáfora "un mundo que funciona como un reloj", se pierde en la noche de los tiempos y se ha hallado profundamente arraigado en el pensamiento y obras de nuestros investigadores. Tanto es así, que, casi 1.500 años después, **Nicolás Copernico** (1473-1543) pone de manifiesto la existencia de un gran número de epiciclos idénticos y descubre que podían ser eliminados si se consideraba que la Tierra giraba alrededor del Sol. Con ello surge la **teoría heliocéntrica**, reduciéndose el número de epiciclos a treinta y uno. A pesar del devenir de los siglos, la idea de **leyes de la naturaleza,** con su carga mecanicista, continúa omnipresente en el horizonte investigador.

Johannes Kepler (1571-1630) emprende una revisión de los trabajos de **Copérnico** y formula su tan conocida **primera ley**[4], seguida de otras dos leyes, que se desprenden de la

[4] Su enunciado es el siguiente: *Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol.*

primera[5]. A pesar de su indudable originalidad, la teoría de **Kepler** constituye, únicamente, una formalización descriptiva (expresa lo que hacen los planetas), no explicativa.

Galileo Galilei (1564-1642) reduce sus investigaciones a unas pocas magnitudes básicas: tiempo, distancia, velocidad, aceleración, momento, masa e inercia. En lugar de buscar el **por qué** de los fenómenos se interroga sobre **cómo** acontecen los fenómenos. En su *Diálogo sobre los dos principales sistemas del mundo*, en donde expone su **teoría heliocéntrica**, establece **un sistema de ley natural** para los objetos celestes y **otro sistema** para los objetos de la tierra. Se trata, en cierto modo, de la reivindicación de la **dualidad.**

Isaac Newton (1642-1727) cambió definitivamente esta percepción con su búsqueda **de un código de leyes** que gobernara el movimiento de un cuerpo bajo **todas** las combinaciones de fuerzas. Realizó su planteamiento desde una perspectiva **geométrica**. En efecto, en una representación gráfica, mediante un sistema de coordenadas, la **variación de la velocidad** de un cuerpo en relación con el **tiempo** adopta la forma de una curva. De manera **geométrica** se observa que la distancia total recorrida es igual al **área** comprendida debajo de la curva. Así mismo, la velocidad es igual a la **pendiente de la tangente** de la curva que relaciona distancia y tiempo. El problema consistía, entonces, en cómo calcular estas áreas y tangentes. El propio **Newton**, por una parte y **Gottfried Leibniz** (1646-1716), por otra, dieron la solución, dividendo el tiempo en intervalos cada vez más pequeños. El **área** buscada era la resultante de sumar las áreas de un elevado número de estrechas bandas verticales. La pendiente de una **tangente** puede ser calculada considerando dos momentos del tiempo muy cercanos, haciendo que la diferencia entre ambos sea arbitrariamente muy pequeña. Sostenían que "en el límite" los errores de las sucesivas aproximaciones podían desaparecer. Estos métodos de cálculo se conocen, hoy, con las denominaciones **integración** y **diferenciación.** En los tres tomos de su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* **Newton** redujo todo **movimiento** a tres **leyes**[6]**,** presentadas en el primer volumen. Las leyes de **Newton** son **universales.** La órbita de Júpiter y la trayectoria de una bala de cañón son dos manifestaciones de la **misma ley. El universo es, de nuevo, único.**

Leonhard Euler (1707-1783) prestó especial atención a la dinámica de fluidos y estableció, entre otros, un sistema de ecuaciones en **derivadas parciales** para describir el movimiento de un fluido sin fricciones. La mecánica se basaba total y explícitamente en el cálculo: hallar las ecuaciones diferenciales, primero; resolverlas, después. Modelizó el fluido como un medio continuo, infinitivamente divisible, y describió su movimiento mediante variables continuas que dependían de la velocidad, densidad y presión de las partículas del fluido. Una década antes, **Jean Le Rond d'Alembert** (1717-1783), al analizar las vibraciones de una cuerda, establecía una ecuación diferencial que resultó ser una ecuación en derivadas parciales.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) reformula los hallazgos de **Euler,** que cristalizan en dos importantes ideas: **"el principio de la conservación de la energía"** y **"el establecimiento de las coordenadas generalizadas".**

[5] Se trata de las siguientes: *La órbita de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales; el cubo de la distancia entre el Sol y un planeta es proporcional al cuadrado del período de su órbita.*

[6] *Si no actúan fuerzas sobre un cuerpo, entonces éste o bien permanece en reposo o se mueve uniformemente en línea recta; su aceleración es proporcional a la fuerza que está actuando; a cualquier acción corresponde siempre una reacción igual y opuesta.*

a) La mecánica clásica considera dos formas de **energía**: la **energía potencial** y la **energía cinética**. Cuando cae un cuerpo, **al descender se acelera** (cambia energía potencial por energía cinética). La **energía total** no se altera, por lo que **la suma de ambas energías es siempre la misma**. De nuevo una **ley** venía a engrosar el acervo de la ciencia.
b) Las **coordenadas** son un artificio para **convertir la geometría en álgebra**, asociando un conjunto de números con cada punto. Existían varios sistemas de coordenadas. Lagrange empezó suponiendo un **sistema de coordenadas cualquiera**, hasta hallar las ecuaciones del movimiento en una forma que **no dependían** del sistema de coordenadas elegido.

William Rowan Hamilton (1805-1865) reformula de nuevo la dinámica, estableciendo que el estado de un sistema dinámico viene dado por un conjunto de **coordenadas de posición** (las de Lagrange) y un conjunto de **coordenadas de momento** (velocidades multiplicadas por la masa). La "energía total", definida en términos de estas posiciones y momentos, es una **cantidad única,** conocida hoy como **hamiltoniano del sistema**.

Así, año tras año, decenio tras decenio, siglo tras otro, las distintas ramas de la ciencia trataron sus problemas mediante **leyes matemáticas**. Fue a lo largo del siglo XVIII e inicios del XIX cuando se estableció la mayor parte de las más celebradas **leyes de la física matemática clásica**. Apareció, así, un paradigma de gran alcance: **"la naturaleza es modelizable mediante ecuaciones diferenciales"**. Pero si la modelización de los fenómenos físicos fue el gran éxito de este periodo, no lo fue tanto la resolución de las ecuaciones de los modelos. Como acostumbra a suceder, se hizo especial hincapié en los problemas con solución, relegando aquellos para los cuales ésta no era conocida. La **creencia** en que el **universo seguía leyes conocidas** era general. Modelos que funcionan como un reloj, aceptación de un universo que funciona como un reloj. Modelos deterministas, aceptación de un universo determinista.

Se llega así al convencimiento de que **la naturaleza obedece a un conjunto de leyes.** Las leyes, supuestamente conocidas, vienen expresadas mediante ecuaciones diferenciales. "Dado el estado de un sistema en un instante concreto, y conociendo **las leyes**, todo su movimiento futuro se halla determinado unívocamente".

Las leyes de comportamientos globales

Los hallazgos alcanzados a lo largo de tantos siglos han sido extraordinarios. Sin embargo, muchos fenómenos continuaban sin explicación. La matemática podía calcular el movimiento de un planeta. Con un número limitado de **leyes** se "podía" predecir el futuro del universo. Pero, en cambio, no existía explicación para fenómenos casi cotidianos en los cuales, si bien no era posible describir los comportamientos de todos sus componentes individualmente, sí era factible, en principio, hallar las regularidades en su **comportamiento global.** En general, si el comportamiento detallado de los grandes sistemas no era siquiera planteable, en cambio resultaba abordable **encontrar** leyes de su comportamiento en conjunto. La matemática que permitiría una solución venía de la mano de la "**teoría de la probabilidad**".

Ya en el siglo XVIII, los **astrónomos** y **matemáticos**, en sus cálculos sobre las órbitas de los cuerpos celestes, vieron que, en sus observaciones, los **errores** se agrupaban en torno a un valor promedio. De ahí que establecieran la llamada "ley del error". **Adolphe Quetelet** aplicó este instrumento a las medidas de objetos físicos y mentales de índole social (nacimientos, matrimonios, suicidios, delitos,…) en una obra, *Mecánica social*, cuyo titulo mostraba un deliberado paralelismo con la *Mecánica celeste* de **Laplace**. Sin embargo, no se pueden ocultar las **abismales diferencias** entre las **ciencias físicas** y las **ciencias sociales**. En las primeras, los fenómenos son normalmente repetibles en las mismas condiciones; en las segundas, los **efectos de una prueba modifican la situación** en la que se realizó, **sin posible reversibilidad**.

En los años 80 del siglo XIX, las **ciencias sociales** intentaron **sustituir** el **experimento controlado** de la física. Tres investigadores merecen nuestro interés: **Francis Galton** (1822-1911) en antropología, **Francis Isidro Edgeworth** (1845-1926) en economía y **Karl Pearson** en filosofía. Así, pues, partiendo del estudio de los errores en astronomía, las ciencias sociales desarrollan y utilizan instrumentos matemáticos para **conseguir regularidades** en comportamientos aleatorios. Posteriormente, la física recupera estos hallazgos para explicar, matemáticamente, sistemas físicos complejos cuyos movimientos no seguían leyes deterministas.

El físico **James Clerk Maxwell** (1831-1879), en 1873, propuso el empleo de la estadística en una sesión de la Sociedad Británica para el Desarrollo de la Ciencia. Entre otras, planteó la cuestión fundamental de la determinación de la distribución de la velocidad, aleatoriamente variable, de una molécula. La teoría cinética de los gases se había convertido en un área importante del conocimiento científico, y fue precisamente en la **física de los gases** en donde se produce el **encuentro entre el determinismo y la aleatoriedad**. El gas es una agregación de partículas cuyo movimiento individual obedece a leyes dinámicas deterministas. Un miligramo de gas contiene aproximadamente **cien trillones** de partículas. Si observamos la trayectoria de **unas pocas de ellas,** se verá que siguen una línea hasta que una choca con otra. Sus nuevas direcciones son determinables por las geometrías anteriores. Y así, sería posible describir sus movimientos. Pero cuando ya tendríamos **las leyes de su comportamiento**, una partícula exterior al grupo considerado vendría a **modificar** las **leyes deterministas** de su comportamiento. El **todo** parece comportarse de manera **aleatoria**. Los científicos de finales del siglo XIX sabían, ya, que un sistema determinista puede comportarse de manera "aparentemente" aleatoria, pero eran conscientes de que **la aleatoriedad era sólo aparente** y que aparecía en sistemas complejos. Estas explicaciones resultaban igualmente válidas en el campo de las **ciencias sociales**. Los mecanismos que regulan los fenómenos de un subsistema económico, por ejemplo, se ven normalmente perturbados por influencias externas, muchas veces inesperadas e incontrolables. De esta manera se habían perfilado **dos tipos de análisis**: el más antiguo, de gran precisión, basado en ecuaciones diferenciales capaces de **determinar** la evolución del universo y el entonces moderno, que trabajaba con cantidades globales **"promediadas"** de sistemas complejos.

La encrucijada geometrismo-darwinismo

No existe la menor duda de que algo importante estaba pugnando por emerger a la superficie de la actividad científica cuando aún destilaban las primeras esencias del **evolucionismo,** rica herencia del siglo XIX. Unas breves pinceladas deberían poder situarnos en el punto de arranque de una **nueva aventura**. Para ello recurriremos a **Darwin** y a **Clausius**.

En su fundamental obra ***El origen de las especies***, publicada en 1859, **Darwin** combina dos elementos: **fluctuaciones e irreversibilidad**. En efecto, sostiene que las **fluctuaciones** en las especies biológicas, gracias a la selección del medio, dan lugar a una evolución biológica **irreversible**. De la asociación entre **fluctuaciones** (que asimila a la idea de azar, diríamos nosotros incertidumbre) e **irreversibilidad** tiene lugar una **autoorganización** de sistemas con una creciente complejidad.

Por su parte, **Clausius** formula, en 1865, la **"ley de aumento de la entropía"**, con la correspondiente división entre procesos **reversibles** e **irreversibles**. Esta distinción se hace explícita en la **segunda ley** que postula la **existencia de una función**, **la entropía**[7], la cual, en un sistema aislado, aumenta cuando existen procesos irreversibles y se mantiene constante en presencia de procesos reversibles. Por lo tanto, la entropía alcanza un valor máximo cuando el sistema llega al equilibrio y acaba el proceso irreversible. El físico **Ludwing Boltzmann** (1844-1906) llegó a la conclusión de que la entropía S se halla ligada con la probabilidad P. En su tumba existe una lápida en la cual se grabó la fórmula:

$$S = k \cdot l_n P,$$

en la que k es una constante universal, a la que **Max Kart Erns Ludwig Planck** (1858-1947) asoció el nombre de **Boltzmann**.

Tanto en el caso de **Darwin** como en el de **Boltzmann**, azar y evolución se hallan estrechamente relacionados, pero el resultado de sus respectivas investigaciones conducen a conclusiones contrapuestas. En **Boltzmann**, la probabilidad llega a su **máximo** cuando se alcanza la **uniformidad**, mientras que en **Darwin** la evolución conduce a **nuevas estructuras autoorganizadas.**

En contraposición con estas perspectivas, el prototipo de la **física clásica** es la **mecánica del movimiento**, la descripción de trayectorias de carácter **reversible** y **determinista**, en donde la dirección del tiempo no juega papel alguno, en la cual no existe un lugar ni para el azar ni para la irreversibilidad. En definitiva, el universo constituye un **inmenso autómata.** En un cierto sentido, este panorama es el mismo que en la física cuántica.

La verdad es que, con independencia de la posición desde la cual tenga lugar el enfoque, el universo posee una estructura compleja. Como sostiene **Jacques Monod** en su obra *El azar y la necesidad*, la vida es un simple accidente en la historia de la naturaleza que, por un motivo no muy claro, es capaz de mantenerse. Es bien cierto que algunos fenómenos se pueden perfectamente describir mediante **ecuaciones deterministas** (movimiento de los planetas), pero, en cambio, otros comportan **procesos inciertos** o, en todo caso, **estocásticos** (desarrollos biológicos). Podría suceder que **la vida**, en lo que tiene de irreversibilidad, se hallara, también, inscrita en las **leyes generales** desde el momento primigenio del Big-Bang. Pero la ciencia, de tanto **buscar** las **generalidades**, las **simetrías** y las **leyes**, ha encontrado lo **mutable**, lo **temporal** y lo **complejo**.

[7] La palabra entropía procede del griego y tiene como significado "evolución".

En la búsqueda de ordenar el desorden

Los estudiosos de todos los ámbitos del conocimiento están observando procesos en los cuales tiene lugar la **transición del caos al orden**, es decir secuencias dirigidas a una **autoorganización**. La pregunta que se impone es **cómo** tiene lugar esta creación de estructuras, es decir esta **autoorganización**. Pues bien, dada la entropía de un sistema, si se perturba de tal manera que un estado permanece suficientemente cerca del equilibrio el sistema responde reestableciendo la situación inicial. Existen, pues, mecanismos que lo hacen inmune a las perturbaciones. Se trata de un **sistema estable.** Pero si un estado es llevado suficientemente lejos del equilibrio, entra en una situación de **inestabilidad** en relación con la perturbación. Este punto se acostumbra a denominar **punto de bifurcación**. En él tienen lugar nuevas situaciones que pueden corresponder a comportamientos alejados del originario. En este contexto, las ecuaciones deterministas no tienen utilidad para predecir **qué camino** será el elegido entre los existentes en la bifurcación. En muchas de estas bifurcaciones se produce una **ruptura de simetría.** Es el caso en que existe una solución "izquierda" y una solución "derecha", pero que la naturaleza sólo elige una de las dos. Se puede decir, así, que existe simetría en las ecuaciones pero no en las soluciones.

Como señala Paul Valéry, *le sens du mot déterminisme est du même degré de vague que celui du mot liberté* […] *Le déterminisme rigoreux est profondement déiste. Car il faudrait un dieu pour apercevoir cet enchaînement infini complet… De sorte que le dieu retranché de la création et de l'invention de l'univers est restitué pour la compréhension de cet univers*[8]. Un universo en el que las formas que vemos en la naturaleza no guardan semejanza, normalmente, con las figuras geométricas tradicionales de la matemática, aunque algunas veces sí la tienen. Recordemos que, en 1610, **Galileo Galilei** dijo que *la matemática es el lenguaje de la naturaleza*. Pero la verdad es que la geometría de la naturaleza resulta de difícil representación mediante las formas usuales de Euclides o por el cálculo diferencial. Su **escaso orden** la convierte en "caótica". Adoptamos así el término acuñado por Norbert Wiener, cuando quería expresar una forma extrema de desorden.

Benoît Mandelbrot, en su obra *The fractal geometry of Nature*[9], señala que las nubes no son esferas, las montañas no son círculos y la corteza de un árbol no es lisa. Con esta idea desarrolla una nueva matemática capaz de **describir y estudiar la estructura irregular de los objetos naturales**. Acuñó un nombre, **fractales**[10], para designar estas nuevas formas geométricas.

Los fractales, igual que sucede con el **caos**, se asientan sobre la **estructura de la irregularidad.** En las dos, la imaginación geométrica adquiere importancia fundamental. Ahora bien, si en los **fractales** domina la geometría, en el **caos** ésta se halla supeditada a la dinámica. **Los fractales proporcionan un nuevo lenguaje susceptible de describir la forma del caos**. *La geometría fractal se caracteriza por dos elecciones: la elección de problemas en el seno del caos de la naturaleza… y la elección de herramientas en el seno de las*

---

[8] P. Valéry: *Cahiers. I*. Bibliothèque de la Pléiade, Ed. Gallimard, Paris, 1973, pp. 651 y 531.

[9] Existe una versión española traducida de la tercera edición francesa con *título Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*, editada en 1993 por Tusquets Editores, S.A. que lleva por título *Los objetos fractales*, versión de la que somos tributarios.

[10] El adjetivo latino **fractus** se puede traducir por **interrumpido**, **irregular.**

matemáticas… Estas dos elecciones han creado algo nuevo: entre el dominio del caos incontrolado y el orden excesivo de Euclides, hay a partir de ahora una nueva zona de orden fractal[11].

En la geometría convencional, **un punto** o un número infinito de puntos son figuras de dimensión **cero**; una **recta** o una curva "euclídea" constituyen figuras de dimensión **uno**; un **plano** o una superficie de las habituales son figuras de dimensión **dos**; un **cubo** tiene una dimensión **tres**;… Fue gracias a la propuesta de Hausdorff, en 1919, que se han podido considerar algunas **figuras ideales** cuya dimensión no es un entero, sino una fracción o también un número irracional. La **dimensión fractal** mide el grado de irregularidad e interrupción de un objeto fractal.

Ahora bien, también en **la realidad** existen objetos específicos cuya **dimensión física efectiva** posee un valor no convencional. Esto nos lleva a prestar atención a la relación entre las idealizaciones matemáticas (figuras) y los datos y formas reales (objetos). Paralelamente, se puede aceptar que un **resultado numérico** depende de la relación entre objeto observado y sujeto observador. "Ce qui change c'est le regard". En otras palabras, la **dimensión física** tiene un componente de subjetividad y depende del grado de resolución. Un ejemplo presentado por Mandelbrot puede ser esclarecedor: "Un ovillo de 10cm de diámetro hecho con hilo de 1mm de sección tiene varias dimensiones efectivas distintas. Para un grado de resolución de 10m es un punto, y por tanto una figura de dimensión **cero**; para el grado de resolución de 10cm es una bola **tridimensional**; para el grado de resolución de 10mm es un conjunto de hilos, y tiene por consiguiente dimensión **uno**; para el grado de resolución de 0.1mm, cada hilo se convierte en una especie de columna y el conjunto vuelve a ser de **tres** dimensiones; […] y así sucesivamente. ¡El valor de la dimensión no para de dar saltos![12]

En nuestro intento por explicar la naturaleza introducimos escalas de medida distintas según la "dimensión" del objeto estudiado. No existen grandes problemas para el estudio de aquellos fenómenos que comprenden un rango reducido de escalas, pero las dificultades aumentan cuando es esencial un gran rango.

Las formas geométricas tradicionales (triángulo, cuadrado, círculo, esfera, cilindro) pierden su estructura cuando son ampliadas (un círculo se convierte en una línea recta monótona cuando es observado a una escala suficientemente grande; para un diminuto ser humano la Tierra es lisa). El término **fractal** describe **un tipo de objeto geométrico que sigue manifestando una estructura detallada en un gran rango de escalas.**

En principio, los **objetos naturales**, tanto aquellos que nos son familiares (como la Luna, la Tierra, los mares), como aquellos que nos lo son menos (como una distribución de errores en una recopilación estadística), son **sistemas**, dado que se hallan formados por partes diferenciadas en conexión entre sí. Pues bien, la **dimensión fractal** pone en evidencia un aspecto de estas leyes de conexión.

Entre los objetos familiares se acostumbra a citar como ejemplo **un trozo de costa marítima**, de la que se desea medir su **longitud efectiva**. Esta longitud es siempre igual o

[11] B. Mandelbrot: *Los objetos fractales*. Tusquets Editores, Barcelona, 1993, p. 18.

[12] B. Mandelbrot: *Los objetos fractales*. Tusquets Editores, Barcelona, 1993, p. 21.

mayor a la distancia en línea recta entre los dos extremos objeto de la medida. Esta es una posición límite. En el otro límite se halla la hipótesis de una costa extremadamente sinuosa, para la cual su longitud podría ser tan grande que se acercara al infinito. Cuando se quieren comparar las diferentes formas de la costa nos veremos impulsados a utilizar la noción de **dimensión fractal**. Por ello, una línea costera es un buen ejemplo de fractal, pues a distintas escalas se tiene, dentro de lo razonable, la misma estructura (cuando una zona costera reflejada en un mapa se amplía con otro mapa más detallado se observa la misma estructura general). Constituyen un tópico en la "hermandad fractal" los conocidos versos de J**onathan Swift** (1726)[13]:

So, Naturalists observe, a flea
Hath smaller fleas on him prey,
And these have smaller fleas to bite 'em;
And so proceed "ad infinitum"

En todas las obras sobre la materia se cita como fractal matemático la **curva del copo de nieve** de **Helge von Koch** (1904). En ella, lo que en la línea costera serían bahías y cabos, aquí son triángulos equiláteros, que van haciéndose más pequeños. En ambos casos aparece una importante característica: su **comportamiento de escala** (la misma estructura en todas las escalas).

Resulta relativamente abordable una medida numérica del **grado de rugosidad de un fractal**. Inicialmente se denominó **dimensión de Hausdorff-Besicovitch**, en honor a los dos matemáticos que la inventaron. Hoy se conoce como **dimensión fractal**. No es prácticamente posible realizar medidas cuantitativas de **todos** los detalles de un fractal, pero, en cambio, sí lo es obtener una medida **del grado de su rugosidad**.

Como hemos señalado, en el campo de los fractales, la dimensión **no debe ser** obligatoriamente un número entero. Así, la dimensión fractal de una línea costera tiene, normalmente, un valor entre 1.15 y 1.25, y **la curva del copo de nieve de Koch** se acerca a 1.26. Por tanto, se las puede considerar prácticamente igual de rugosas (la línea costera ocupa más espacio que una curva uniforme y menos espacio que una superficie, por lo que no puede extrañar que su dimensión se halle entre 1 y 2. En definitiva, se trata de "establecer el **volumen d-dimensional** de una figura, siendo d un número cualquiera, entero o no".

La diferencia geométrica entre **figuras uniformes** (círculos, esferas,…) y **figuras rugosas** (fractales), se corresponde con la diferencia entre los **atractores de la matemática tradicional** y los **atractores del caos**. Por ello los fractales pueden ser considerados, alternativamente:

a) Como una **herramienta** descriptiva para el estudio de procesos y formas irregulares.
b) Como una **consecuencia** matemática de una dinámica caótica subyacente.

Las posibilidades de **utilización de los fractales** son amplias. Los fractales ponen en evidencia una nueva visión de la naturaleza, que, ahora, es apta para ser modelizada matemáticamente. Las posibilidades de representar de manera geométrica fenómenos

[13] *Así, los naturalistas observan que una pulga / tiene pulgas más pequeñas que viven a costa de ella / y éstas tienen pulgas más pequeñas que las muerden / y así se sigue "ad infinitum".*

económicos irregulares abren las puertas de par en par al empleo fractal en el ámbito de las ciencias sociales. La preocupación por las fluctuaciones en las bolsas ¿no podría estimular el estudio de esta nueva **geometría de la Naturaleza** por parte de economistas y especialistas en gestión?

Nacimiento y desarrollo de una teoría de la incertidumbre

Resulta impensable no aceptar que los sistemas son muy sensibles a las variaciones de las condiciones iniciales o de las existentes en algún instante de su actividad[14]. En otros términos, se concibe así que cuando una **perturbación** excede de un cierto nivel, las desviaciones futuras llevan a un proceso no controlable por el propio sistema, produciéndose el nacimiento de insospechados nuevos fenómenos. Sólo con este convencimiento es posible vislumbrar cómo hace cuatro mil millones de años pudo aparecer una célula viva de un vulgar caldo de aminoácidos. La complejidad de estos sistemas hace inviable su comprensión y explicación únicamente mediante leyes deterministas, sustentadas y desarrolladas con ecuaciones lineales. Ha hecho falta, y hará falta todavía, una gran dosis de imaginación para romper con los lazos que nos atenazan con el pasado, colocando en su lugar ecuaciones diferenciales "no lineales", portadoras de un gran arsenal descriptivo de situaciones inciertas. Compiten, cohabitan o colaboran en esta tarea enfoques, de ayer o de hoy. Entre ellos destaca la teoría de los conjuntos borrosos, cuyo epicentro se halla en una querella que data de más de dos mil años. En efecto, **Aristóteles** (384-322 a.C.) señalaba: *Una simple afirmación es la primera especie de lo que llamamos proposiciones simples, y una simple negación es la segunda clase de ellas… Respecto de las cosas presentes o pasadas, las proposiciones, sean positivas o negativas, son por necesidad verdaderas o falsas. Y de las proposiciones que se oponen contradictoriamente debe ser una verdadera y una falsa*[15]. En esta misma línea se situaba el pensamiento de los **estoicos,** a una de cuyas figuras centrales, **Crisipo de Soli** (ca. 281-208 a.C.), se le atribuye la formulación del llamado "principio del tercio excluso" (una proposición o es verdadera o es falsa). Los **epicúreos** contestaron con vigor este principio, señalando que sólo es aceptable si no se da una tercera posibilidad "tertium non datur" (tercio excluso). A pesar de su materialismo, **Epicuro** creía en la libertad de la voluntad, sugiriendo, incluso, que los átomos son libres y se mueven, de vez en cuando, con total espontaneidad. Esta idea tiene evidentes connotaciones con el **principio de incertidumbre** ya mencionado.

Tienen que transcurrir veintidós siglos para que **Lukasiewicz**[16], retomando la idea de los epicúreos, señalara que existen proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas, sino **indeterminadas.** Esto le permite enunciar su "principio de valencia" (cada proposición tiene un valor de verdad). Asignó, inicialmente, tres valores de verdad: verdadero (1), falso (0), indeterminado (0.5), generalizando, luego, a n valores, para n igual o mayor que 2. Se inicia, así, el camino para las llamadas lógicas multivalentes.

---

[14] Este apartado ha sido extraído de J. Gil-Aluja: *La pretopología en la gestión de la incertidumbre*. Discurso de investidura como Doctor *Honoris Causa* de la Universidad de León. Publicaciones de la Universidad de León, León, 2002, pp. 47-78.

[15] Aristóteles: *Obras. Lógica. De la expresión o interpretación*. Editorial Aguilar, Barcelona, 1977, pp. 258-260.

[16] J. Lukasiewicz: O zasadzie wylaczonego srodka. *Przegl´d Filozficzny* 13 **(**1910), 372-373.

Con ocasión del Congreso Internacional SIGEF de Buenos Aires[17] intentamos asentar la posición epicúrea en las nuevas coordenadas surgidas del hallazgo de **Zadeh**[18], enunciando el "principio de la simultaneidad gradual" (toda proposición puede ser a la vez verdadera y falsa, a condición de asignar un grado a su verdad y un grado a su falsedad). Antes y después, un buen número de científicos han ido colocando, piedra tras piedra, los cimientos de lo que puede ser un nuevo edificio del saber. Desde esta perspectiva del conocimiento, algunos nombres jalonan este ya fructífero camino: **Rosenfield**, en 1971, estudia las relaciones borrosas[19]. **De Luca** y **Termini**, en 1972, acuñan el concepto de entropía no probabilística[20]. **Kaufmann**, en 1973, incorpora el operador de convolución maxmin en las ecuaciones de relaciones borrosas[21]. **Sugeno**, en 1977, se introduce en el ámbito de las mediciones borrosas[22]. **Zimmermann**, en 1978, profundiza en el desarrollo de las operaciones con conjuntos borrosos[23]. Numerosos grupos de investigación pertenecientes a universidades de los cinco continentes están trabajando en las distintas ramas del árbol de la ciencia. *A todos ellos nuestro más rendido homenaje. A ellos y a cuantos han entreabierto puertas para que otros las traspasen. A aquellos de quienes nunca conoceremos su nombre. A los que no disponen ni de un mísero rincón en las casi infinitas páginas de la historia.*[24]

Referencias

Aristóteles: *Obras. Lógica. De la expresión o interpretación.* Editorial Aguilar, Barcelona, 1977.

G. Bruno: *De la causa*, Opera Italiane, quinto diálogo, I. Bari, 1907. [Citado por I. Leclerc: *The nature of physical existence*, George Allen and Unwin Ltd., Londres, 1972].

A. De Luca, S. Termini: A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control* **20** (1972), 301-312.

J. Gil Aluja: *Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión.* Proceedings del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy, Buenos Aires, 10-13 noviembre 1996.

---

17 J. Gil Aluja: *Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión*. Proceedings del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy, Buenos Aires, 10-13 noviembre 1996 [sin numerar].

18 L. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and Control* 8 (1965), 338-353.

19 A. Rosenfeld: Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 35 (1971), 512-517.

20 A. De Luca, S. Termini: A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and Control* 20 (1972), 301-312.

21 A. Kaufmann: *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous a l´usage des ingénieurs*. Masson et Cie. Editeurs, Paris, 1973, pp. 60-65.

22 M. Sugeno: *Fuzzy measures and fuzzy integrals, a survey*. En *Fuzzy automata and decision processes* (M.M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines, eds.), North-Holland, New York, 1977, pp. 89-102.

23 H.J. Zimmermann: *Results of empirical studies in fuzzy set theory*. En G.J. Klir (ed.): *Applied general systems research*, Plenum Press, New York, 1978, pp. 303-312.

24 J. Gil Aluja: *Génesis de una teoría de la incertidumbre*. Discurso pronunciado con ocasión del acto de imposición de la Gran Cruz de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio, Barcelona, 20 enero 2000, Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras y Reial Academia de Doctors, p. 27.

J. Gil Aluja: *Génesis de una teoría de la incertidumbre*. Discurso pronunciado con ocasión del acto de imposición de la Gran Cruz de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio, Barcelona, 20 enero 2000. Real Academia de Ciencias Económicas y Financieras y Reial Academia de Doctors.

J. Gil-Aluja: *La pretopología en la gestión de la incertidumbre*. Discurso de investidura como Doctor *Honoris Causa* de la Universidad de León. Publicaciones de la Universidad de León, León, 2002.

A. Kaufmann: *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous a l´usage des ingénieurs*. Masson et Cie. Editeurs, Paris, 1973.

A. Kaufmann, J. Gil Aluja: *Nuevas técnicas para la dirección estratégica*. Publicacions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 1991.

J. Lukasiewicz: O zasadzie wylaczonego srodka. *Przegl´d Filozficzny* **13** (1910), 372-373.

B. Mandelbrot: *Los objetos fractales*. Tusquets Editores, Barcelona, 1993.

A. Rosenfeld: Fuzzy groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **35** (1971), 512-517.

P. Speziali (ed.): *Einstein-Besso. Correspondence*. Herman, París, 1972.

M. Sugeno: *Fuzzy measures and fuzzy integrals, a survey*. En *Fuzzy automata and decision processes* (M.M. Gupta, G.N. Saridis and B.R. Gaines, eds.), North-Holland, New York, 1977, pp. 89-102.

P. Valéry: *Cahiers. I*. Bibliothèque de la Pléiade, Ed. Gallimard, Paris, 1973.

L. Zadeh: Fuzzy sets. *Information and Control* **8** (1965), 338-353.

H.J. Zimmermann: *Results of empirical studies in fuzzy set theory*. En G.J. Klir (ed.): *Applied general systems research*, Plenum Press, New York, 1978, pp. 303-312.