

## Matemáticas y robótica

---

Leopoldo Acosta Sánchez y Marta Sigut Saavedra  
Catedrático y Profesora Asociada Doctora de Ingeniería de Sistemas y Automática  
Departamento de Física Fundamental y Experimental, Electrónica y Sistemas,  
Universidad de La Laguna

### Introducción

Un robot es cualquier estructura mecánica que opera con un cierto grado de autonomía, bajo el control de un computador, para la realización de una tarea, y que dispone de un sistema sensorial más o menos evolucionado para obtener información de su entorno. Tradicionalmente la robótica se suele dividir en dos grandes áreas: la *robótica de manipulación* y la *robótica móvil*. La robótica de manipulación ha trascendido el campo industrial y, junto con la robótica móvil, ha dado lugar a infinidad de aplicaciones en áreas muy diversas, que van desde los robots quirúrgicos a los robots humanoides o las mascotas robóticas diseñadas y construidas por grandes multinacionales japonesas.

Un robot está compuesto por una serie de elementos hardware, como son: una estructura mecánica, un sistema de actuación, un sistema sensorial interno, un sistema sensorial externo y un ordenador. Además, debe haber un software que gestione el sistema sensorial y mueva la estructura mecánica para la realización de una determinada tarea.

Nosotros nos centraremos en las herramientas matemáticas básicas que se utilizan en robótica. A modo de resumen de lo que más adelante se explicará con mayor detalle, diremos que el problema más básico que debe resolverse es obtener un modelo geométrico de la estructura que permita relacionar los grados de libertad (las variables generalizadas) con las coordenadas cartesianas de todos y cada uno de los puntos que constituyen el robot. Esto se conoce como el *problema cinemático directo*, y para robots típicos tiene una solución sencilla y universal. Sin embargo, el problema que aparece cuando se pretende posicionar un brazo robótico o una pierna de un humanoide es justo el inverso, es decir: se parte de las posiciones cartesianas como valores de entrada y lo que se debe encontrar son los valores de las variables generalizadas. El *problema cinemático inverso* sólo puede resolverse de forma analítica en casos muy sencillos, y puede tener 0, 1, 2,... ó infinitas soluciones. En algunos casos particulares es posible hacer un planteamiento relativo basado en matrices jacobianas.

Debe observarse que el planteamiento cinemático no es válido cuando se pretende manipular objetos en movimiento. Es necesario entonces plantear modelos dinámicos donde intervenga el tiempo. Debe también tenerse en cuenta que un robot debe moverse en tiempo real, por lo cual es necesario plantear soluciones de baja complejidad computacional. Esto

hace que, por ejemplo, se prefiera la formulación de Newton-Euler antes que otras más elegantes como la lagrangiana.

## I. Morfología y cinemática del robot

### I.1. Estructura mecánica de un robot.

Mecánicamente, un robot está formado por una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten un movimiento relativo entre cada dos eslabones consecutivos. La constitución física de la mayor parte de los robots industriales guarda cierta similitud con la anatomía del brazo humano, por lo que, en ocasiones, para hacer referencia a los distintos elementos que componen el robot se emplean términos como cuerpo, brazo, codo y muñeca.

Los movimientos posibles para las articulaciones son: un desplazamiento (articulación de tipo prismático), un giro (articulación de rotación o de revolución), o una combinación de ambos, siendo éstos últimos menos habituales. Las dos primeras son las más usadas en la práctica.

Cada uno de los movimientos independientes que puede realizar cada articulación con respecto a la anterior se denomina *grado de libertad* (GDL). El número de grados de libertad del robot viene dado por la suma de los grados de libertad de las articulaciones que lo componen. Puesto que, como se acaba de comentar, las articulaciones empleadas en la práctica son únicamente las de rotación y prismática, con un solo GDL cada una, el número de GDL del robot suele coincidir con el número de articulaciones de que se compone.

La posibilidad de combinar articulaciones de un tipo u otro viene dada por la función que debe realizar el robot. Así por ejemplo, si se desea posicionar un objeto de cualquier manera en el espacio se requerirán 6 GDL (se debe tener en cuenta tanto la posición como la orientación), como los que ofrecen los robots manipuladores PUMA de Unimation o de ASEA. En cambio, si lo que pretende es recoger un objeto en una superficie plana, hará falta una configuración tipo SCARA; mientras que para el posicionamiento de una placa solar será necesaria una configuración esférica. En la Figura 1 se observa el manipulador SCORBOT.

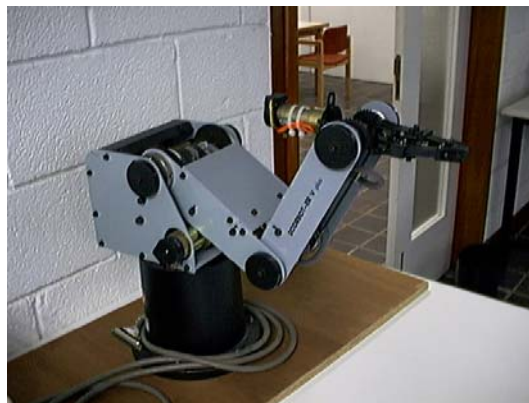


Figura 1. Fotografía del manipulador SCORBOT ER-VPlus en la que se observan los distintos elementos que componen la estructura mecánica y las articulaciones que las unen.

En definitiva, la realización de una tarea implica que el efector final del manipulador ejecute un movimiento determinado. Para ello es necesaria la presencia de un sistema de control que garantice la correcta ejecución del movimiento del efector final, para lo cual debe ser capaz de encontrar el comportamiento temporal de las fuerzas y torques que se aplicarán a los actuadores a fin de garantizar que se recorran las trayectorias de referencia. Para poder llevar a cabo el control del movimiento del efector final es necesario disponer de un modelo que represente el comportamiento del robot. Dicho modelo debe contemplar tanto la *cinemática* del manipulador, entendiendo como tal la descripción del movimiento del manipulador con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo, como la *dinámica*, es decir, el comportamiento del robot en función de las fuerzas y momentos aplicados.

## 1.2. Modelo cinemático.

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia. Así, la cinemática se interesa por la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del extremo final del robot y los valores que toman sus coordenadas articulares.

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot (ver Figura 2): uno es el que se conoce como el *problema cinemático directo*, que consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot; el segundo, denominado *problema cinemático inverso*, resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas.

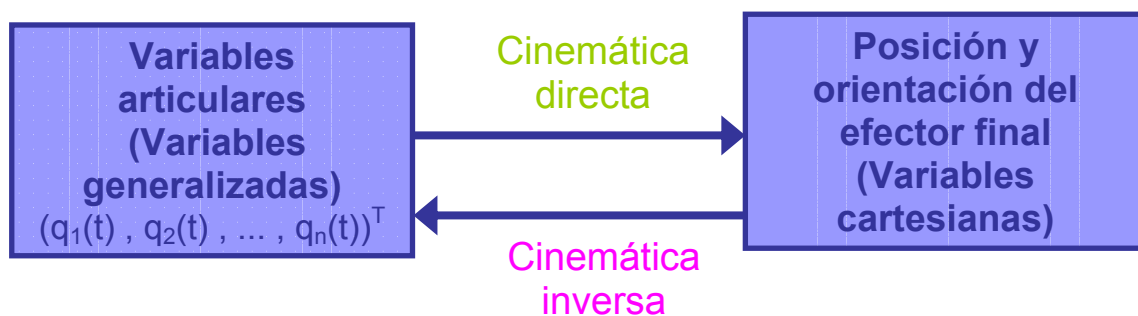


Figura 2: Los dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática del robot.

**1.2.1. El problema cinemático directo.** La cinemática directa consiste en obtener la posición en el espacio de la estructura a partir de los valores de las variables generalizadas. Éstas están asociadas a las articulaciones y definen sus “propiedades” de movimiento, por lo que para las articulaciones de revolución la variable generalizada será un ángulo, y para las prismáticas un desplazamiento. En general las variables generalizadas se denotan por  $q$ , con el subíndice correspondiente al número de articulación.

Por ejemplo, un problema cinemático directo, en este caso en dos dimensiones, podría ser calcular el punto  $p$  en función del ángulo  $\theta$  (Figura 3):

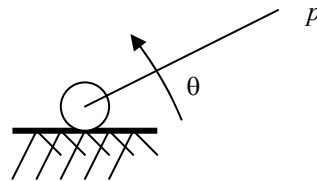


Figura 3.

En general, habrá que numerar tanto las articulaciones como los links o eslabones para poder identificarlos y poder expresar su rotación o traslación con respecto al anterior.

La cinemática directa es un problema de cambio de sistema de coordenadas, que se ilustra gráficamente de la siguiente manera (Figura 4):

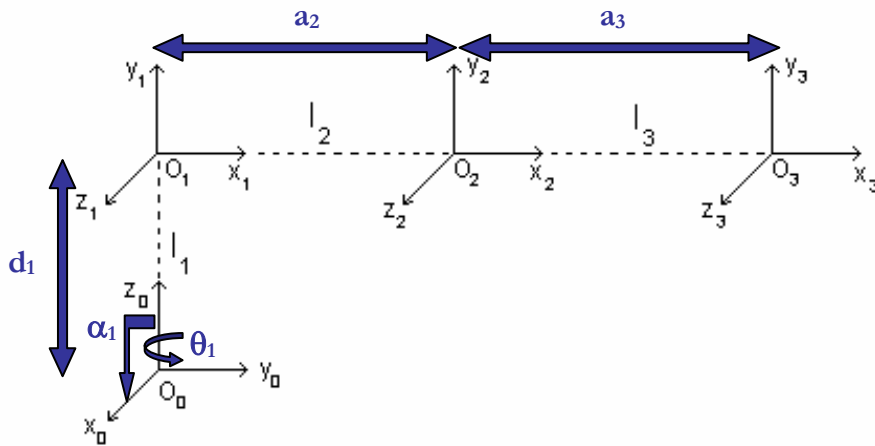


Figura 4.

Considérense ahora dos sistemas de coordenadas dextrógiros dados por los subíndices 0 y 1. Las coordenadas de un punto en el sistema 0 podrán obtenerse a partir de las coordenadas de ese mismo punto en el sistema 1 por medio de la multiplicación por una matriz de paso que, en este caso, se denotará por  ${}^0T_1$ .

Para representar la transformación de un sistema de coordenadas con respecto al anterior se utilizan matrices de transformación homogéneas que, en el caso más general, tienen la forma siguiente:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & p_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & \omega_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{matriz de rotación} & \text{vector de traslación} \\ \text{transformación de perspectiva} & \text{escalado} \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces que la matriz  ${}^{i-1}T_i$  relaciona los sistemas de dos eslabones consecutivos, por lo que para un robot de 6 eslabones la posición y orientación del eslabón final viene definida por:

$${}^0T_6 = {}^0T_1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6,$$

donde para el cálculo de  ${}^{i-1}T_i$ , que tiene la forma siguiente:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \cdot \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cdot \sin \theta_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cdot \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cdot \cos \theta_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se emplea el algoritmo de Denavit-Hartenberg. Este algoritmo permite obtener los valores de los parámetros  $(\theta, \alpha, d, a)$  (parámetros de Denavit-Hartenberg) para cada una de las articulaciones.

**1.2.2. El problema cinemático inverso.** El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

Así como es posible abordar el problema cinemático directo de una manera sistemática a partir de la utilización de matrices de transformación homogéneas, e independientemente de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso. En este caso el procedimiento de obtención de las ecuaciones es fuertemente dependiente de la configuración del robot.

Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados de modo que un computador pueda, a partir del conocimiento de la cinemática del robot, obtener la  $n$ -upla de valores articulares que posicionan y orientan su extremo. El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia en sí no está siempre garantizada. No obstante, a pesar de estas dificultades, la mayor parte de los robots poseen cinemáticas relativamente simples que facilitan en cierta medida la resolución del correspondiente problema cinemático inverso.

Los métodos geométricos normalmente permiten obtener los valores de las primeras variables articulares, que son las que consiguen posicionar el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo). Para ello utilizan relaciones trigonométricas y geométricas sobre los elementos del robot. Se suele recurrir a la resolución de triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot que, en ocasiones, dan lugar a un número infinito de soluciones.

## II. Dinámica del robot

La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina como resultado de las mismas. Por lo tanto, el modelo dinámico de un robot tiene por objeto conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas aplicadas.

La obtención de este modelo para estructuras de uno o dos grados de libertad no resulta excesivamente compleja, pero a medida que el número de grados de libertad aumenta el planteamiento y obtención del modelo dinámico se complica enormemente. Por este motivo no siempre es posible obtener un modelo dinámico expresado de una forma cerrada, es decir, mediante una serie de ecuaciones, normalmente diferenciales de segundo orden, cuya integración permita conocer qué movimiento surge al aplicar unas determinadas fuerzas o qué fuerzas hay que aplicar para obtener un movimiento determinado. El modelo dinámico debe ser entonces resuelto de manera iterativa mediante la utilización de un procedimiento numérico.

El problema de la obtención del modelo dinámico de un robot es, por lo tanto, uno de los aspectos más complejos de la robótica, que lo ha llevado a ser obviado en numerosas ocasiones. Sin embargo, el modelo dinámico es imprescindible para implementar tareas como la simulación del movimiento del robot, el diseño y la evaluación de la estructura mecánica del robot, el dimensionamiento y la elección de los actuadores, y el diseño y la evaluación del control dinámico del robot.

La obtención del modelo dinámico de un determinado mecanismo, y en particular de un robot, se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o su equivalente para movimientos de rotación, la denominada ley de Euler. Del planteamiento del equilibrio de fuerzas y pares que intervienen sobre el robot se obtienen los denominados modelos dinámicos directo e inverso, que consisten en lo siguiente:

- *Modelo dinámico directo* → expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen.
- *Modelo dinámico inverso* → expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articuladas y sus derivadas.

El planteamiento del equilibrio de fuerzas en un robot real de 5 ó 6 grados de libertad es bastante complejo y debe tenerse en cuenta que, junto con las fuerzas de inercia y gravedad, aparecen fuerzas de Coriolis debidas al movimiento relativo existente entre los distintos elementos, así como fuerzas centrípetas que dependen de la configuración instantánea del manipulador.

Como planteamiento alternativo para la obtención del modelo dinámico está la formulación lagrangiana, basada en consideraciones energéticas. Este planteamiento es más sistemático y más elegante desde el punto de vista matemático que el anterior y, por lo tanto, facilita enormemente la formulación de un modelo tan complejo como el de un robot. Sin embargo, el coste computacional de la formulación lagrangiana es muy superior al de la formulación newtoniana, tal y como se ilustra en la tabla 1:

|  | <i>Lagrange-Euler</i>   | <i>Newton-Euler</i>                         |
|--|---|---|
| <i>Multiplicaciones</i>                | $\frac{128}{3}n^4 + \frac{512}{3}n^3 + \frac{739}{3}n^2 + \frac{160}{3}n$ | $132n$                                      |
| <i>Sumas</i>                           | $\frac{128}{3}n^4 + \frac{512}{3}n^3 + \frac{739}{3}n^2 + \frac{160}{3}n$ | $111n - 4$                                  |
| <i>Representación de la cinemática</i> | Matrices homogéneas 4x4   | Matrices de rotación y vectores de posición |

Tabla 1. Comparación del coste computacional asociado a las formulaciones lagrangiana y newtoniana.

Es precisamente el gran coste computacional de la formulación de Lagrange-Euler lo que hace que en la práctica, donde la dinámica del robot debe ser resuelta en un tiempo razonablemente corto, se emplee la formulación de Newton-Euler.

La ecuación que establece el modelo dinámico inverso de un robot, dando los pares y fuerzas que deben proporcionar los actuadores para que las variables articulares sigan una determinada trayectoria  $q(t)$  es la siguiente:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + C(q) + F_v \dot{q},$$

donde  $D(q)$  es la matriz de inercias,  $H(q, \dot{q})$  es la matriz que da cuenta de las aceleraciones centrífuga y de Coriolis,  $C(q)$  es la matriz de gravedad y  $F_v$  es la matriz de rozamiento viscoso.

Se trata, por tanto, de una expresión no lineal, por lo que no es trivial obtener a partir de ella el modelo dinámico directo que proporciona la trayectoria seguida como consecuencia de la aplicación de unos pares determinados  $\tau$ .

### III. Control cinemático

El control cinemático establece cuáles son las trayectorias que debe seguir cada articulación del robot a lo largo del tiempo para lograr los objetivos fijados por el usuario (punto de destino, trayectoria cartesiana del efector final del robot, tiempo invertido por el usuario, etc.). Estas trayectorias se seleccionarán atendiendo a las restricciones físicas propias de los accionamientos y a ciertos criterios de calidad en la trayectoria, como suavidad en los movimientos o precisión de la misma.

#### III.1. Funciones de control cinemático.

La Figura 5 muestra de manera esquemática el funcionamiento del control cinemático. Recibe como entradas los datos procedentes del programa del robot escrito por el usuario (punto de destino, precisión, tipo de trayectoria deseada, velocidad o tiempo invertido, etc.) y, apoyándose en el modelo cinemático del robot, establece las trayectorias

para cada articulación como funciones del tiempo. Estas trayectorias deben ser muestreadas con un período  $T$  a decidir, generándose en cada instante de tiempo  $kT$  un vector de referencias articulares para los algoritmos de control dinámico.

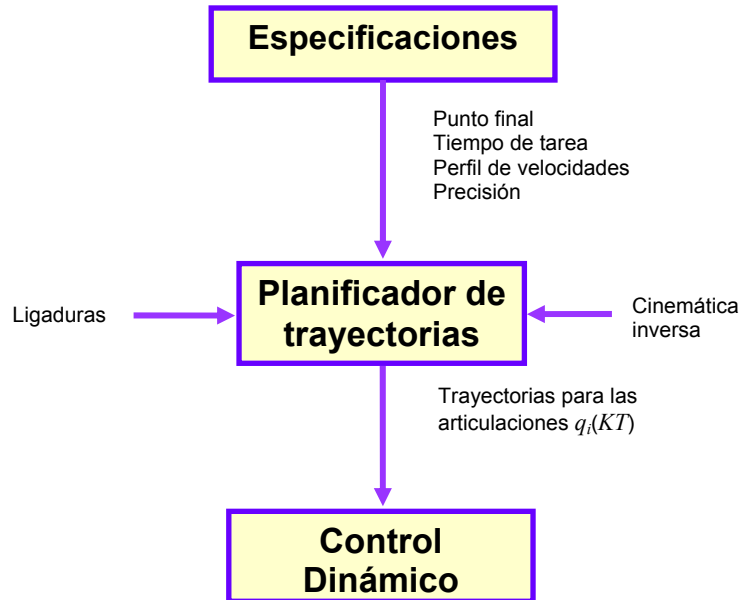


Figura 5. Funcionamiento del control cinemático.

### III.2. Tipos de trayectorias.

Para realizar una tarea determinada, el robot debe moverse desde un punto inicial hasta un punto final. Este movimiento puede realizarse siguiendo un número infinito de trayectorias espaciales. De todas ellas hay algunas que, bien por su sencillez de implementación por parte del control cinemática, bien por su utilidad y aplicación en diversas tareas, son las que incorporan en la práctica los robots comerciales. Así, puede ocurrir que los robots dispongan de *trayectorias punto a punto*, *coordinadas* y *continuas*.

**Trayectorias punto a punto.** En este tipo de trayectorias cada articulación evoluciona desde su posición inicial a la final sin realizar consideración alguna sobre el estado o evolución de las demás articulaciones. Normalmente, cada actuador trata de llevar a su articulación al punto de destino en el menor tiempo posible, pudiéndose entonces distinguir dos casos: movimiento eje a eje y movimiento simultáneo de ejes.

**Trayectorias coordinadas o isócronas.** Para evitar que algunos actuadores trabajen forzando sus velocidades y aceleraciones, teniendo que esperar después la conclusión del movimiento de la articulación más lenta, puede hacerse un cálculo previo, averiguando cuál es esta articulación y qué tiempo invertirá. Se ralentizará entonces el movimiento del resto de los ejes para que inviertan el mismo tiempo en su movimiento, acabando todos ellos



simultáneamente. Se tiene así que todas las articulaciones se coordinan comenzando y acabando su movimiento a la vez, adaptándose todas a la más lenta.

**Trayectorias continuas.** Cuando se pretende que la trayectoria que sigue el extremo del robot sea conocida por el usuario (trayectoria en el espacio cartesiano o de la tarea), es preciso calcular de manera continua las trayectorias articulares.

#### IV. Control dinámico

El control cinemático selecciona trayectorias que idealmente deberá seguir el robot para, teniendo en cuenta sus limitaciones, ajustarse lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario. En la práctica, este ajuste del movimiento del robot a las especificaciones del usuario no será del todo posible, pues las características dinámicas del robot (inercias, rozamiento, holguras, etc.) impiden, en general, que las trayectorias real y deseada coincidan.

El control dinámico tiene como objetivo procurar que las trayectorias realmente seguidas por el robot  $q(t)$  sean lo más parecidas posible a las propuestas por el control cinemático como trayectorias deseadas  $q_d(t)$ . Para llevar a cabo esa tarea hace uso del conocimiento del modelo dinámico del robot y de las herramientas de análisis y diseño aportadas por la teoría del servocontrol (estabilidad de Lyapunov, control PID, control adaptativo, etc.).

El modelo dinámico de un robot es fuertemente no lineal, multivariable, acoplado y de parámetros variantes, por lo que, en general, su control es extremadamente complejo. En la práctica se llevan a cabo ciertas simplificaciones, que resultan aceptables para un gran número de los robots comerciales, las cuales facilitan el diseño del sistema de control proporcionando unos resultados razonablemente buenos, aunque limitan en ciertas situaciones la calidad de sus prestaciones.

Una posibilidad para controlar el movimiento articular es considerar un modelo de robot compuesto por la superposición de articulaciones totalmente independientes unas de otras, sin tener en cuenta la interacción entre ellas, que sin duda existe y condiciona el movimiento global. Por tanto, en esta situación el modelo dinámico empleado es directamente el correspondiente al accionador de una articulación. Este modo de control se conoce como *control desacoplado* o *monoarticular*. Su principal ventaja es su mayor simplicidad de cálculo y es habitual implementar controladores PID, controladores PID con prealimentación y controladores PD con compensación de gravedad. La principal desventaja surge en aquellas ocasiones en las que existe una gran influencia del movimiento de una articulación sobre el de otras, y, por ende, sobre el movimiento global.

El *control acoplado* o *multiarticular* se basa en un modelo de robot en el que se considera el modelo dinámico global del mismo, es decir, se tiene en cuenta la influencia de los movimientos de las articulaciones entre sí. Está claro que, desde el punto de vista analítico, este planteamiento resulta más complejo. Las técnicas de control utilizadas son las basadas en control PID y control por prealimentación, ampliamente extendidas, utilizándose también en ocasiones la linealización por inversión del modelo. También se emplean técnicas de control más potentes, como el control adaptativo.

## V. Robots móviles

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, restringido en sus inicios al alcance de una estructura mecánica anclada en uno de sus extremos. Se trata también de incrementar la autonomía limitando todo lo posible la intervención humana. Dicha autonomía se basa en el sistema de navegación automática. En estos sistemas se incluyen tareas de planificación, percepción y control.

Existen numerosos métodos de planificación de caminos para robots móviles. Una vez realizada la planificación de la trayectoria, es necesario planificar movimientos concretos y controlar dichos movimientos para mantener al vehículo en la trayectoria planificada. Por otro lado, el sistema de percepción de un robot móvil o vehículo autónomo tiene un triple objetivo: permitir una navegación segura detectando y localizando obstáculos y situaciones peligrosas en general, modelar el entorno construyendo un mapa o representación de dicho entorno, y estimar la posición del vehículo de forma precisa.

### V.1. Planificación de trayectorias.

El problema básico de la robótica móvil se podría resumir como encontrar la mejor trayectoria para desplazarse de un origen a un destino recorriendo la menor distancia, o pasando por determinados puntos intermedios. Ante una dirección destino, el robot es capaz de determinar el camino a seguir mediante el guiado planificado. Sin embargo, a lo largo de su recorrido, el robot puede encontrarse con obstáculos que interrumpan su camino.

Estas circunstancias son advertidas por el robot gracias a su sistema sensorial y, como resultado de estos eventos, el robot debe ser capaz de cambiar su conducta para evitar el obstáculo, o incluso replanificar su camino para llegar al destino, lo que se denomina *guiado reactivo*. Para realizar esta tarea el robot puede estar dotado de una amplia variedad de sensores que van desde los más comunes, como los ultrasonidos, infrarrojos o láseres, a otros más complejos o específicos para la tarea a realizar, como los táctiles, de luz, de sonido o sistemas GPS.

El problema de la planificación de caminos puede abordarse con aproximaciones clásicas, como los campos de potencial, o con aproximaciones más modernas, como las técnicas fuzzy.

El *método de campos de potencial* se basa en considerar el movimiento en un campo de fuerzas donde los obstáculos generan fuerzas repulsoras y la posición objetivo una fuerza atractora. Este procedimiento presenta problemas cuando el robot encuentra obstáculos en forma de U, ya que queda atrapado en un mínimo de potencial, y también cuando las posiciones de los obstáculos no son conocidas.

Las *técnicas de control borroso o difuso*, por su parte, se basan en aplicar la lógica borrosa, que surge para representar magnitudes imprecisas o “difusas”. Estas técnicas se han aplicado a la robótica en sistemas en los que son difícilmente aplicables las técnicas clásicas y en sistemas en los que no se conoce con exactitud el modelo. De hecho, la motivación para utilizar esta teoría en el control surge de la idea de modelar las imprecisiones en el conocimiento del comportamiento del sistema a través de conjuntos borrosos y de reglas definidas de una manera vaga o poco precisa. Definiendo las variables del sistema como

variables lingüísticas, de tal manera que los valores que puedan tomar son también términos lingüísticos (modelados como conjuntos borrosos), y estableciendo las reglas en función de dichas variables, se puede establecer un método general para el control de estos sistemas: el control borroso. Frente a otros planteamientos, como las redes neuronales, el control borroso permite realizar estudios de estabilidad de una manera relativamente sencilla, y por lo tanto definir las condiciones en las cuales no se producirá un mal funcionamiento del sistema.

### Referencias

- R.C. Arkin: *Behaviour based robotics*. MIT Press, 1997.
- A. Barrientos, L.F. Peñín, C. Balaguer, F. Aracil: *Fundamentos de robótica*. McGraw-Hill, 1997.
- J. Canny: *The complexity of robot motion planning*. MIT Press, 1988.
- J. Craig: *Introduction to robotics, mechanics and control*. Addison Wesley, 1985.
- K.S. Fu, R.C. González, C.S.G. Lee: *Robótica: Control, detección, visión e inteligencia*. McGraw-Hill, 1988.
- A. Ollero: *Robótica: Manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2001.
- R.P. Paul: *Robot manipulators: Mathematics, programming and control*. MIT Press, 1982.
- M.W. Spong, M. Vidyasagar: *Robot dynamics and control*. John Wiley and Sons, 1989.
- F. Torres, J. Pomares, P. Gil, S.T. Puente, F. Aracil: *Robots y sistemas sensoriales*. Prentice Hall, 2002.