1. Sean A y B conjuntos medibles acotados. Demostrar que:
   (a) $V(A \setminus B) = V(A) - V(A \cap B)$;
   (b) $V(A \cup B) + V(A \cap B) = V(A) + V(B)$.
2. Demostrar que si A, B y C son medibles acotados, entonces:
$$V(A \cup B \cup C) = V(A) + V(B) + V(C) - V(A \cap B) - V(A \cap C) - V(B \cap C) + V(A \cap B \cap C).$$
3. Demostrar que cualquier recta en $\mathbb{R}^2$ tiene área cero.
4. Sean $m \in \mathbb{N}$, $f(x) = e^x$ e $Y = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m$, donde para $k = 1, 2, \cdots, m$, $I_k = \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right] \times \left[0, f\left(\frac{k}{m}\right)\right]$. Encontrar el área $V_2(Y)$ y demostrar que dicha área es, aproximadamente, $e - 1$ si m es suficientemente grande.
5. Sea $A_0 = B\left((0,0); 1\right)$. Para $k = 1, 2, \cdots$, sea $A_k = B\left((1 - 4^{-k}, 0); 4^{-(k+1)}\right)$. Si $A = A_0 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$, probar que $V_2(A) = \frac{239}{240}\pi$.
6. (a) Sea $A = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset]0,1[$. Dado $0 < \varepsilon < 1$, sean $\varepsilon_k = \varepsilon 2^{-(k+1)}$, $I_k =]x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k[$ y $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Demostrar que $V_1(G) \leq \varepsilon$.
   (b) En particular, sea $A =]0,1[\cap \mathbb{Q}$. Entonces $K = [0,1] \setminus G$ es un subconjunto compacto de números irracionales. Demostrar que $V_1(K) \geq 1 - \varepsilon$.
7. Probar que $V_1(C) = 0$, donde C es el conjunto de Cantor.
8. Demostrar que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$.
9. Sea $f(x) = 0$ para todo x en el conjunto de Cantor y $f(x) = p$ en cada intervalo complementario de longitud 3^{-p}. Probar que f es medible, con $\int_0^1 f(x)\, dx = 3$.
10. Se define la función f sobre $]0,1[$ poniendo $f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]^{-1}$ si x es irracional, donde $[x]$ denota la parte entera de x. Demostrar que f es medible, con $\int_0^1 f(x)\, dx < \infty$.
11. Mediante un ejemplo, probar que en el Lema de Fatou puede darse la desigualdad estricta.
12. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, convergente a f c.t.p., tal que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx < \infty.$$
Demostrar que
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx$$
para todo conjunto medible E.
13. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables y sea g una función integrable tal que $f_n \geq g$ para cada n. Probar que $\liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$.
14. (a) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Probar con un ejemplo que, en general, nada se puede afirmar sobre los valores relativos de
$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx, \qquad \int \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

(b) Encontrar un contraejemplo que invalide el Lema de Fatou para funciones integrables reales.

(c) Demostrar que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles reales tales que $|f_n| \leq g$ para cada n y cierta función integrable g, entonces

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\, dx,$$

y hallar un ejemplo donde las desigualdades sean estrictas.

15. Sea $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, donde f es una función medible no negativa. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx.$$

16. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas y finitas, puntualmente decreciente a una función f. Demostrar que si $\int f_k(x)\, dx < \infty$ para algún k, entonces $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx$, y dar un ejemplo de que $\int f_k(x)\, dx = \infty$ para todo k no implica necesariamente $\int f(x)\, dx = \infty$.

17. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables, puntualmente creciente a f. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx.$$

18. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles acotadas, uniformemente convergente a f en $[0,1]$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

¿Sigue valiendo el resultado si se reemplaza el intervalo $[0,1]$ por toda la recta real?.

19. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|\, dx < \infty$. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge c.t.p. a una función integrable f, y que

$$\int f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\, dx.$$

20. Probar que si $\alpha > 1$, entonces

$$\int_0^1 \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + (nx)^\alpha}\, dx = o(n^{-1}) \quad \text{para } n \to \infty.$$

21. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n x^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

22. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2}\, dx = 0$$

para $a > 0$, pero no para $a = 0$.

23. Demostrar que

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1 - x} \log \frac{1}{x}\, dx = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+4)^2}.$$

24. Establecer la igualdad

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x \log x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)(2n)!}.$$

25. Probar que
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{e^t - x}\, dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n-1}}{n^2+1} \quad (-1 \le x \le 1).$$

26. Demostrar que si $f, g \in L^1$, entonces $\left|f^2 + g^2\right|^{\frac{1}{2}} \in L^1$.

27. Probar que si $p > 0$ y $0 < a < \infty$, entonces:

    (a) $x^{-\frac{1}{p}} \in L^{p-\sigma}(0,a)$ para $0 < \sigma < p$, pero no si $\sigma = 0$;

    (b) $x^{-\frac{1}{p}} \left(\log \dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{p}} \in L^{p+\sigma}(0,a)$ para $\sigma = 0$, pero no si $\sigma > 0$.

28. Demostrar que si $0 < a < \infty$ y $0 < p < \infty$, entonces $\log x^{-1} \in L^p(0,a)$.

29. Probar que si $0 < a < \infty$ entonces $e^{\frac{1}{x}} \notin L^p(0,a)$ para ningún p, $0 < p \le \infty$.

30. Demostrar que las siguientes desigualdades son inconsistentes para funciones $f \in L^2(0,\pi)$:
$$\int_0^\pi (f(x) - \operatorname{sen} x)^2\, dx \le \frac{4}{9}, \quad \int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2\, dx \le \frac{1}{9}.$$

31. Probar que $\displaystyle\int_0^\pi x^{-\frac{1}{4}} \operatorname{sen} x\, dx \le \pi^{\frac{3}{4}}$.

32. Sean f, g funciones medibles no negativas. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad en la desigualdad de Hölder es que existan constantes s, t no simultáneamente nulas tales que $sf^p + tg^q = 0$ c.t.p..

33. Probar que se obtiene la igualdad en la desigualdad de Minkowski para $p = 1$ si, y sólo si, en c.t.p. es $fg = 0$ ó signo f = signo g; y para $p > 1$ si, y sólo si, $sf = tg$ c.t.p., donde s, t son constantes no negativas, no simultáneamente nulas.

34. Establecer la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: Si $k_1, \cdots, k_n > 1$, con $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} = 1$, y si $f_i \in L^{k_i}$ para cada i, entonces
$$\int |f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)|\, dx \le \left(\int |f_1(x)|^{k_1}\, dx\right)^{\frac{1}{k_1}} \cdots \left(\int |f_n(x)|^{k_n}\, dx\right)^{\frac{1}{k_n}},$$
con igualdad si, y sólo si, alguna f_i es nula c.t.p., ó para cada par i, j existen constantes no nulas c_i, c_j tales que $c_i |f_i|^{k_i} = c_j |f_j|^{k_j}$.