1

La integral de Riemann sobre rectángulos

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .



1. La integral de funciones escalonadas

Definición 1.1 *Un* rectángulo cerrado Q *en* \mathbb{R}^2 *es el producto cartesiano de dos intervalos reales cerrados* [a, b] y [c, d]:

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \le x \le b, \ c \le y \le d\}.$$

Un rectángulo abierto I en \mathbb{R}^2 es el producto cartesiano de dos intervalos reales abiertos [a,b[y]c,d[:

$$I =]a, b[\times]c, d[= \{(x, y) : a < x < b, \ c < y < d\}.$$

Salvo indicación en contra, el término *rectángulo* hará referencia a un rectángulo *cerrado*.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .



Atrás
Página 2 de 2



Definición 1.2 *Una* partición de un rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ es el producto cartesiano $P = P_1 \times P_2$, donde

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\},$$

 $P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\}$

son particiones de [a, b] y [c, d], respectivamente.

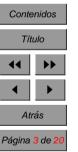
Nótese que, en la Definición 1.2, la partición $P = P_1 \times P_2$ divide a Q en $m \cdot n$ rectángulos abiertos $]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[\ (i, j \in \mathbb{N}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m).$

Definición 1.3 Los rectángulos abiertos determinados por una partición P de un rectángulo Q se denominan subrectángulos de la partición P o del rectángulo Q.

Definición 1.4 Dadas dos particiones P, P' de un rectángulo Q, se dirá que P' es más fina que P si $P \subset P'$.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .





Definición 1.5 *Una función* f *definida y acotada en un rectángulo* Q *se llama* escalonada *si existe una partición* P *de* Q *tal que* f *es constante en cada uno de los subrectángulos abiertos de* P.

Si P es una partición del rectángulo Q en $m \cdot n$ subrectángulos

$${Q_{ij}: i, j \in \mathbb{N}, \ 1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$$

y f es una función escalonada que toma el valor c_{ij} en el subrectángulo Q_{ij} $(i, j \in \mathbb{N}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m)$, podemos escribir

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \chi_{Q_{ij}}(x,y)$$
 $((x,y) \in Q \setminus \bigcup_{i,j=1}^{n,m} \partial Q_{ij}),$

donde, para $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

es la función característica de A.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .



Página 4 de 2

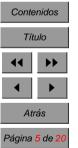


Proposición 1.6 El espacio $\mathcal{E}(Q)$ de las funciones escalonadas sobre un rectángulo Q es un espacio vectorial real con la suma y el producto por escalares definidas punto a punto.

A continuación definimos ya la integral doble de funciones escalonadas.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .





Definición 1.7 Sea P una partición de Q en $m \cdot n$ subrectángulos

$$Q_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$$
 $(i, j \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m),$

y sea $f \in \mathcal{E}(Q)$ que toma el valor c_{ij} en Q_{ij} $(i, j \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$. Se define la integral doble de f sobre Q por la fórmula

$$\iint_{Q} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \Delta x_{i} \Delta y_{j},$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \qquad (i, j \in \mathbb{N}, \ 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m).$$

Esta integral también se representa en la forma

$$\iint_{O} f(x,y) \ dx \ dy.$$

Proposición 1.8 Si $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f \in \mathcal{E}(Q)$, entonces

$$\iint_{Q} f = \int_{c}^{d} \left[\int_{a}^{b} f(x, y) \, dx \right] \, dy = \int_{a}^{b} \left[\int_{c}^{d} f(x, y) \, dy \right] \, dx.$$

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de...

La integral de . . .



Atrás

Página 6 de



Proposición 1.9 Sean $s, t \in \mathcal{E}(Q)$. Se verifican las propiedades siguientes:

• (LINEALIDAD) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\iint_{Q} (\lambda s + \mu t) = \lambda \iint_{Q} s + \mu \iint_{Q} t.$$

• (ADITIVIDAD) Si Q es unión disjunta de rectángulos Q_1 y Q_2 , entonces

$$\iint_{Q} s = \iint_{Q_1} s + \iint_{Q_2} s.$$

■ (COMPARACION O MONOTONIA) Si $s(x,y) \le t(x,y)$ ($(x,y) \in Q$), entonces

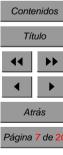
$$\iint_Q s \le \iint_Q t.$$

En particular, $t(x,y) \ge 0 \ ((x,y) \in Q)$ implica

$$\iint_{Q} t \ge 0.$$

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .





2. La integral de funciones definidas y acotadas sobre rectángulos

Sea Q un rectángulo y sea $f:Q\to\mathbb{R}$ tal que $\mid f(x,y)\mid\leq M\ ((x,y)\in Q).$ Pongamos

$$S = \{ s \in \mathcal{E}(Q) : s(x, y) \le f(x, y) \ ((x, y) \in Q) \},\$$

$$T = \{ t \in \mathcal{E}(Q) : f(x, y) \le t(x, y) \ ((x, y) \in Q) \}.$$

Nótese que S y T no son vacíos, ya que la función constantemente igual a -M está en S mientras que la función constantemente igual a M pertenece a T.



La integral de . . .

La integral de . . .





Página 8 de 20

Definición 2.1 En las condiciones anteriores, si existe un único $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$\iint_{O} s \le I \le \iint_{O} t \qquad (s \in S, \ t \in T),$$

entonces el número I se llama integral doble de f en Q y se denota

$$\iint_{Q} f, \qquad o \text{ bien } \qquad \iint_{Q} f(x, y) \ dx \ dy,$$

diciéndose en tal caso que f es integrable sobre Q.

Definición 2.2 *Se llama* integral inferior de f en Q *al número real*

$$\underline{I}(f) = \sup \left\{ \iint_{Q} s : s \in S \right\}$$

e integral superior de f en Q al número real

$$\overline{I}(f) = \inf \left\{ \iint_{O} t : t \in T \right\}.$$

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .



La integral de f sobre Q no tiene por qué existir, pero las integrales inferior y superior siempre existen. La relación entre la integral de f y sus integrales inferior y superior vienen dadas por la siguiente Proposición 2.3, que caracteriza la integrabilidad de las funciones acotadas sobre rectángulos.

Proposición 2.3 Toda función f acotada en un rectángulo Q tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\overline{I}(f)$, que satisfacen

$$\iint_{Q} s \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le \iint_{Q} t$$

para cualesquiera $s,t \in \mathcal{E}(Q)$ tales que $s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y)$ $((x,y) \in Q)$. Además, f es integrable sobre Q si, y sólo si, $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, y en tal caso

$$\iint_{Q} f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Proposición 2.4 Las propiedades de linealidad, aditividad y monotonía valen para funciones acotadas integrables sobre un rectángulo Q.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .





Página 10 de

A continuación extenderemos a funciones acotadas integrables el resultado de la Proposición 1.8.

Proposición 2.5 Sea f definida y acotada en $Q = [a, b] \times [c, d]$. Sea f integrable en Q. Si para cada $g \in [c, d]$ existe

$$\int_{a}^{b} f(x, y) \ dx = A(y)$$

y además existe

$$\int_{c}^{d} A(y) \ dy,$$

entonces

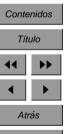
$$\iint_{Q} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{c}^{d} A(y) \, dy = \int_{c}^{d} dy \int_{a}^{b} f(x,y) \, dx.$$

Bajo las hipótesis oportunas, se obtiene una fórmula parecida para calcular la integral doble mediante integrales iteradas invirtiendo el orden de integración.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .





Página 11 de 2

La Proposición 2.5 permite interpretar geométricamente la integral doble como un volumen. Si $Q = [a,b] \times [c,d]$ y $f:Q \to \mathbb{R}$ es una función acotada y no negativa, el conjunto

$$\mathcal{O}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, \ 0 \le z \le f(x, y)\}$$

recibe el nombre de *conjunto de ordenadas* de f. Para cada $y_0 \in [c,d]$ fijo, la interpretación geométrica de la integral de funciones de una variable nos dice que $A(y_0)$ representa el área de la sección producida en $\mathcal{O}(f)$ por el plano $y=y_0$. Por tanto, la integral de A(y) en el intervalo [c,d] proporciona el volumen de $\mathcal{O}(f)$.

El siguiente Teorema 2.6 pone de manifiesto que la integral doble de funciones continuas se puede calcular como una integral iterada en cualquier orden.

Teorema 2.6 (Fubini) Si f es continua en $Q = [a, b] \times [c, d]$, entonces f es integrable sobre Q y se verifica

$$\iint_{Q} f(x,y) \, dx \, dy = \int_{a}^{b} \, dx \int_{c}^{d} f(x,y) \, dy = \int_{c}^{d} \, dy \int_{a}^{b} f(x,y) \, dx.$$

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .



Atrás

Página 12 de



Ejemplo 2.7 Sea $Q = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$. Demostrar que la integral

$$\iint_{Q} (x \operatorname{sen} y - y e^{x}) \, dx \, dy$$

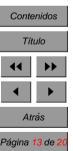
existe y calcularla.

Nuestro próximo objetivo es analizar la integrabilidad de funciones acotadas con discontinuidades.

Hemos visto (Teorema 2.6) que las funciones continuas son integrables Riemann sobre rectángulos. Por contra, las funciones muy discontinuas no son integrables Riemann, como muestra el siguiente ejemplo.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .





Veremos a continuación que una función es integrable Riemann con tal de que su conjunto de discontinuidades no sea demasiado grande. Para medir el tamaño de dicho conjunto introduciremos el siguiente concepto.

Definición 2.9 (Conjunto de contenido nulo) Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado. Se dice que A tiene contenido nulo si dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita I_1, \ldots, I_n de rectángulos abiertos tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$
 y $\sum_{i=1}^{n} |I_i| < \varepsilon$,

donde | I_i | denota el área de I_i $(1 \le i \le n)$.

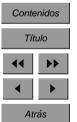
Ejemplo 2.10 *Tienen contenido nulo:*

- *Los conjuntos unitarios.*
- *Las uniones finitas de conjuntos de contenido nulo.*
- *Los conjuntos finitos.*

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .





Página 14 de

- Los subconjuntos de conjuntos de contenido nulo.
- Los segmentos de recta en el plano.

Ejercicio 2.11 Demostrar que en la definición de "conjunto de contenido nulo" se pueden reemplazar los rectángulos abiertos por rectángulos cerrados.

Proposición 2.12 Si f es una función acotada en un rectángulo Q cuyo conjunto de puntos de discontinuidad tiene contenido nulo, entonces f es integrable sobre Q.

El siguiente ejemplo muestra que no se verifica el recíproco de la Proposición 2.12.



La integral de . . .





Ejemplo 2.13 Sea $I = [0,1] \times [0,1]$ el cuadrado unidad, y definamos $f: I \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ o } y = 0\\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ o } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\\ \frac{1}{r+s}, & x = p/r, y = q/s \in \mathbb{Q} \text{ irreducibles, } r, s \in \mathbb{N},\\ p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

El conjunto de discontinuidades de f es

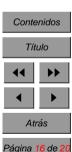
$$D(f) = I \cap \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Aunque D(f) no tiene contenido nulo, f es integrable sobre I.

Para caracterizar la integrabilidad de las funciones discontinuas y describir la clase de las funciones integrables Riemann se precisa de los conjuntos de medida nula.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .





Definición 2.14 Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es de medida nula si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de rectángulos abiertos tales que

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$
 y $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

Ejemplo 2.15 *Tienen medida nula:*

- Todo subconjunto de un conjunto de medida nula.
- La unión numerable de conjuntos de medida nula.
- *Todo conjunto numerable.*
- Todo conjunto de contenido nulo (el recíproco es falso, a menos que se trate de un conjunto compacto).

Teorema 2.16 (Lebesgue) Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función acotada en el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$. Se tiene que f es integrable sobre I si, y sólo si, el conjunto de las discontinuidades de f en I tiene medida nula.



La integral de . . .

La integral de . . .





Atrás Página 17 de **Corolario 2.17** Sean f, g funciones reales definidas y acotadas sobre el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que f, g son integrables sobre I. Se verifica:

- Si J es un subrectángulo de I, entonces f es integrable sobre J.
- Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ es integrable sobre I.
- $Si \mid g(\overline{x}) \mid \geq k \ (\overline{x} \in I)$ para cierto k > 0, entonces f/g es integrable sobre I.
- \blacksquare | f | es integrable sobre I, con

$$|\iint_{I} f | \leq \iint_{I} |f|.$$

- $Si \ f = g \ salvo \ en \ un \ conjunto \ de \ medida \ nula, entonces \ f \ es \ integrable \ si, y \ sólo \ si, g \ lo \ es.$
- $Si\ f,g$ tienen los mismos puntos de discontinuidad, entonces una de ellas es integrable si,y sólo si,lo es la otra.
- Si f es integrable sobre I, si m, M son respectivamente el ínfimo y el supremo de los valores que toma f sobre I, y si φ es una función real continua en [m, M], entonces $\varphi \circ f$ es integrable sobre I.

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .

La integral de . . .





Atrás Página 18 de Teorema 2.18 (Primer teorema de la media sobre rectángulos) Sea f una función real acotada en el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$.

■ Si f es integrable Riemann sobre I y si m, M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de los valores que toma f sobre I, entonces existe $h \in [m, M]$ tal que

$$\iint_{I} f = h \mid I \mid .$$

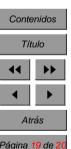
• Si, además, f es continua en I entonces existe $\overline{\xi} \in I$ tal que

$$\iint_{I} f = f(\overline{\xi}) \mid I \mid .$$

Teorema 2.19 (Segundo teorema de la media sobre rectángulos) Sean f, g dos funciones reales acotadas en el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que g es integrable Riemann sobre I y que $g(\overline{x}) \geq 0$ ($\overline{x} \in I$).



La integral de . . .





■ Si f es integrable Riemann sobre I y si m, M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de los valores que toma f sobre I, entonces existe $h \in [m, M]$ tal que

$$\iint_{I} fg = h \iint_{I} g.$$

• Si f es continua en I entonces existe $\bar{\xi} \in I$ tal que

$$\iint_{I} fg = f(\overline{\xi}) \iint_{I} g.$$

LA INTEGRAL DE RIEMANN MULTIPLE

La integral de . . .



