1

La integral de Riemann sobre rectángulos

1. La integral de funciones escalonadas

Definición 1.1 *Un* rectángulo cerrado Q *en* $\mathbb{R}^2$ *es el producto cartesiano de dos intervalos reales cerrados* $[a,b]$ *y* $[c,d]$*:*

$$Q = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}\,.$$

Un rectángulo abierto I *en* $\mathbb{R}^2$ *es el producto cartesiano de dos intervalos reales abiertos* $]a,b[$ *y* $]c,d[$*:*

$$I =]a,b[\times]c,d[= \{(x,y) : a < x < b,\ c < y < d\}\,.$$

Salvo indicación en contra, el término *rectángulo* hará referencia a un rectángulo *cerrado.*

Definición 1.2 *Una* partición *de un rectángulo* $Q = [a, b] \times [c, d]$ *es el producto cartesiano* $P = P_1 \times P_2$*, donde*

$$P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\},$$

$$P_2 = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d\}$$

son particiones de $[a, b]$ *y* $[c, d]$*, respectivamente.*

Nótese que, en la Definición 1.2, la partición $P = P_1 \times P_2$ divide a Q en $m \cdot n$ rectángulos abiertos $]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$ $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$.

Definición 1.3 *Los rectángulos abiertos determinados por una partición* P *de un rectángulo* Q *se denominan* subrectángulos *de la partición* P *o del rectángulo* Q*.*

Definición 1.4 *Dadas dos particiones* P*,* P' *de un rectángulo* Q*, se dirá que* P' *es más fina que* P *si* $P \subset P'$*.*

Definición 1.5 *Una función f definida y acotada en un rectángulo Q se llama* escalonada *si existe una partición P de Q tal que f es constante en cada uno de los subrectángulos abiertos de P.*

Si P es una partición del rectángulo Q en $m \cdot n$ subrectángulos

$$\{Q_{ij} : i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

y f es una función escalonada que toma el valor c_{ij} en el subrectángulo Q_{ij} $(i, j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$, podemos escribir

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \chi_{Q_{ij}}(x, y) \qquad ((x, y) \in Q \setminus \bigcup_{i,j=1}^{n,m} \partial Q_{ij}),$$

donde, para $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

es la *función característica* de A.

Proposición 1.6 *El espacio $\mathcal{E}(Q)$ de las funciones escalonadas sobre un rectángulo Q es un espacio vectorial real con la suma y el producto por escalares definidas punto a punto.*

A continuación definimos ya la integral doble de funciones escalonadas.

Definición 1.7 *Sea P una partición de Q en $m \cdot n$ subrectángulos*

$$Q_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[\qquad (i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m),$$

y sea $f \in \mathcal{E}(Q)$ que toma el valor c_{ij} en Q_{ij} $(i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$. Se define la integral doble de f sobre Q *por la fórmula*

$$\iint_Q f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

donde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \qquad (i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m).$$

Esta integral también se representa en la forma

$$\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy.$$

Proposición 1.8 *Si $Q = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathcal{E}(Q)$, entonces*

$$\iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx.$$

Proposición 1.9 *Sean $s, t \in \mathcal{E}(Q)$. Se verifican las propiedades siguientes:*

- *(LINEALIDAD) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*
$$\iint_Q (\lambda s + \mu t) = \lambda \iint_Q s + \mu \iint_Q t.$$
- *(ADITIVIDAD) Si Q es unión disjunta de rectángulos Q_1 y Q_2, entonces*
$$\iint_Q s = \iint_{Q_1} s + \iint_{Q_2} s.$$
- *(COMPARACION O MONOTONIA) Si $s(x,y) \leq t(x,y)$ $((x,y) \in Q)$, entonces*
$$\iint_Q s \leq \iint_Q t.$$
En particular, $t(x,y) \geq 0$ $((x,y) \in Q)$ implica
$$\iint_Q t \geq 0.$$

2. La integral de funciones definidas y acotadas sobre rectángulos

Sea Q un rectángulo y sea $f : Q \to \mathbb{R}$ tal que $| f(x,y) | \leq M \ ((x,y) \in Q)$. Pongamos

$$S = \{s \in \mathcal{E}(Q) : s(x,y) \leq f(x,y) \ ((x,y) \in Q)\},$$

$$T = \{t \in \mathcal{E}(Q) : f(x,y) \leq t(x,y) \ ((x,y) \in Q)\}.$$

Nótese que S y T no son vacíos, ya que la función constantemente igual a $-M$ está en S mientras que la función constantemente igual a M pertenece a T.

Definición 2.1 *En las condiciones anteriores, si existe un único* $I \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\iint_Q s \leq I \leq \iint_Q t \qquad (s \in S,\ t \in T),$$

entonces el número I *se llama* integral doble de f en Q *y se denota*

$$\iint_Q f, \qquad \textit{o bien} \qquad \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy,$$

diciéndose en tal caso que f *es* integrable *sobre* Q*.*

Definición 2.2 *Se llama* integral inferior de f en Q *al número real*

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\iint_Q s : s \in S\right\}$$

e integral superior de f en Q *al número real*

$$\overline{I}(f) = \inf\left\{\iint_Q t : t \in T\right\}.$$

La integral de f sobre Q no tiene por qué existir, pero las integrales inferior y superior siempre existen. La relación entre la integral de f y sus integrales inferior y superior vienen dadas por la siguiente Proposición 2.3, que caracteriza la integrabilidad de las funciones acotadas sobre rectángulos.

Proposición 2.3 *Toda función f acotada en un rectángulo Q tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\overline{I}(f)$, que satisfacen*

$$\iint_Q s \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \iint_Q t$$

para cualesquiera $s, t \in \mathcal{E}(Q)$ tales que $s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y)$ $((x, y) \in Q)$. Además, f es integrable sobre Q si, y sólo si, $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, y en tal caso

$$\iint_Q f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Proposición 2.4 *Las propiedades de linealidad, aditividad y monotonía valen para funciones acotadas integrables sobre un rectángulo Q.*

A continuación extenderemos a funciones acotadas integrables el resultado de la Proposición 1.8.

Proposición 2.5 *Sea f definida y acotada en $Q = [a,b] \times [c,d]$. Sea f integrable en Q. Si para cada $y \in [c,d]$ existe*

$$\int_a^b f(x,y)\, dx = A(y)$$

y además existe

$$\int_c^d A(y)\, dy,$$

entonces

$$\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Bajo las hipótesis oportunas, se obtiene una fórmula parecida para calcular la integral doble mediante integrales iteradas invirtiendo el orden de integración.

La Proposición 2.5 permite interpretar geométricamente la integral doble como un volumen. Si $Q = [a, b] \times [c, d]$ y $f : Q \to \mathbb{R}$ es una función acotada y no negativa, el conjunto

$$\mathcal{O}(f) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q,\ 0 \le z \le f(x, y)\right\}$$

recibe el nombre de *conjunto de ordenadas* de f. Para cada $y_0 \in [c, d]$ fijo, la interpretación geométrica de la integral de funciones de una variable nos dice que $A(y_0)$ representa el área de la sección producida en $\mathcal{O}(f)$ por el plano $y = y_0$. Por tanto, la integral de $A(y)$ en el intervalo $[c, d]$ proporciona el volumen de $\mathcal{O}(f)$.

El siguiente Teorema 2.6 pone de manifiesto que la integral doble de funciones continuas se puede calcular como una integral iterada en cualquier orden.

Teorema 2.6 (Fubini) *Si f es continua en $Q = [a, b] \times [c, d]$, entonces f es integrable sobre Q y se verifica*

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Ejemplo 2.7 *Sea* $Q = [-1,1] \times [0, \pi/2]$. *Demostrar que la integral*

$$\iint_Q (x \operatorname{sen} y - ye^x)\, dx\, dy$$

existe y calcularla.

Nuestro próximo objetivo es analizar la integrabilidad de funciones acotadas con discontinuidades.

Hemos visto (Teorema 2.6) que las funciones continuas son integrables Riemann sobre rectángulos. Por contra, las funciones muy discontinuas no son integrables Riemann, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8 (Función de Dirichlet) *Sea* $I = [0,1] \times [0,1]$ *el cuadrado unidad, y sea* $f = \chi_{I \cap \mathbb{Q}^2}$ *la función característica de los puntos de* I *con coordenadas racionales. Un cálculo sencillo demuestra que la integral inferior de* f *sobre* Q *vale* 0*, mientras que la integral superior de* f *sobre* Q *es igual a* 1*. En virtud de la Proposición 2.3,* f *no es integrable Riemann sobre* Q.

Veremos a continuación que una función es integrable Riemann con tal de que su conjunto de discontinuidades no sea demasiado grande. Para medir el tamaño de dicho conjunto introduciremos el siguiente concepto.

Definición 2.9 (Conjunto de contenido nulo) *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado. Se dice que A tiene* contenido nulo *si dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita $I_1, \ldots, I_n$ de rectángulos abiertos tal que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{n} | I_i | < \varepsilon,$$

donde $| I_i |$ denota el área de I_i $(1 \leq i \leq n)$.

Ejemplo 2.10 *Tienen contenido nulo:*

- *Los conjuntos unitarios.*
- *Las uniones finitas de conjuntos de contenido nulo.*
- *Los conjuntos finitos.*

- *Los subconjuntos de conjuntos de contenido nulo.*
- *Los segmentos de recta en el plano.*

Ejercicio 2.11 *Demostrar que en la definición de "conjunto de contenido nulo" se pueden reemplazar los rectángulos abiertos por rectángulos cerrados.*

Proposición 2.12 *Si f es una función acotada en un rectángulo Q cuyo conjunto de puntos de discontinuidad tiene contenido nulo, entonces f es integrable sobre Q.*

El siguiente ejemplo muestra que no se verifica el recíproco de la Proposición 2.12.

Ejemplo 2.13 *Sea* $I = [0,1] \times [0,1]$ *el cuadrado unidad, y definamos* $f : I \to \mathbb{R}$ *mediante*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ó } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{r+s}, & x = p/r, y = q/s \in \mathbb{Q} \text{ irreducibles}, r, s \in \mathbb{N}, \\ & p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

El conjunto de discontinuidades de f *es*

$$D(f) = I \cap \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Aunque $D(f)$ *no tiene contenido nulo,* f *es integrable sobre* I*.*

Para caracterizar la integrabilidad de las funciones discontinuas y describir la clase de las funciones integrables Riemann se precisa de los conjuntos de medida nula.

Definición 2.14 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es de* medida nula *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de rectángulos abiertos tales que*

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} | I_n | < \varepsilon.$$

Ejemplo 2.15 *Tienen medida nula:*

- *Todo subconjunto de un conjunto de medida nula.*
- *La unión numerable de conjuntos de medida nula.*
- *Todo conjunto numerable.*
- *Todo conjunto de contenido nulo (el recíproco es falso, a menos que se trate de un conjunto compacto).*

Teorema 2.16 (Lebesgue) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada en el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$. Se tiene que f es integrable sobre I si, y sólo si, el conjunto de las discontinuidades de f en I tiene medida nula.*

Corolario 2.17 *Sean f, g funciones reales definidas y acotadas sobre el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que f, g son integrables sobre I. Se verifica:*

- *Si J es un subrectángulo de I, entonces f es integrable sobre J.*
- *Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ es integrable sobre I.*
- *Si $\mid g(\overline{x}) \mid \geq k$ $(\overline{x} \in I)$ para cierto $k > 0$, entonces f/g es integrable sobre I.*
- *$\mid f \mid$ es integrable sobre I, con*

$$\mid \iint_I f \mid \leq \iint_I \mid f \mid .$$

- *Si $f = g$ salvo en un conjunto de medida nula, entonces f es integrable si, y sólo si, g lo es.*
- *Si f, g tienen los mismos puntos de discontinuidad, entonces una de ellas es integrable si, y sólo si, lo es la otra.*
- *Si f es integrable sobre I, si m, M son respectivamente el ínfimo y el supremo de los valores que toma f sobre I, y si φ es una función real continua en $[m, M]$, entonces $\varphi \circ f$ es integrable sobre I.*

Teorema 2.18 (Primer teorema de la media sobre rectángulos) *Sea f una función real acotada en el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$.*

- *Si f es integrable Riemann sobre I y si m, M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de los valores que toma f sobre I, entonces existe $h \in [m, M]$ tal que*

$$\iint_I f = h \mid I \mid .$$

- *Si, además, f es continua en I entonces existe $\overline{\xi} \in I$ tal que*

$$\iint_I f = f(\overline{\xi}) \mid I \mid .$$

Teorema 2.19 (Segundo teorema de la media sobre rectángulos) *Sean f, g dos funciones reales acotadas en el rectángulo $I \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que g es integrable Riemann sobre I y que $g(\overline{x}) \geq 0$ $(\overline{x} \in I)$.*

- *Si f es integrable Riemann sobre I y si m, M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo de los valores que toma f sobre I, entonces existe $h \in [m, M]$ tal que*

$$\iint_I fg = h \iint_I g.$$

- *Si f es continua en I entonces existe $\bar{\xi} \in I$ tal que*

$$\iint_I fg = f(\bar{\xi}) \iint_I g.$$