2

La integral de Riemann extendida a recintos más generales

1. Regiones de tipo I y de tipo II

Hemos definido $\iint_I f$ cuando I es un rectángulo; se trata de extender esta definición a recintos más generales.

Sea S un conjunto acotado; existe un rectángulo Q que contiene a S. Definimos una nueva función $\tilde{f}$ sobre Q como sigue:

$$\tilde{f}(\overline{x}) = \begin{cases} f(\overline{x}) & (\overline{x} \in S) \\ 0 & (\overline{x} \in Q \setminus S). \end{cases}$$

Si $\tilde{f}$ es integrable sobre Q, decimos que f es integrable en S y definimos

$$\iint_S f = \iint_Q \tilde{f}.$$

Es fácil comprobar que esta definición no depende del rectángulo Q que contenga a S.

Las regiones S que consideraremos serán de dos tipos básicos (denominados de tipo I ó tipo II), o uniones finitas de regiones de alguno de estos tipos.

Llamaremos región de tipo I, respectivamente de tipo II, a una región de la forma

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

respectivamente

$$T = \{(x, y) : c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

donde φ_i, respectivamente ψ_j $(i, j = 1, 2)$, son funciones continuas.

Nótese que tanto las regiones de tipo I como las de tipo II son acotadas.

Nos centraremos en la extensión de la definición de integral para regiones de tipo I; las regiones de tipo II admiten un tratamiento análogo.

Si f está definida y acotada en una región S de tipo I, incluimos S en un rectángulo Q y definimos $\tilde{f}$ en Q como se indicó anteriormente. Las discontinuidades de $\tilde{f}$ en Q serán las que f tenga en S y además aquellos puntos de ∂S donde f no es cero. Pretendemos probar que ∂S tiene contenido nulo, y a tal fin bastará demostrar el siguiente:

Contenidos
Título
Atrás
Página 3 de 7

Teorema 1.1 *Si* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces la gráfica de* φ *tiene contenido nulo.*

Veamos ahora que para que $\iint_S f$ exista es suficiente que f sea continua en $intS$, es decir, en el conjunto

$$intS = \{(x, y) : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}\,.$$

Teorema 1.2 *Sea* S *una región de tipo I, comprendida entre las gráficas de* φ_1 *y* φ_2*. Si* f *está definida y acotada en* S *y es continua en* $intS$*, entonces existe* $\iint_S f$ *y*

$$\iint_S f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Observación 1.3 *En las regiones que son de tipo I y de tipo II simultáneamente (e.g. elipses, circunferencias, ...) el orden de integración puede invertirse. Elegiremos uno u otro atendiendo a la simplicidad de los cálculos involucrados.*

2. Aplicaciones a áreas y volúmenes

Nuevamente nos centramos en regiones de tipo I.

Sea

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}\,.$$

Si $f(x, y) = 1$ $((x, y) \in S)$, obtenemos

$$\iint_S dx\ dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\ dx.$$

La interpretación geométrica de la integral de una variable indica que la integral simple del segundo miembro es el área de S. Por tanto, la integral doble del primer miembro es el área de S.

Si $f(x,y) \geq 0$, el conjunto de los puntos (x,y,z) tales que $(x,y) \in S$ y $0 \leq z \leq f(x,y)$ es denotado $\mathcal{O}(f)$ y denominado *conjunto de ordenadas* de f. La interpretación geométrica de la integral simple indica que para cada x,

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy$$

es el área de la sección del conjunto de ordenadas por un plano paralelo al plano OYZ, a distancia x de éste, y el Teorema 1.2 prueba que

$$\iint_S f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right] dx.$$

es igual al volumen del conjunto de ordenadas de f sobre S.

En general, si $f \leq g$ entonces $\iint_I (g-f)$ es el volumen del sólido delimitado por las gráficas de f y g.

3. Conjuntos medibles Jordan

Definición 3.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ es* medible Jordan *si está acotado y su frontera tiene contenido nulo.*

Ejemplo 3.2 *Las regiones de tipo I y tipo II son conjuntos medibles Jordan.*

Teorema 3.3 (Lebesgue) *Una función real f, definida y acotada en un conjunto medible Jordan $C \subset \mathbb{R}^2$, es integrable en C si, y sólo si, el conjunto de discontinuidades de f en C tiene medida nula.*

Es posible entonces desarrollar una teoría de la integración sobre conjuntos medibles en la que tienen cabida resultados análogos a los que hemos probado para rectángulos.