5

Integrales paramétricas

1. Introducción

Muchas de las funciones que se manejan en Análisis Matemático no se conocen mediante expresiones elementales, sino que vienen dadas a través de series o integrales.

Un tipo particular de estas funciones son las llamadas *integrales paramétricas* o *integrales dependientes de parámetros*. Ejemplo de ellas son las expresiones del tipo

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda),$$

donde $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

es integrable Riemann en $[a, b]$ para cada $\lambda \in \Lambda$.

El conocimiento de la regularidad y propiedades del integrando f nos permitirá decidir sobre la regularidad y propiedades de la integral paramétrica F, aún cuando no se disponga de una expresión explícita de F. Una técnica frecuentemente utilizada para el cálculo de determinadas integrales consiste en diferenciar o integrar una integral paramétrica auxiliar.

2. Tipos de integrales paramétricas

2.1. Simples

2.1.1. Límites fijos

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$; y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda, \cdot)$ es integrable Riemann sobre I, para cada $\lambda \in \Lambda$. La función

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

se llama *integral paramétrica simple con límites de integración fijos y parámetro* $\lambda \in \Lambda$.

2.1.2. Límites variables

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, satisfaciendo $a(\lambda) \le b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$;

$$S(a,b) = \left\{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \ : \ \lambda \in \Lambda, \ a(\lambda) \le x \le b(\lambda)\right\};$$

y

$$\begin{array}{rccc} f: & S(a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda, \cdot)$ es integrable Riemann sobre $[a(\lambda), b(\lambda)]$, para cada $\lambda \in \Lambda$. La función

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

se llama *integral paramétrica simple con límites de integración variables y parámetro* $\lambda \in \Lambda$.

2.2. Múltiples

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $M \subset \mathbb{R}^q$, medible Jordan ; y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda, \cdot)$ es integrable Riemann sobre M, para cada $\lambda \in \Lambda$. La función

$$F(\lambda) = \int_M f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

se llama *integral paramétrica múltiple con parámetro* $\lambda \in \Lambda$.

2.2.1. Ejemplo (Integral paramétrica múltiple)

Sean:

$$\Lambda = \left]-\pi/2, \pi/2\right[,$$

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\},$$

$$F(\lambda) = \iint_M \tan(\lambda x)\left[1 + \tan^2(\lambda y)\right]\ dx\, dy = \begin{cases} 0, & \lambda = 0 \\ \dfrac{\tan\lambda - \lambda}{\lambda^2}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

2.3. Reducción de integrales del tipo 2.1.2 al tipo 2.1.1

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, satisfaciendo $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$;

$$S(a,b) = \left\{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \ : \ \lambda \in \Lambda, \ a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda)\right\};$$

y

$$\begin{array}{rccc} f : & S(a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x) \end{array}$$

tal que $f(\lambda, \cdot)$ es continua en $[a(\lambda), b(\lambda)]$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Se verifica:

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = \int_0^1 g(\lambda, t) dt,$$

donde

$$g(\lambda, t) = f\left(\lambda, a(\lambda) + [b(\lambda) - a(\lambda)]\, t\right) [b(\lambda) - a(\lambda)] \qquad (\lambda \in \Lambda, \ t \in [0,1]).$$

2.3.1. Demostración

Para cada $\lambda \in \Lambda$, consideramos

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\lambda : & [0,1] & \longrightarrow & [a(\lambda), b(\lambda)] \\ & t & \longmapsto & \varphi_\lambda(t) = a(\lambda) + [b(\lambda) - a(\lambda)]\, t. \end{array}$$

Esta aplicación es una biyección C^∞ con inversa C^∞, y, por tanto, puede ser tomada como un cambio de variable para aplicar la regla de integración por sustitución:

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = \int_0^1 f(\lambda, \varphi_\lambda(t))\, \varphi_\lambda'(t)\, dt = \int_0^1 g(\lambda, t)\, dt \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

3. Continuidad de las integrales paramétricas

3.1. Simples

3.1.1. Límites fijos

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$; y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

1. Λ es compacto, y
2. f es continua,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es uniformemente continua sobre Λ.

3.1.2. Límites variables

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ funciones que satisfacen $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$;

$$S(a,b) = \left\{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \ : \ \lambda \in \Lambda, \ a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda)\right\};$$

y

$$\begin{array}{rccc} f: & S(a,b) & \to & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \mapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

1. Λ es compacto, y
2. a, b y f son continuas,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es uniformemente continua sobre Λ.

3.2. Múltiples

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $M \subset \mathbb{R}^q$, medible Jordan; y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

1. Λ y M son compactos, y
2. f es continua,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_M f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es uniformemente continua sobre Λ.

3.2.1. Demostración

Ya que 3.1.2 se reduce a 3.1.1(sección 2.3) y éste es un caso particular de 3.2, basta probar 3.2.

Demostración de 3.2

Puesto que f es continua, es continua en cada variable; luego, $f(\lambda, \cdot)$ es integrable Riemann sobre M para todo $\lambda \in \Lambda$, y F existe.

Como Λ se supone compacto, sólo tenemos que comprobar que F es continua sobre Λ, es decir, que F es continua en cada $\lambda_0 \in \Lambda$.

Pongamos

$$| M |= \int_M dx.$$

Si $| M |= 0$, F es idénticamente nula, y no hay nada que probar. Por tanto, supondremos $| M |> 0$.

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$, y sea $\varepsilon > 0$. Al ser f continua en $\Lambda \times M$, que es compacto (producto cartesiano de compactos), f es uniformemente continua en $\Lambda \times M$. Así, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda \in \Lambda$ y $\|\lambda, x) - (\lambda_0, x)\| < \delta$ implica

$$| f(\lambda, x) - f(\lambda_0, x) |< \frac{\varepsilon}{| M |} \qquad (x \in M).$$

Claramente

$$\|\lambda - \lambda_0\| = \|(\lambda, x) - (\lambda_0, x)\| \qquad (\lambda \in \Lambda,\ x \in M),$$

donde en el primer miembro tomamos la norma de $\mathbb{R}^p$ y en el segundo la de $\mathbb{R}^{p+q}$. Luego, para $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta$ podemos escribir

$$\begin{aligned} | F(\lambda) - F(\lambda_0) | &= | \int_M f(\lambda, x)\, dx - \int_M f(\lambda_0, x)\, dx | \\ &= | \int_M [f(\lambda, x)\, dx - f(\lambda_0, x)]\ dx | \\ &\leq \int_M | f(\lambda, x) - f(\lambda_0, x) |\ dx \\ &< \frac{\varepsilon}{| M |} \int_M dx \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

3.2.2. Corolario

En las hipótesis de 3.1.1, 3.1.2 y 3.2 anteriores, respectivamente, los límites siguientes existen y pueden calcularse como se indica, para $\lambda_0 \in \Lambda$:

3.1.1 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_a^b f(\lambda, x)\, dx = \int_a^b f(\lambda_0, x)\, dx;$

3.1.2 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} f(\lambda_0, x)\, dx;$

3.2 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int_M f(\lambda, x)\, dx = \int_M f(\lambda_0, x)\, dx.$

4. Derivación de integrales paramétricas

Los siguientes resultados de derivación de integrales paramétricas se conocen como *Regla de Leibniz*.

4.1. Simples

4.1.1. Límites fijos

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$; y

$$\begin{array}{rcll} f: & \Lambda \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

1. Λ es abierto, y
2. f es continua, con derivada parcial $\partial f / \partial \lambda_i$ continua en $\Lambda \times I$ para algún $i = 1, \ldots, p$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p))$,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es derivable respecto de λ_i, teniéndose que

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_a^b f(\lambda, x)\ dx = \int_a^b \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\ dx \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

4.1.2. Límites variables

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $a : \Lambda \to \mathbb{R}$, $b : \Lambda \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, satisfaciendo $a(\lambda) \leq b(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$;

$$S(a, b) = \left\{ (\lambda, x) \in \mathbb{R}^{p+1}\ :\ \lambda \in \Lambda,\ a(\lambda) \leq x \leq b(\lambda) \right\};$$

U abierto en $\mathbb{R}^{p+1}$ que contiene a $S(a, b)$; y

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

1. Λ es abierto, y
2. a, b y f son continuas, con derivadas parciales $\partial a/\partial\lambda_i$, $\partial b/\partial\lambda_i$ y $\partial f/\partial\lambda_i$ continuas en sus respectivos dominios para algún $i = 1, \ldots, p$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p))$,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es derivable respecto de λ_i, teniéndose que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\lambda)}{\partial\lambda_i} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\; dx \\ &= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial\lambda_i}\, dx + \frac{\partial b(\lambda)}{\partial\lambda_i} f\left(\lambda, b(\lambda)\right) - \frac{\partial a(\lambda)}{\partial\lambda_i} f\left(\lambda, a(\lambda)\right) \qquad (\lambda \in \Lambda).\end{aligned}$$

4.2. Múltiples

Sean: $\Lambda \subset \mathbb{R}^p$; $M \subset \mathbb{R}^q$, medible Jordan; y

$$\begin{array}{rccc} f: & \Lambda \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & f(\lambda, x). \end{array}$$

Si:

1. Λ es abierto;
2. M es compacto; y
3. f es continua, con derivada parcial $\partial f/\partial \lambda_i$ continua para algún $i = 1, \ldots, p$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p))$,

entonces la integral paramétrica

$$F(\lambda) = \int_M f(\lambda, x)\, dx \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

existe y es derivable respecto de λ_i, teniéndose que

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \int_M f(\lambda, x)\; dx = \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\; dx \qquad (\lambda \in \Lambda).$$

4.2.1. Demostración

Puesto que 4.1.1 es un caso particular de 4.2, sólo demostraremos 4.2 y 4.1.2.

Demostración de 4.2

Como antes, suponemos $\mid M \mid > 0$.

Fijemos $\lambda \in \Lambda$. Queremos ver que existe $\partial F(\lambda)/\partial \lambda_i$, y se calcula como se afirma.

Puesto que Λ es abierto, existe $r_\lambda > 0$ tal que la bola cerrada de centro λ y radio r_λ en $\mathbb{R}^p$,

$$B(\lambda, r_\lambda) = \{\mu \in \mathbb{R}^p : \|\lambda - \mu\| \leq r_\lambda\},$$

está contenida en Λ.

Sea e_i el i-ésimo vector unitario canónico de $\mathbb{R}^p$. Debemos demostrar:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} = \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx.$$

La función

$$\rho \mapsto f(\lambda + \rho e_i, x)$$

depende de $x \in M$ y está definida para $|\, \rho \,| \leq r_\lambda$, pues, en tal caso, $\lambda + \rho e_i \in B(\lambda, r_\lambda) \subset \Lambda$:

$$\|(\lambda + \rho e_i) - \lambda\| = \|\rho e_i\| = |\, \rho \,|\, \|e_i\| = |\, \rho \,| \leq r_\lambda.$$

Por el teorema de los incrementos finitos,

$$\begin{aligned} \frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} &= \int_M \frac{f(\lambda + \rho e_i, x) - f(\lambda, x)}{\rho}\, dx \\ &= \int_M \frac{\partial f(\lambda + \theta \rho e_i, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \end{aligned}$$

para cierto $\theta \in (0, 1)$, dependiente de $x \in M$ y de $\rho \in [-r_\lambda, r_\lambda]$. Luego,

$$\begin{aligned} |\, \frac{F(\lambda + \rho e_i) - F(\lambda)}{\rho} - \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \,| &\leq \\ \leq \int_M |\, \frac{\partial f(\lambda + \theta \rho e_i, x)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i} \,|\, dx. \end{aligned}$$

Como $\partial f / \partial \lambda_i$ es continua en el compacto $B(\lambda, r_\lambda) \times M$, es uniformemente continua en dicho compacto. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\, \rho \,| < \delta < r_\lambda$ y $x \in M$, se cumple

$$\left| \frac{\partial f(\lambda+\theta\rho e_i, x)}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i} \right| < \frac{\varepsilon}{|M|}.$$

Concluimos:

$$\left| \frac{F(\lambda+\rho e_i)-F(\lambda)}{\rho} - \int_M \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda_i}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{|M|}\int_M dx = \varepsilon.$$

Demostración de 4.1.2

Nos apoyaremos en 4.1.1, que está probado por ser un caso particular de 4.2.

Puesto que a, b son continuas en Λ, $S(a,b) \subset U$, y U es abierto, dado $\lambda_0 \in \Lambda$ existen $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$ tales que $C_0 \subset U$, siendo

$$C_0 = U(\lambda_0, \delta_0) \times [a(\lambda_0) - h_0, b(\lambda_0) + h_0]\,;$$

aquí,

$$U(\lambda_0, \delta_0) = \{\lambda \in \Lambda : \|\lambda - \lambda_0\| < \delta_0\}$$

denota la bola abierta de centro λ_0 y radio δ_0 en $\mathbb{R}^p$.

Ahora, para $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_0$ se tiene

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx = I(\lambda) + I_b(\lambda) - I_a(\lambda), \tag{1}$$

con

$$I(\lambda) = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} f(\lambda, x)\, dx,$$

$$I_a(\lambda) = \int_{a(\lambda_0)}^{a(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx,$$

$$I_b(\lambda) = \int_{b(\lambda_0)}^{b(\lambda)} f(\lambda, x)\, dx.$$

La integral $I(\lambda)$ tiene límites de integración fijos, luego le es de aplicación 4.1.1, donde reemplazamos $\Lambda \times I$ por C_0:

$$\frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda_i}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \int_{a(\lambda_0)}^{b(\lambda_0)} \frac{\partial f(\lambda_0, x)}{\partial \lambda_i}\, dx. \tag{2}$$

Veamos que $I_a(\lambda)$, $I_b(\lambda)$ son derivables en λ_0 respecto de λ_i, y calculemos estas derivadas. Por analogía, basta considerar $I_b(\lambda)$.

Sea e_i el i-ésimo vector unitario canónico de $\mathbb{R}^p$. Se verifica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_b(\lambda)}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=\lambda_0} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{I_b(\lambda_0+\rho e_i) - I_b(\lambda_0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \int_{b(\lambda_0)}^{b(\lambda_0+\rho e_i)} f(\lambda_0+\rho e_i, x)\, dx. \end{aligned}$$

Por el teorema de la media, existe $\xi = \xi(\rho) \in [b(\lambda_0), b(\lambda_0+\rho e_i)]$ tal que

$$\int_{b(\lambda_0)}^{b(\lambda_0+\rho e_i)} f(\lambda_0+\rho e_i, x)\, dx = f(\lambda_0+\rho e_i, \xi)\,[b(\lambda_0+\rho e_i) - b(\lambda_0)]\,.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_b(\lambda)}{\partial \lambda_i}\,|_{\lambda=\lambda_0} &= \lim_{\rho\to 0}\left[\frac{b(\lambda_0+\rho e_i)-b(\lambda_0)}{\rho} f(\lambda_0+\rho e_i,\xi)\right] \\ &= \frac{\partial b(\lambda)}{\partial \lambda_i}_{|\lambda=\lambda_0} f(\lambda_0, b(\lambda_0)).\end{aligned}$$

Aquí hemos usado la existencia de $\partial b(\lambda)/\partial\lambda_i$ en λ_0 y el hecho de que

$$\lim_{\rho\to 0} f(\lambda_0+\rho e_i,\xi) = f(\lambda_0, b(\lambda_0));$$

esto último se deduce de lo siguiente:

- $\lim_{\rho\to 0}(\lambda_0+\rho e_i)=\lambda_0$;
- $\lim_{\rho\to 0} b(\lambda_0+\rho e_i)=b(\lambda_0)$ (pues b es continua en λ_0);
- $b(\lambda_0)\le\xi\le b(\lambda_0+\rho e_i)$ implica $\lim_{\rho\to 0}\xi(\rho)=b(\lambda_0)$; y
- f es continua en $(\lambda_0, b(\lambda_0))$.

Hemos probado:

$$\frac{\partial I_b(\lambda)}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial b(\lambda)}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=\lambda_0} f\left(\lambda_0, b(\lambda_0)\right). \tag{3}$$

Similarmente:

$$\frac{\partial I_a(\lambda)}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial a(\lambda)}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=\lambda_0} f\left(\lambda_0, a(\lambda_0)\right). \tag{4}$$

La combinación de (1), (2), (3) y (4) completa la demostración.