La proyección social de las Matemáticas

Mesa redonda

Coordinador: *Ramón Á. Orive Rodríguez*

Profesor Titular de Matemática Aplicada del Departamento de Análisis Matemático y Decano de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna

Ponentes:

Javier Ariz Tellería
Licenciado en Ciencias Biológicas e Investigador del Área de Pesca del Centro Oceanográfico de Canarias
Luis Balbuena Castellano
Catedrático de Matemáticas del IES "Viera y Clavijo" de La Laguna y miembro fundador de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas
Alfredo Bermúdez de Castro
Catedrático y Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela
Jorge Casas Pérez
Técnico de "General Electric" y alumno de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna
Álvaro Dávila González
Director del Instituto Canario de Estadística
José L. Fernández Pérez
Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Autónoma de Madrid y Director Gerente de Consultoría de Riesgos e I+D de "Tecnología, Información y Finanzas" (Grupo Analistas)
Laureano González Vega
Catedrático de Álgebra y Decano de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria

Resumen

Esta mesa redonda supone la culminación del Módulo I, sobre *Matemáticas y Sociedad*, del Curso Interdisciplinar "Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas". Con la participación de profesionales cuyo trabajo está total o muy directamente relacionado con las Matemáticas, que actuarán como ponentes, y con las preguntas o comentarios que vayan surgiendo desde la audiencia, pretendemos que en el transcurso de esta mesa-coloquio se den cita algunas de las tendencias y controversias actuales acerca de la proyección social de las Matemáticas, tratando de abarcar la mayor variedad posible de aspectos de esta realidad poliédrica, algunos de las cuales pueden ser:

- Aplicabilidad de las Matemáticas – y los matemáticos – a otras ciencias experimentales y sociales en la sociedad actual.
- Las Matemáticas como herramienta imprescindible en la técnica y en la industria.
- Necesidad de una mayor conexión entre Universidad y Empresa.

- Situación de la investigación en Matemáticas en España y transferencia de resultados.
- Conexión entre Matemáticas y Sociedad. Conveniencia y necesidad de una mayor divulgación social de la belleza y la aplicabilidad de las Matemáticas, así como de un mayor esfuerzo pedagógico en la transmisión de los conocimientos matemáticos.
- Necesidades de adecuación de los actuales planes de estudio de Matemáticas en las universidades españolas, máxime ante el reto inminente de la convergencia europea en materia universitaria.
- Necesidad de definir nuevas salidas profesionales para los matemáticos, y de favorecer posibles mecanismos de integración de éstos en equipos multiprofesionales.

El análisis de la situación académica y socio-económica actual, que propicia la necesidad de este coloquio, así como de este Curso Interdisciplinar y de otras actividades similares que se están llevando a cabo en otras muchas universidades, arroja un balance muy claro: pese a que nuestra sociedad está cada vez más matematizada e informatizada -no sólo en lo referente a las tradicionalmente denominadas ciencias “puras” y “duras” sino también en lo tocante a las ciencias humanas y sociales e, incluso, en casi todo aquello que afecta a la vida cotidiana de las personas-, las Matemáticas siguen siendo unas grandes desconocidas. Esta fue, a grandes rasgos, la principal conclusión que llevó a declarar el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas y a organizar, seguidamente, toda una serie de actividades destinadas a intentar acercar a la sociedad la realidad de esta disciplina. En esta misma línea, cabe destacar las sucesivas reuniones de Decanos y Directores de Matemáticas que se han venido celebrando anualmente en España desde 1999.

Es indudable que buena parte de ese desconocimiento social de las Matemáticas viene determinado por la falta de capacidad y/o interés de los propios matemáticos por conectar con el resto de los agentes sociales, profesionales y empresariales cuya práctica diaria demanda el uso constante de Matemáticas. De ahí que, sin menoscabo de los debates “internos” de la comunidad matemática sobre la situación actual (planes de estudio, salidas profesionales, ...), sea imprescindible recabar la opinión y la experiencia de los “otros”, que también las utilizan o necesitan. En este sentido, creemos que la selección de los participantes en esta mesa redonda, matemáticos y no matemáticos, todos ellos profesionales de prestigio muy interesados en nuestra disciplina, servirá para extraer valiosas conclusiones acerca de la realidad actual de las Matemáticas, su aplicabilidad y su conexión con la sociedad.

Bibliografía

C. Andradas, E. Zuazua (coordinadores): *Informe sobre la investigación matemática en España en el periodo 1990-1999.* Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas CEAMM2000.
[Disponible en http://www.rsme.es/inicio/informem.pdf].

J. Bruna: Una reflexión sobre los estudios de matemáticas y sus perspectivas. *La Gaceta de la RSME* **3**, no. 1 (2000), 43-64.

P.A. Griffiths: Mathematics at the turn of the millennium. *Amer. Math. Monthly* **107**, no. 1 (2000), 1-14. [Versión en castellano: Las Matemáticas ante el cambio de milenio. *La Gaceta de la RSME* **3**, no. 1 (2000), 23-41. Disponible en http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/griffithsgaceta/griffithsgac.html].

J.L. Vázquez: The importance of Mathematics in the development of Science and Technology. *Boletín SEMA* **19** (2001), 69-112. [Versión (reelaborada) en castellano: Matemáticas, Ciencia y Tecnología: Una relación profunda y duradera. Ambas versiones disponibles en http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/jlvescr.html].

Documento de trabajo del proyecto piloto auspiciado por la CRUE sobre la integración de los estudios españoles de Matemáticas en el espacio europeo de enseñanza superior. [Disponible en http://www.matematicas.us.es/Bolonia/documento.htm].

El papel de las matemáticas en la empresa. Recopilación de intervenciones en los "Encuentros Universidad-Sociedad". Universidad del País Vasco, Bilbao, febrero de 2000. [Disponible en http://www.ehu.es/gizartekontseilua/pdf/encuentros/matematicas.pdf].

En Internet

http://www.rsme.es/comis/educ/debate.htm
Debate: "La enseñanza de las Matemáticas en España"
Comisión de Educación de la RSME.

http://www.ams.org/ams/mathmoments.html
Mathematical Moments
Programa de la American Mathematical Society para promover el conocimiento y la apreciación del papel que las Matemáticas juegan en la naturaleza, la ciencia, la tecnología y la cultura.

http://plus.maths.org
Plus Magazine
Revista electrónica mensual patrocinada por la Universidad de Cambridge que introduce a los lectores en la belleza y la aplicabilidad de las Matemáticas.

http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/00edumatuniv/index.html
Problemas de la Educación Matemática en la Universidad
Material puesto a disposición de los asistentes en la mesa redonda celebrada en abril de 2001 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

http://www.ams.org/new-in-math/happening.htm
What's Happening in the Mathematical Sciences
Serie de publicaciones divulgativas sobre la actualidad de la investigación matemática, escrita por B. Cipra y editada por la American Mathematical Society.

Documento de trabajo sobre la integración de los estudios españoles de matemáticas en el espacio europeo de enseñanza superior

Octubre-2002

Documento de trabajo sobre la integración de los estudios españoles de matemáticas en el espacio europeo de enseñanza superior

Presentación

Este documento es fruto del consenso del grupo de matemáticas del proyecto piloto, auspiciado por la CRUE, para impulsar el proceso de Bolonia en las universidades españolas. Consideramos necesario someterlo a discusión entre la comunidad matemática española. Sumándonos a la declaración del grupo europeo "estamos convencidos de que cualquier clase de acción en las direcciones que aquí señalamos solamente será posible y fructífera cuando se haya alcanzado un amplio acuerdo. Por supuesto, todos los matemáticos pertenecientes al grupo recibirán gustosos cualquier comentario sobre este documento".

Antecendentes

En mayo de 2001 la Comisión Europea puso en marcha un programa piloto *Tuning educational structures in Europe* para facilitar e impulsar la construcción del espacio europeo de enseñanza superior previsto en los acuerdos de Bolonia y Praga.

En dicho programa se seleccionaron cinco titulaciones y para cada una se constituyó una red con universidades de los distintos países de la UE. El proyecto finalizó el 31 de mayo de 2002. Entre sus objetivos estaban:

- El diseño de los contenidos básicos de cada titulación (*core* curriculum) y su perfil profesional.
- El incremento de la transparencia, mediante las herramientas del proceso de Bolonia y la presentación de ejemplos de "buena práctica"
- El análisis y la asignación de créditos europeos (ECTS) a las distintas materias.
- El desarrollo de métodos para el análisis de los elementos comunes y de los diferenciadores en los curricula de las titulaciones del proyecto.

Las titulaciones seleccionadas y las universidades españolas que se incorporaron a cada una de ellas fueron:
Administración de Empresas (Universidad de Salamanca)
Geología (Universidad de Barcelona)
Historia (Universidad de Valencia)
Matemáticas (Universidad Autónoma de Madrid, Universidad de Cantabria)
Ciencias de la Educación (Universidad de Deusto)

En el anexo 1 se encuentran las conclusiones de la red de matemáticas

La Conferencia de Rectores de Universidades Españolas (CRUE) a través de su sectorial académica (CASUE) decidió, en su reunión de Barcelona de octubre de 2001, utilizar esta experiencia para desarrollar proyectos piloto para la implantación del Suplemento Europeo al Título, una de las herramientas fundamentales del proceso de Bolonia. Se decidió partir de las cinco titulaciones del programa *Tuning educational*

structures in Europe más las tres siguientes por haber desarrollado experiencias piloto previas:
Química (Universidad Complutense, área de sinergia del *Tuning*)
Turismo (Universidad de Barcelona)
Lingüística (Universidad de Cádiz)

En estas ocho titulaciones se decidió incorporar a todas las universidades españolas que quisiesen participar en el proyecto, formando 8 redes coordinadas por las universidades ya mencionadas.

El Consejo de Universidades (actual Consejo de Coordinación Universitaria), representado en la reunión por Dña Teresa Díez Iturrioz, mostró su disposición a colaborar en el desarrollo del proyecto en aquellos aspectos de la competencia del Consejo.

El trabajo se desarrolló mediante reuniones internas de cada grupo por disciplina y reuniones interdisciplinares de coordinación.

Universidades participantes en el grupo de matemáticas
Universidad Autónoma de Barcelona
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad de Sevilla
Universidad de Cantabria (co-cordinadora)
Universidad Autónoma de Madrid (co-coordinadora)

Colaboradores del grupo de matemáticas

Frederic Utzet	<utzet@mat.uab.es>,
Anna Cima	<cima@mat.uab.es>,
Pedro Faraldo	<faraldo@usc.es>,
Juan M. Viaño	<maviano@usc.es>,
Celso Rodríguez	<celso@usc.es>,
Rosa Echevarría	<decmat@us.es>,
Emilio Carrizosa	<ecarrizosa@us.es>,
José Manuel Bayod	<bayodjm@unican.es>,
Laureano González Vega	<gvega@matesco.unican.es>,
Adolfo Quirós	<adolfo.quiros@uam.es>
Carmen Ruiz-Rivas	<carmen.ruiz-rivas@uam.es>,
Mónica de Mier	Becaria de colaboración

Objetivos del grupo de matemáticas

- Analizar y completar los campos del Suplemento Europeo al Título actual de licenciado en matemáticas en las 5 universidades en versiones en español e inglés.
  (Propuesta final en el anexo 2)
- Realizar un estudio sobre la valoración y métodos de asignación de créditos europeos a las distintas materias del curriculum de matemáticas actual.
  (Informe en el anexo 3)
- Diseñar una propuesta para debate sobre la estructura grado/postgrado/doctorado y sus objetivos en el caso de los estudios de matemáticas.
  (Esquema en el anexo 4)

- A la luz de las conclusiones del proyecto europeo *Tuning educational structures in Europe*, profundizar en los contenidos básicos del grado de licenciado en matemáticas describiendo, por materias, los objetivos de aprendizaje, los contenidos mínimos y las habilidades o destrezas a exigir.
  (Propuesta en el anexo 5)

Anexos
- Documento final del grupo de matemáticas del proyecto europeo *Tuning educational structures in Europe.*
- Documento completo de la propuesta para el Suplemento Europeo al Título actual de matemáticas con ejemplos de las 5 universidades.
- Informe y datos obtenidos respecto a la valoración de créditos europeos (ECTS).
- Esquema general de estructura de los estudios.
- Propuesta de contenidos básicos por materias y destrezas a adquirir para la obtención del grado de licenciado en matemáticas: formación generalista + tres perfiles profesionales.
- Ejemplos de posibles postgrados (másters).

Anexo 1

Documento final del grupo de matemáticas del proyecto europeo *Tuning educational structures in Europe*

(versiones en inglés y castellano)

Towards a common framework for Mathematics degrees in Europe

THE MATHEMATICS TUNING GROUP[1]

In the wake of the *Bologna Declaration* [B], signed in 1999 by Ministers responsible for Higher Education from 29 European countries, and its follow up, the *Prague Communiqué* [P], a group of universities established the project "Tuning educational structures in Europe" [T1, T2]. It was co-ordinated by the Universities of Deusto and Groningen and benefited from the financial support of the European Union. As its name suggests, the main objective of the project was to study how to "tune" (*not* to make uniform) educational structures in Europe, and thereby aid the development of the European Higher Education Area. This in turn should help mobility and improve the employability of European graduates.

Mathematics was one of the areas included in Tuning, and this paper reflects the unanimous consensus of the mathematics group of the project. But since the group does not pretend to have any representative role, we think it is necessary to make this document available for comment to the wider community of European mathematicians. We believe that any kind of action along the lines we sketch will only be possible and fruitful when a broad agreement has been reached. Indeed any mathematician member of the group welcomes comments on the document. E-mail addresses appear at the end.

The Mathematics Tuning Group is happy to express its thanks to the co-ordinators of the Tuning Project, Julia González (Universidad de Deusto) and Robert Wagenaar (Rijksuniversiteit Groningen), as well as to the European Commission, for creating the conditions for fruitful and pleasant interactions between its members.

Summary

- This paper refers only to universities (including technical universities), and none of our proposals apply to other types of institutions.
- The aim of a "common framework for mathematics degrees in Europe" is to facilitate an automatic recognition of degrees in order to help mobility.
- The idea of a common framework must be combined with an accreditation system.
- The two components of a common framework are similar (although not necessarily identical) structures and a basic common core curriculum (allowing for some degree of local flexibility) for the first two or three years.
- Beyond the basic common core curriculum, and certainly in the second cycle, programmes could diverge significantly. Since there are many areas in mathematics, and many of them are linked to other fields of knowledge, flexibility is of the utmost importance.
- Common ground for all programmes will include calculus in one and several real variables and linear algebra.

[1] Group members are listed at the end of the paper.

- We propose a broad list of further areas that graduates should be acquainted with in order to be easily recognised as mathematicians. It is not proposed that all programmes include individual modules covering each of these areas.
- We do not present a prescriptive list of topics to be covered, but we do mention the three skills we consider may be expected of any mathematics graduate:
- the ability to conceive a proof,
- the ability to model a situation mathematically,
- the ability to solve problems using mathematical tools.
- The first cycle should normally allow time to learn some computing and to meet at least one major area of application of mathematics.
- We should aim for a wide variety of flavours in second cycle programmes in mathematics. Their unifying characteristic feature should be the requirement that all students carry out a significant amount of individual work. To do this, a minimum of 90 ECTS credits[2] seems necessary for the award of a Master's qualification.
- It might be acceptable that various non-identical systems coexist, but large deviations from the standard (in terms of core curriculum or cycle structure) need to be grounded in appropriate entry level requirements, or other program specific factors, which can be judged by external accreditation. Otherwise, such degrees risk not benefiting from the automatic European recognition provided by a common framework, even though they may constitute worthy higher education programmes.

1. A common framework: what it should and shouldn't be or do

1.1 The only possible aim in agreeing a "common European framework" should be to facilitate the automatic recognition of mathematics degrees in Europe in order to help mobility. By this we mean that when somebody with a degree in mathematics from country A goes to country B:

- He/she will be legally recognised as holding such a degree, and the Government of country B will not require further proof of competence.

- A potential employer in country B will be able to assume that he/she has the general knowledge expected from somebody with a mathematics degree.

Of course, neither of these guarantees employment: the mathematics graduate will still have to go through whatever procedures (competitive exams, interviews, analysis of his/her curriculum, value of the degree awarding institution in the eyes of the employer,...) are used in country B to obtain either private or public employment.

1.2 One important component of a common framework for mathematics degrees in Europe is that all programmes have similar, although not necessarily identical, structures. Another component is agreeing on a basic common core curriculum while allowing for some degree of local flexibility.

[2] ECTS stands for "European Credit Transfer System". ECTS credits measure the learning outcomes attained by students. The basic general assumption is that the learning outcomes that an average full time student is expected to attain in one academic year are worth 60 ECTS credits. Therefore, the workload required to get 60 ECTS credits should correspond to what an average full time student is expected to do in one academic year.

1.3 We should emphasise that by no means do we think that agreeing on any kind of common framework can be used as a tool for automatic transfer between Universities. These will always require consideration by case, since different programmes can bring students to adequate levels in different but coherent ways, but an inappropriate mixing of programmes may not.

1.4 In many European countries there exist higher education institutions that differ from universities both in the level they demand from students and in their general approach to teaching and learning. In fact, in order not to exclude a substantial number of students from higher education, it is essential that these differences be maintained. We want to make explicit that **this paper refers only to universities (including technical universities)**, and that any proposal of a common framework designed for universities would not necessarily apply to other types of institutions.

2. Towards a common core mathematics curriculum

2.1 General remarks

At first sight, mathematics seems to be well suited for the definition of a core curriculum, especially so in the first two or three years. Because of the very nature of mathematics, and its logical structure, there will be a common part in all mathematics programmes, consisting of the fundamental notions. On the other hand, there are many areas in mathematics, and many of them are linked to other fields of knowledge (computer science, physics, engineering, economics, etc.). Flexibility is of the utmost importance to keep this variety and the interrelations that enrich our science.

There could possibly be an agreement on a list of subjects that must absolutely be included (linear algebra, calculus/analysis) or that should be included (probability/statistics, some familiarity with the mathematical use of a computer) in any mathematics degree. In the case of some specialised courses, such as mathematical physics, there will certainly be variations between countries and even between universities within one country, without implying any difference of quality of the programmes.

Moreover, a large variety of mathematics programmes exist currently in Europe. Their entry requirements vary, as do their length and the demands on the student. It is extremely important that this variety be maintained, both for the efficiency of the education system and socially, to accommodate the possibilities of more potential students. To fix a single definition of contents, skills and level for the whole of European higher education would exclude many students from the system, and would, in general, be counterproductive.

In fact, the group is in complete agreement that programmes could diverge significantly beyond the basic common core curriculum (e.g. in the direction of "pure" mathematics, or probability - statistics applied to economy or finance, or mathematical physics, or the teaching of mathematics in secondary schools). The presentation and level of rigour, as well as accepting there is and must continue to be variation in emphasis and, to some extent, content, even within the first two or three years, will make all those programmes recognisable as valid mathematics programmes.

As for the second cycle, not only do we think that programmes could differ, but we are convinced that, to reflect the diversity of mathematics and its relations with other fields, all kinds of different second cycles in mathematics should be developed, using in particular the specific strengths of each institution.

2.2 The need for accreditation

The idea of a basic core curriculum must be combined with an accreditation system. If the aim is to recognise that a given program fulfils the requirement of the core curriculum, then one has to check on three aspects:

- a list of contents
- a list of skills
- the level of mastery of concepts

These cannot be reduced to a simple scale.

To give accreditation to a mathematics programme, an examination by a group of peer reviewers, mostly mathematicians, is considered essential. The key aspects to be evaluated should be:

- the programme as a whole
- the units in the programme (both the contents and the level)
- the entry requirements
- the learning outcomes (skills and level attained)
- a qualitative assessment by both graduates and employers

The group does not believe that a (heavy) system of European accreditation is needed, but that universities in their quest for recognition will act at the national level. For this recognition to acquire international standing, the presence on the review panel of mathematicians from other countries seems necessary.

3. Some principles for a common core curriculum for the first degree (Bachelor) in mathematics

We do not feel that fixing a detailed list of topics to be covered is necessary, or even convenient. However, we do think that it is possible to give some guidelines for the common content of a "European first degree in mathematics", and more important, for the skills that all graduates should develop.

3.1 Contents

3.1.1 All mathematics graduates will have knowledge and understanding of, and the ability to use, mathematical methods and techniques appropriate to their programme. Common ground for all programmes will include

- calculus in one and several real variables
- linear algebra.

3.1.2 Mathematics graduates must have knowledge of the basic areas of mathematics, not only those that have historically driven mathematical activity, but also others of more modern origin. Therefore graduates should normally be acquainted with most, and preferably all, of the following:

- basic differential equations
- basic complex functions
- some probability
- some statistics
- some numerical methods
- basic geometry of curves and surfaces
- some algebraic structures
- some discrete mathematics

These need not be learned in individual modules covering each subject in depth from an abstract point of view. For example, one could learn about groups in a course on (abstract) group theory or in the framework of a course on cryptography. Geometric ideas, given their central role, could appear in a variety of courses.

3.1.3 Other methods and techniques will be developed according to the requirements and character of the programme, which will also largely determine the levels to which the developments are taken. In any case, all programmes should include a substantial number of courses with mathematical content.

3.1.4 In fact, broadly two kinds of mathematics curricula currently coexist in Europe, and both are useful. Let us call them, following [QAA][3], “theory based” and “practice based” programmes. The weight of each of the two kinds of programmes varies widely depending on the country, and it might be interesting to find out whether most European university programmes of mathematics are "theory based" or not.

Graduates from theory-based programmes will have knowledge and understanding of results from a range of major areas of mathematics. Examples of possible areas are algebra, analysis, geometry, number theory, differential equations, mechanics, probability theory and statistics, but there are many others. This knowledge and understanding will support the knowledge and understanding of mathematical methods and techniques, by providing a firmly developed mathematical context.

Graduates from practise-based programmes will also have knowledge of results from a range of areas of mathematics, but the knowledge will commonly be designed to support the understanding of models and how and when they can be applied. Besides those mentioned above, these areas include numerical analysis, control theory, operations research, discrete mathematics, game theory and many more. (These areas may of course also be studied in theory-based programmes.)

3.1.5 It is necessary that all graduates will have met at least one major area of application of mathematics in which it is used in a serious manner and this is considered essential for a proper appreciation of the subject. The nature of the application area and the manner in which

[3] This document was considered extremely useful and met with unanimous agreement from the group. In fact we have quoted it almost verbatim at some points.

it is studied might vary depending on whether the programme is theory-based or practice-based. Possible areas of application include physics, astronomy, chemistry, biology, engineering, computer science, information and communication technology, economics, accountancy, actuarial science, finance and many others.

3.2 Skills

3.2.1 For a standard notion like integration in one variable, the same “content” could imply:

- computing simple integrals
- understanding the definition of the Riemann integral
- proving the existence and properties of the Riemann integral for classes of functions
- using integrals to model and solve problems of various sciences.

So, on one hand the contents must be clearly spelled out, and on the other various skills are developed by the study of the subject.

3.2.2 Students who graduate from programmes in mathematics have an extremely wide choice of career available to them. Employers greatly value the intellectual ability and rigour and the skills in reasoning that these students will have acquired, their firmly established numeracy, and the analytic approach to problem-solving that is their hallmark.

Therefore, the three key skills that we consider may be expected of any mathematics graduate are:

1. the ability to conceive a proof,
2. the ability to model a situation mathematically,
3. the ability to solve problems using mathematical tools.

It is clear that, nowadays, solving problems should include their numerical and computational resolution. This requires a sound knowledge of algorithms and programming and the use of available software.

3.2.3 Note also that skills and level are developed progressively through the practice of many subjects. We do not start a mathematics programme with one course called "how to make a proof" and one called "how to model a situation", with the idea that those skills will be acquired immediately. Instead, it is through practice in all courses that these develop.

3.3 Level

All graduates will have knowledge and understanding developed to higher levels in particular areas. The higher-level content of programmes will reflect the title of the programme. For example, graduates from programmes with titles involving statistics will have substantial knowledge and understanding of the essential theory of statistical inference and of many applications of statistics. Programmes with titles such as mathematics might range quite widely over several branches of the subject, but nevertheless graduates from such programmes will have treated some topics in depth.

4. The second degree (Master) in mathematics

We have already made explicit our belief that establishing any kind of common curriculum for second cycle studies would be a mistake. Because of the diversity of mathematics, the different programmes should be directed to a broad range of students, including in many cases those whose first degree is not in mathematics, but in more or less related fields (computer science, physics, engineering, economics, etc.). We should therefore aim for a wide variety of flavours in second cycle programmes.

Rather than the contents, we think that the common denominator of all second cycles should be the level of achievement expected from students. A unifying characteristic feature could be the requirement that all second cycle students carry out a significant amount of individual work. This could be reflected in the presentation of a substantial individual project.

We believe that, to be able to do real individual work in mathematics, the time required to obtain a Master's qualification should be the equivalent of at least 90 ECTS credits. Therefore, depending on the national structure of first and second cycles, a Master would typically vary between 90 and 120 ECTS credits.

5. A common framework and the Bologna agreement

5.1 How various countries implement the Bologna agreement will make a difference on core curricula. In particular, 3+2 may not be equivalent to 5, because, in a 3+2 years structure, the 3 years could lead to a professional diploma, meaning that less time is spent on fundamental notions, or to a supplementary 2 years, and in that case the whole spirit of the 3 years programme should be different.

5.2 Whether it will be better for mathematics studies to consist of a 180 ECTS Bachelor, followed by a 120 ECTS Master (a 3+2 structure in terms of academic years), or whether a 240+90 (4+1+project) structure is preferable, may depend on a number of circumstances. For example, a 3+2 break up will surely facilitate crossing between fields, where students pursue Masters in an area different from that in which they obtained their Bachelor degree.

One aspect that can not be ignored, at least in mathematics, is the training of secondary school teachers. If the pedagogical qualification must be obtained during the first cycle studies, these should probably last for 4 years. On the other hand, if secondary school teaching requires a Master (or some other kind of postgraduate qualification), a 3 years Bachelor may be adequate, with teacher training being one of the possible postgraduate options (at the Master's level or otherwise).

5.3 The group did not attempt to solve contradictions that could appear in the case of different implementations of the Bologna agreement (i.e. if three years and five years university programmes coexist; or different cycle structures are established: 3+1, 3+2, 4+1, 4+1+project, 4+2 have all been proposed). As we said before, it might be acceptable that various systems coexist, but we believe that large deviations from the standard (such as a 3+1 structure, or not following the principles stated in section 3) need to be grounded in appropriate entry level requirements, or other program specific factors, which can be judged by external accreditation. Otherwise, such degrees risk not benefiting from the automatic European recognition provided by a common framework, even though they may constitute worthy higher education programmes.

6. References

[B] http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/bologna_declaration.pdf

[P] http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/Prague_communiquTheta.pdf

[QAA] The Benchmark document on Mathematics, Statistics and Operational Research, from the UK Quality Assurance Agency for Higher Education, http://www.qaa.ac.uk/crntwork/benchmark/phase2/mathematics.pdf.

[T1] The official sites of the project *Tuning educational structures in Europe*: http://www.relint.deusto.es/TuningProject/index.htm, http://www.let.rug.nl/TuningProject/index.htm

[T2] Information on the project *Tuning educational structures in Europe* in the European Commission site: http://europa.eu.int/comm/education/tuning.html

MEMBERS OF "THE MATHEMATICS TUNING GROUP"

Stephen Adam, University of Westminster (Higher education expert)
José Manuel Bayod, Universidad de Cantabria (bayodjm@unican.es)
Martine Bellec, Université Paris IX Dauphine (martine.bellec@dauphine.fr)
Marc Diener, Université de Nice (diener@math.unice.fr)
Alan Hegarty, University of Limerick (Alan.Hegarty@ul.ie)
Poul Hjorth, Danmarks Tekniske Universitet (P.G.Hjorth@mat.dtu.dk)
Anne Mette Holt, Danmarks Tekniske Universitet (International relations expert)
Günter Kern, Technische Universität Graz (Kern@opt.math.tu-graz.ac.at)
Frans J. Keune, Katholieke Universiteit Nijmegen (keune@sci.kun.nl)
Luc Lemaire, Université Libre de Bruxelles (llemaire@ulb.ac.be)
Andrea Milani, Università degli Studi di Pisa (milani@dm.unipi.it)
Julian Padget, University of Bath (jap@maths.bath.ac.uk)
Maria do Rosário Pinto, Universidade de Porto (mspinto@fc.up.pt)
Adolfo Quirós, Universidad Autónoma de Madrid (adolfo.quiros@uam.es)
Wolfgang Sander, Technische Universität Braunschweig (w.sander@tu-bs.de)
Hans-Olav Tylli, University of Helsinki (hojtylli@cc.helsinki.fi)

Hacia un marco común para los títulos de Matemáticas en Europa

THE MATHEMATICS TUNING GROUP[1]

Tras la firma de la *Declaración de Bolonia* [B] en 1999 por Ministros responsables de la Educación Superior de 29 países europeos, y de su continuación, el *Comunicado de Praga* [P], un grupo de universidades puso en marcha el proyecto "*Tuning educational structures in Europe*" [T1, T2]. Lo han coordinado las universidades de Deusto y Groningen y ha obtenido financiación de la Unión Europea. Como su nombre indica, el objetivo principal del proyecto fue estudiar la forma de "afinar" (como los distintos instrumentos de una orquesta, *no* uniformizar) las estructuras educativas europeas, y colaborar así en la construcción del Espacio Europeo de la Educación Superior. Esto debería a su vez contribuir a la movilidad y mejorar las posibilidades laborales de los titulados europeos.

Uno de los campos incluidos en el proyecto *Tuning* fue el de las matemáticas, y este documento refleja el consenso unánime del grupo de matemáticas del proyecto. Pero dado que el grupo no pretende tener ningún papel representativo, consideramos necesario someterlo a discusión entre la comunidad de matemáticos europeos. Estamos convencidos de que cualquier clase de acción en las direcciones que aquí señalamos solamente será posible y fructífera cuando se haya alcanzado un amplio acuerdo. Por supuesto, todos los matemáticos pertenecientes al grupo recibirán gustosos cualquier comentario sobre este documento. Sus direcciones electrónicas aparecen al final.

El Grupo *Tuning* de Matemáticas quiere mostrar su agradecimiento a los coordinadores del proyecto *Tuning*, Julia González (Universidad de Deusto) y Robert Wagenaar (Rijksuniversiteit Groningen), y a la Comisión Europea por crear las condiciones que permitieron una agradable y provechosa comunicación entre sus miembros.

Resumen

- Este documento se refiere únicamente a las universidades (incluyendo las politécnicas), y ninguna de nuestras propuestas se aplica a otros tipos de instituciones de educación superior.
- La finalidad de disponer de un "marco común para los títulos de matemáticas en Europa" es la de facilitar un reconocimiento automático, que contribuya a la movilidad.
- La idea de un marco común debe ir ligada a la de un sistema de acreditación.
- Las dos componentes de un marco común son unas estructuras similares (aunque no necesariamente idénticas) y una parte troncal, básica y común, en los contenidos de los dos o tres primeros años del plan de estudios (permitiendo cierto grado de flexibilidad local).
- Más allá de la parte básica y troncal del plan de estudios, y sin duda en todo el segundo ciclo, los planes podrían diverger de modo significativo. Puesto que hay muchas áreas en matemáticas, y están enlazadas con otros campos del conocimiento, la flexibilidad es de la máxima importancia.

[1] Ver relación de miembros del grupo al final del documento.

- La base común de todos los planes de estudios incluirá el cálculo en una y varias variables reales y el álgebra lineal.
- Proponemos una amplia lista de otras materias que nuestros graduados deberían conocer para ser inmediatamente reconocidos como matemáticos. No se propone que todos los planes incluyan asignaturas específicas que se dediquen a cada uno de estos temas.
- No presentamos una lista obligatoria de temas que haya que estudiar, pero sí que mencionamos tres destrezas que cualquier graduado en matemáticas debería poseer:
  (a) la capacidad de idear demostraciones,
  (b) la capacidad de modelizar matemáticamente una situación,
  (c) la capacidad de resolver problemas con técnicas matemáticas.
- El primer ciclo normalmente debería incluir el aprendizaje de algo de computación y la adquisición del conocimiento de al menos uno de los más importantes campos de aplicación de las matemáticas.
- Se debería procurar que los segundos ciclos de matemáticas fueran de muy diversa índole. Su característica común debería ser que todos los estudiantes lleven a cabo una apreciable cantidad de trabajo individual. Para conseguir esto, parece necesario un mínimo de 90 créditos ECTS[2] para obtener un título de *Master*.
- Puede ser aceptable que coexistan titulaciones con diversos diseños, pero en el caso de que se den desviaciones significativas del estándar (en lo relativo a los contenidos mínimos o a la estructura cíclica), éstas han de estar fundamentadas en unos requisitos de ingreso adecuados o en otros factores específicos del plan que puedan ser juzgados en la acreditación externa. De otro modo, tales títulos corren el riesgo de no beneficiarse del reconocimiento automático europeo que dará el marco común, aunque puedan constituir títulos válidos de educación superior.

1. Un marco común: lo que significa y lo que no significa.

- El único objetivo posible de acordar un “marco común europeo” debería ser el de facilitar un reconocimiento automático de los títulos de matemáticas en Europa para contribuir a la movilidad. Esto significaría que cuando una persona con un título en matemáticas obtenido en un país A se traslada a un país B:

1. Se le reconocerá oficialmente el título, y para ello las autoridades del país B no le exigirán ninguna otra prueba de su capacidad.

2. Quienquiera que vaya a contratarle en el país B podrá suponer que el poseedor del título tiene los conocimientos generales que se esperan de alguien con un título en matemáticas.

Naturalmente, ninguna de estas facilidades garantizará la obtención de un empleo: el titulado en matemáticas tendrá que pasar por cualesquiera procedimientos (oposiciones, entrevistas, análisis de su currículum vitae, valoración por parte del empresario de la universidad en la que obtuvo el título,...) que se utilicen en el país B para obtener un empleo, ya sea público o privado.

[2] ECTS son las siglas de *European Credit Transfer System*. Los créditos ECTS se utilizan para medir el aprendizaje de los alumnos. Por definición, los resultados del aprendizaje que se espera que un alumno medio a tiempo completo pueda obtener en un año académico, valen 60 créditos ECTS. En consecuencia, la carga de trabajo que se precisa para obtener 60 créditos ECTS debería corresponder a lo que se espera que un estudiante medio a tiempo completo realice durante un año académico.

1.2 Una componente importante del marco común de los títulos europeos de matemáticas es que todos los planes tengan estructuras similares, aunque no necesariamente idénticas. Otra componente es un acuerdo sobre una parte troncal, básica y común del contenido del plan que permita cierto grado de flexibilidad local.

1.3 Queremos insistir en que de ningún modo pensamos que un acuerdo sobre un marco común pueda usarse como un instrumento para los traslados automáticos entre universidades. Los traslados deberán considerarse caso a caso, puesto que diferentes planes de estudios pueden llevar a los estudiantes hasta los mismos niveles de formas diferentes pero todas ellas coherentes, mientras que una mezcla inadecuada de varios planes puede no servir para el mismo fin.

1.4 En muchos países europeos existen instituciones de educación superior que difieren de las universidades tanto en el nivel que exigen a sus estudiantes como en su enfoque general de la enseñanza y el aprendizaje. Para no excluir de la enseñanza superior a un número importante de estudiantes, en la práctica es esencial mantener estas diferencias. Queremos declarar expresamente que **este documento se refiere solamente a las universidades (incluyendo las politécnicas)**, y que cualquier propuesta de un marco común diseñado para las universidades no sería automáticamente aplicable a instituciones de otro tipo.

2. Hacia una troncalidad común

2.1. Consideraciones generales

A primera vista, las matemáticas parecen idóneas para la definición de unos contenidos comunes, por ejemplo, para los dos o tres primeros años. Por la naturaleza misma de las matemáticas, y por su estructura lógica, habrá una parte común a todos los planes de estudios de matemáticas, que constará de las nociones fundamentales. Pero por otra parte, existen muchas áreas de las matemáticas, y muchas de ellas están relacionadas con otros campos del conocimiento (informática, física, ingeniería, economía, etc.). La flexibilidad es de la máxima importancia para preservar esta variedad y las interrelaciones que enriquecen nuestra ciencia.

Podría alcanzarse un acuerdo sobre una lista de materias que con toda seguridad deben estar incluidas (álgebra lineal, cálculo/análisis) o que debieran estar incluidas (probabilidad/estadística, cierta familiaridad con la utilización matemática de un ordenador) en cualquier título de matemáticas. En el caso de algunos temas especializados, como física matemática, sin duda habrá variaciones entre países e incluso entre universidades del mismo país, sin que deba deducirse ninguna diferencia de calidad entre los distintos planes de estudios.

Por otra parte, actualmente existen en Europa planes de estudios de matemáticas muy variados, con diferentes requisitos de acceso y con distintas duraciones de las enseñanzas y distintos niveles de exigencia sobre los estudiantes. Es enormemente importante que se mantenga esta variedad, tanto para la eficiencia del sistema educativo como desde el punto de vista social, con objeto de conseguir atender a las demandas del mayor número posible de alumnos potenciales. La fijación de una única definición de los contenidos, las destrezas y los niveles para la totalidad de la educación superior europea excluiría del sistema a muchos estudiantes y, en conjunto, resultaría contraproducente.

De hecho en el grupo hay un acuerdo total acerca de que los planes puedan diverger de modo significativo en lo que sea adicional a la parte troncal básica (por ejemplo en la dirección de la matemática “pura”; o de la probabilidad-estadística aplicada a la economía o a las finazas; o de la física matemática; o de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria). Lo que hará que esos planes sean reconocibles como planes válidos de matemáticas será su forma de presentación y su nivel de rigor, admitiendo que hay y debe seguir habiendo variantes en la importancia que se dé a cada tema y, hasta cierto punto, en el contenido, incluso dentro de los dos o tres primeros años.

En cuanto al segundo ciclo, no sólo pensamos que los distintos planes pueden diferir, sino que estamos convencidos de que, para reflejar la diversidad de las matemáticas y de sus relaciones con otros campos, se deberían desarrollar en las diferentes instituciones todo tipo de segundos ciclos diferentes en matemáticas, aprovechando en particular los aspectos en los que más destaque cada institución.

2.2 La necesidad de la acreditación

La idea de una troncalidad básica debe combinarse con un sistema de acreditación. Con el objetivo de reconocer que un programa dado cumple con los requisitos de la troncalidad, hay que comprobar tres aspectos:

- una lista de contenidos
- una lista de destrezas o competencias
- el nivel del dominio de los conceptos

No es posible reducir estos aspectos a una simple escala.
Para conceder la acreditación a un plan de matemáticas es imprescindible un análisis por parte de un grupo de evaluadores académicos, de los cuales la mayor parte serán matemáticos. Los aspectos clave a ser evaluados deberían ser:

(a) el plan de estudios en su conjunto
(b) las unidades o asignaturas (tanto en contenido como en nivel)
(c) los requisitos de acceso al plan
(d) los objetivos del aprendizaje (las destrezas y el nivel alcanzado)
(e) una evaluación cualitativa tanto por los graduados como por quienes les contratan.

El grupo no cree que se necesite un (elaborado) sistema de acreditación europeo, sino que las universidades, buscando el reconocimiento, actuarán a nivel nacional. Para que este reconocimiento tenga valor internacional, parece necesario que entre los evaluadores se incluyan matemáticos de otros países.

3. Algunos principios para la troncalidad común del primer título (Bachelor) en matemáticas

No creemos que sea necesario, ni siquiera oportuno, fijar una lista detallada de los temas a cubrir. Sin embargo, creemos que es posible dar algunas directrices sobre el contenido común de un “primer título europeo en matemáticas”, y, lo que es más importante, sobre las destrezas que todos los titulados deberían poseer.

3.1 Contenido

3.1.1 Todos los titulados en matemáticas conocerán y entenderán, y serán capaces de usar, los métodos y las técnicas apropiados a su plan de estudios. La parte común de todos los planes incluirá

- cálculo en una y varias variables reales
- álgebra lineal.

3.1.2 Los titulados en matemáticas han de conocer las áreas básicas de las matemáticas, no solo las que históricamente han guiado la actividad matemática, sino también otras de origen más moderno. En consecuencia los titulados normalmente habrán de conocer la mayoría de las siguientes materias, y preferiblemente todas:

- ecuaciones diferenciales a nivel básico
- funciones de variable compleja a nivel básico
- algo de probabilidad
- algo de estadística
- algo de métodos numéricos
- geometría de curvas y superficies a nivel básico
- algunas estructuras algebraicas
- algo de matemáticas discretas.

No es necesario que estos temas se aprendan en asignaturas o módulos individuales que cubran en profundidad y desde un punto de vista abstracto cada materia. Por ejemplo, un estudiante podría aprender sobre los grupos en un curso de teoría de grupos (abstracta) o en el marco de un curso sobre criptografía. Las ideas geométricas podrían aparecer en varias asignaturas, dado su papel central.

3.1.3 De acuerdo con el carácter y las exigencias del plan de estudios, se desarrollarán otros métodos y otras técnicas, cuyos niveles serán definidos por el propio plan. En cualquier caso, todos los planes incluirán un número importante de asignaturas con contenido matemático.

3.1.4 En la práctica y hablando en términos algo imprecisos, hay dos tipos de estudios de matemáticas que coexisten actualmente en Europa, y ambos tipos de estudios son útiles. Podemos llamarlos, siguiendo [QAA][3], “basados en la teoría” y “basados en la práctica”. La incidencia de cada uno de estos dos tipos de enseñanzas varía ampliamente según el país, y podría ser interesante averiguar si la mayor parte de los estudios universitarios europeos de matemáticas son “basados en la teoría” o no.
Los graduados en planes de estudios basados en la teoría tendrán conocimiento y comprensión de los resultados de varios de los campos más importantes de las matemáticas. Ejemplos de tales campos son el álgebra, el análisis, la geometría, la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, la mecánica, la teoría de la probabilidad y la estadística, pero hay otros muchos. Sobre este conocimiento y esta comprensión se apoyarán el conocimiento y la comprensión de los métodos y técnicas matemáticos, otorgándoles un contexto matemático bien fundamentado.

Los graduados en planes de estudios basados en la práctica también tendrán conocimiento de los resultados de varios campos matemáticos, pero este conocimiento normalmente estará

[3] El grupo consideró enormemente útil este documento, y mostró un acuerdo unánime con su contenido. Incluso se han utilizado al pie de la letra algunas de sus frases.

diseñado para apoyar la comprensión de modelos y de cómo pueden aplicarse. Además de los mencionados más arriba, estos campos incluyen el análisis numérico, la teoría de control, la investigación operativa, las matemáticas discretas, la teoría de juegos y muchos otros. (Naturalmente estos campos también pueden estudiarse en las enseñanzas más teóricas.)

3.1.5 Es necesario que todos los titulados conozcan al menos una de las más importantes áreas de aplicación de las matemáticas, en la que el uso de las matemáticas sea esencial para entender verdaderamente la materia. La naturaleza y la forma en que se estudia esta área de aplicación puede variar en función de si el plan de estudios está basado en la teoría o en la práctica. Algunas de las posibles áreas de aplicación pueden ser la física, la astronomía, la química, la biología, la ingeniería, la computación, la tecnología de la información y las comunicaciones, la economía, la contabilidad, las ciencias actuariales, las finanzas y muchas otras.

3.2 Destrezas

3.2.1 Para un concepto como la integración en una variable, el mismo "contenido" podría significar:

- calcular integrales sencillas
- comprender la definición de la integral de Riemann
- conocer las demostraciones de la existencia y de las propiedades de la integral de Riemann para ciertas clases de funciones
- usar las integrales para modelizar y resolver problemas en diversas ciencias.

Concluimos que por una parte el contenido ha de ser detallado claramente, y que por otra mediante el estudio de una misma materia se desarrollan varias destrezas.

3.2.2 Los estudiantes que se gradúan en matemáticas disponen de una amplia variedad de posibilidades de empleo. Los empresarios valoran en alto grado la capacidad y el rigor intelectual, y las habilidades de razonamiento que estos estudiantes han adquirido, así como sus demostradas capacidades numéricas y el enfoque analítico a la solución de problemas que constituyen sus cualidades más distintivas.
Por tanto, las tres destrezas clave que consideramos que cualquier titulado en matemáticas debería adquirir son:

(a) la capacidad para idear demostraciones
(b) la capacidad para modelizar matemáticamente una situación
(c) la capacidad para resolver problemas con técnicas matemáticas.

Hoy en día está claro que resolver un problema debe incluir su resolución numérica y computacional. Para esto se requiere un firme conocimiento de algoritmos y de programación, así como del uso del software actualmente existente.

3.2.3 Conviene resaltar también que estas destrezas y el nivel de las mismas se desarrollan de forma progresiva a través de la práctica de varias materias. No se empiezan los estudios de matemáticas con una asignatura llamada "cómo hacer una demostración" y con otra llamada "cómo modelizar una situación" con la idea de que estas destrezas se adquieran inmediatamente, sino que se desarrollan practicándolas en todas las asignaturas.

3.3 Nivel

Todos los graduados habrán desarrollado el conocimiento y la comprensión a un alto nivel en algún área en particular. El nombre de los estudios o del título reflejará su contenido de materias a alto nivel. Por ejemplo, los poseedores de títulos que incluyan "estadística" tendrán un conocimiento y una comprensión sustanciales de la teoría central de la inferencia estadística y de muchas aplicaciones de la estadística. Quienes posean un título en "matemáticas" pueden tener conocimientos de muy distintas partes de las matemáticas, pero en todo caso habrán tratado en profundidad algunos temas.

4. El segundo título (Master) en matemáticas

Ya hemos dejado claro nuestro convencimiento de que sería un error establecer cualquier clase de currículum troncal para los estudios de segundo ciclo. Dada la diversidad de las matemáticas, los diferentes planes deberían dirigirse a una amplia gama de estudiantes, incluyendo muchos cuyo primer título no sea en matemáticas sino en otros campos más o menos relacionados (informática, física, ingeniería, economía, etc.). En consecuencia se debería procurar que los segundos ciclos de matemáticas fueran de muy diversa índole.

Pensamos que el denominador común de todos los segundos ciclos debería residir, más que en el contenido, en el nivel que se espera que los alumnos alcancen. Una característica unificadora podría ser el requisito de que todos los estudiantes de segundo ciclo lleven a cabo una apreciable cantidad de trabajo individual, lo que se podría plasmar en la presentación de un proyecto individual de cierta consideración.

Creemos que, en orden a lograr el nivel necesario para realizar un verdadero trabajo individual en matemáticas, el tiempo requerido para obtener un título de *Master* debería ser al menos el equivalente de 90 créditos ECTS. Por tanto el número de créditos ECTS de un *Master* estará comprendido normalmente entre 90 y 120, dependiendo de cuál sea la duración de cada uno de los dos ciclos en los distintos países.

5. Un marco europeo y el acuerdo de Bolonia

5.1 La forma en que los diferentes países implementen el acuerdo de Bolonia tendrá trascendencia sobre la troncalidad común. En particular, 3+2 puede no ser equivalente a 5, porque en una estructura de 3+2 años los 3 primeros años podrían conducir a un título profesional, lo que significaría que se invierte menos tiempo en las nociones fundamentales, o podrían conducir a los 2 años siguientes, en cuyo caso el espíritu del plan de estudios de los 3 años sería diferente.

5.2 Si es mejor que los estudios de matemáticas estén formados por un *Bachelor* de 180 créditos ECTS seguidos por un *Master* de 120 créditos ECTS (es decir, una estructura 3+2, en términos de años académicos), o si por el contrario es preferible una estructura 240+90 (es decir, 4+1+proyecto), dependerá de varias circunstancias. Por ejemplo, una estructura 3+2 seguramente facilitará la movilidad entre materias para estudiantes que decidan seguir un *Master* en un área distinta de aquella en la obtuvieron su *Bachelor*.

Un aspecto que no se puede ignorar, al menos en matemáticas, es la formación de los profesores de enseñanza secundaria. En caso de que la cualificación pedagógica haya de obtenerse durante los estudios de primer ciclo, éstos probablemente deberían durar 4 años. Pero si el ser profesor de enseñanza secundaria exige un *Master* (o algún otro tipo de cualificación postgraduada), entonces un *Bachelor* de 3 años puede ser adecuado, y en este caso la formación pedagógica sería una de las posibles opciones de postgrado (a nivel de *Master* o a otro nivel).

5.3 El grupo no ha intentado resolver las contradicciones que podrían aparecer en el caso de que haya diferentes implementaciones del acuerdo de Bolonia (es decir, si coexisten planes universitarios de tres años con otros de cinco años; o si se establecen diferentes estructuras cíclicas, ya que se han propuesto todos estos esquemas: 3+1, 3+2, 4+1, 4+1+proyecto, 4+2). Como se ha dicho más arriba, podría ser aceptable que coexistan diversos sistemas, pero creemos que si hay grandes alejamientos del estándar (como la estructura 3+1, o el incumplimiento de los principios enunciados en la sección 3) éstos tienen que estar fundamentados en unos requisitos adecuados sobre los niveles de acceso o en otros factores particulares del plan de estudios, que puedan ser juzgados en la acreditación externa. De otro modo, tales títulos corren el riesgo de no beneficiarse del reconocimiento automático europeo que dará el marco común, aunque puedan constituir títulos válidos de educación superior.

6. Referencias

[B] http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/bologna_declaration.pdf

[P] http://www.bologna-berlin2003.de/pdf/Prague_communiquTheta.pdf

[QAA] Documento para la evaluación comparada de los títulos de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa, de la *Quality Assurance Agency for Higher Education* del Reino Unido.

http://www.qaa.ac.uk/crntwork/benchmark/phase2/mathematics.pdf.

[T1] Los sitios oficiales del proyecto *Tuning educational structures in Europe*: http://www.relint.deusto.es/TuningProject/index.htm, http://www.let.rug.nl/TuningProject/index.htm

[T2] Información sobre el proyecto *Tuning educational structures in Europe* en el sitio de la Comisión Europea: http://europa.eu.int/comm/education/tuning.html

Miembros de “The Mathematics Tuning Group”:

Stephen Adam, University of Westminster (Experto en educación superior)
José Manuel Bayod, Universidad de Cantabria (bayodjm@unican.es)
Martine Bellec, Université Paris IX Dauphine (martine.bellec@dauphine.fr)
Marc Diener, Université de Nice (diener@math.unice.fr)
Alan Hegarty, University of Limerick (Alan.Hegarty@ul.ie)
Poul Hjorth, Danmarks Tekniske Universitet (P.G.Hjorth@mat.dtu.dk)
Anne Mette Holt, Danmarks Tekniske Universitet (Experta en relaciones internacionales)
Günter Kern, Technische Universität Graz (Kern@opt.math.tu-graz.ac.at)
Frans J. Keune, Katholieke Universiteit Nijmegen (keune@sci.kun.nl)
Luc Lemaire, Université Libre de Bruxelles (llemaire@ulb.ac.be)
Andrea Milani, Università degli Studi di Pisa (milani@dm.unipi.it)
Julian Padget, University of Bath (jap@maths.bath.ac.uk)
María do Rosário Pinto, Universidade de Porto (mspinto@fc.up.pt)
Adolfo Quirós, Universidad Autónoma de Madrid (adolfo.quiros@uam.es)
Wolfgang Sander, Technische Universität Braunschweig (w.sander@tu-bs.de)
Hans-Olav Tylli, University of Helsinki (hojtylli@cc.helsinki.fi)

Anexo 2

Documento completo de la propuesta para el Suplemento Europeo al Título actual de matemáticas:

En castellano con ejemplos de las cinco universidades.
En inglés ejemplo de la UAM.

SUPLEMENTO EUROPEO AL TÍTULO

EJEMPLO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

1. INFORMACIÓN SOBRE LA IDENTIDAD DEL POSEEDOR DE LA TITULACIÓN

1.1 **Apellido(s):** García Pérez [en la versión informática: un solo campo con espacio en blanco entre los dos apellidos]

1.2 **Nombre(s):** Carmen

1.3 **Fecha de nacimiento *(día/mes/año)*:** 01/01/1979

1.4 **Número de identificación de estudiante o código (*si se conoce*):** [temporalmente se utilizará código Erasmus + DNI, aunque se apoyará el proyecto ScanNet]

E MADRID04 + DNI
E BARCELO02 + DNI
E SANTAND01 + DNI
E SANTIAG01 + DNI
E SEVILLA01 + DNI

2. INFORMACIÓN SOBRE LA TITULACIÓN

2.1 **Denominación de los estudios y (*si procede*) título conferido (*en la lengua original*):**
Estudios: Licenciatura en Matemáticas.
Título conferido: Licenciada en Matemáticas (oficial y válido en todo el territorio nacional).

2.2 **Principal(es) campo(s) de estudio de la titulación:** Matemáticas (Álgebra, Análisis Matemático, Geometría, Estadística, Análisis Numérico).

2.3 **Nombre (*en la lengua original*) y naturaleza de la institución que la concede:**
Universidad Autónoma de Madrid, universidad pública.
Universidad Autónoma de Barcelona, universidad pública.
Universidad de Cantabria, universidad pública.
Universidad de Santiago de Compostela, universidad pública.
Universidad de Sevilla, universidad pública.

2.4 **Nombre (*en la lengua original*) y naturaleza de la institución (*si es diferente de la anterior*) en la que se cursaron los estudios:**
[US] 44,5% de los estudios cursados en la Universidad de Cádiz
55,5% de los estudios cursados en la Universidad de Sevilla

2.5 **Lengua(s) de enseñanza/examen:**
[UAM] español (castellano).
[UAB] catalán y/o castellano.
[UC] español (castellano)
[USC] español (castellano) y/o gallego.
[US] español (castellano)

3. INFORMACIÓN SOBRE EL NIVEL DE LA TITULACIÓN

3.1 **Nivel de la titulación:** Licenciado (ver 8).

3.2 **Duración oficial del programa:**

[UAM] 4 años, pero existe la posibilidad de completarlo en 5 años. En ambos casos el tiempo total presencial con los profesores en clases teóricas, de problemas y prácticas es de 2500 horas en el conjunto de la titulación. El tiempo total estimado de trabajo para el estudiante, incluyendo clases, trabajo individual, exámenes y su preparación, es anualmente de 1500 horas aproximadamente.

[UAB] 5 años, pero existe la posibilidad de completarlo en 4 años. En ambos casos el tiempo total presencial con los profesores en clases teóricas, de problemas y prácticas es de 2850 horas en el conjunto de la titulación. El tiempo total estimado de trabajo para el estudiante, incluyendo exámenes y su preparación, es anualmente de 1400 horas aproximadamente.

[UC] 5 años. El tiempo total de trabajo en clases teóricas, de problemas y prácticas es de 2500 horas (=300 créditos). El tiempo total estimado de trabajo para el estudiante, incluyendo exámenes y su preparación, es de 1500 horas al año aproximadamente

[USC] No se prescribe una duración oficial, pero se recomienda completarlo en 5 años. El tiempo total de trabajo en clases teóricas, de problemas y prácticas es de 3000 horas. El tiempo total estimado de trabajo para el estudiante, incluyendo exámenes y su preparación, es de 1600 horas al año aproximadamente.

[US] 5 años. El tiempo total presencial con los profesores en clases teóricas, de problemas y prácticas es de 3000 horas en el conjunto de la titulación. El tiempo total estimado de trabajo para el estudiante, incluyendo clases, trabajo individual, exámenes y su preparación, es de 1500 horas al año aproximadamente.

3.3 **Requisito(s) de acceso:**
Bachillerato + Prueba de Acceso a la Universidad. Los estudiantes que poseen el título de Diplomado en Estadística pueden acceder directamente al segundo ciclo, cursando ciertos Complementos de Formación.

4. INFORMACIÓN SOBRE EL CONTENIDO Y LOS RESULTADOS OBTENIDOS

4.1 **Forma de estudio:** Programa presencial. Los estudiantes pueden organizar temporalmente su plan de estudios como deseen. [Sería conveniente que se estableciesen criterios para distinguir entre estudiantes a tiempo completo y a tiempo parcial]

4.2 **Requisitos del programa:**
[UAM] El estudiante tiene que completar 2500 horas presenciales con los profesores distribuidas de la siguiente forma:

- 18 asignaturas troncales (1410 horas presenciales),
- 4 asignaturas obligatorias (290 horas presenciales),
- 7 asignaturas optativas (400 horas presenciales),
- asignaturas de libre elección (400 horas presenciales) que el estudiante puede escoger entre todos los cursos ofrecidos por la universidad en cualquier disciplina u otras actividades curriculares.

Cada asignatura debe ser aprobada de forma independiente.

[UAB] El estudiante tiene que completar 2850 horas presenciales con los profesores distribuidas de la siguiente forma:

- 16 asignaturas troncales (1290 horas presenciales),
- 10 asignaturas obligatorias (930 horas presenciales),
- 6/7 asignaturas optativas (330 horas presenciales aproximadamente),
- asignaturas de libre elección (30 0 horas presenciales) que el estudiante puede escoger entre todos los cursos ofrecidos por la universidad en cualquier disciplina u otras actividades curriculares.

Cada asignatura debe ser aprobada de forma independiente.

[UC] El estudiante tiene que superar 21 asignaturas, equivalentes a 5 años de estudio a tiempo completo. Todas las asignaturas de los cuatro primeros años son comunes para todos los alumnos, y en el último año cada estudiante puede optar por 2, a elegir entre una oferta de a lo sumo 5 asignaturas. Cada asignatura debe ser superada individualmente, y para ello se evalúa en una escala de 0 a 10; para superarla hay que obtener al menos un 5.

[USC] El estudiante tiene que completar 3000 horas presenciales con los profesores distribuidas de la siguiente forma:

- 9 asignaturas obligatorias (645 horas),
- 20 asignaturas troncales (1550 horas)
- 505 horas a completar entre 51 asignaturas optativas Estas asignaturas se dividen en 21 asignaturas optativas vinculadas a alguna orientación y 30 asignaturas optativas no vinculadas a orientaciones, 300 horas de asignaturas de libre elección. Previa solicitud del estudiante, podrán imputarse como materias de libre elección curricular las materias optativas de la propia titulación, las materias troncales, obligatorias y optativas de otras titulaciones, las materias diseñadas específicamente para la libre elección y cursos,

seminarios y otras actividades a los que la USC reconozca previamente la posibilidad de ser imputados como de libre elección.

Cada asignatura y cada curso debe ser aprobado individualmente (no hay ningún sistema de compensación anual).

[US] El estudiante tiene que completar 3000 horas presenciales con los profesores distribuidas de la siguiente forma:

- 18 asignaturas troncales (1260 horas presenciales),
- 8 asignaturas obligatorias (570 horas presenciales)
- 13 asignaturas optativas (870 horas presenciales), a elegir entre la oferta de la Facultad,
- Asignaturas de libre elección (300 horas presenciales), que el estudiante puede escoger entre los cursos y actividades ofrecidos por la universidad en cualquier disciplina u otras actividades extracurriculares

Cada asignatura debe ser aprobada de forma independiente.

4.3 **Datos del programa (por ejemplo, módulos o unidades cursados) y especificación de las calificaciones/créditos obtenidos:**
(si esta información figura en una certificación oficial, utilícese en este apartado)

4.3.1 **Asignaturas troncales y obligatorias:**

Primer curso

Asignatura	**Horas presenciales**	**Calificación**	**Año**	**Observaciones**
Cálculo I	120	Convalidada	97-98	Convalidada
Álgebra Lineal	120	Convalidada	97-98	Convalidada
Informática	100	Aprobado	97-98	
Cálculo II	120	Matrícula de Honor	97-98	
Geometría I	120	Aprobado	98-99	
Conjuntos y Números	120	Sobresaliente	97/98	

Segundo curso

Asignatura	**Horas presenciales**	**Calificación**	**Año**	**Observaciones**
Cálculo III	80	Notable	98-99	
Ec. Diferen. Ordinarias	80	Aprobado	99-00	
Probabilidad I	100	Notable	98-99	
Cálculo Numérico I	100	Sobresaliente	98-99	
Geometría II	80	Aprobado	99-00	
Topología	80	Aprobado	98-99	
Modelización I	80	Aprobado	99-00	
Física para Matemáticos	80	Aprobado	99-00	

Tercer curso

Asignatura	Horas presenciales	**Calificación**	**Año**	**Observaciones**
Álgebra I	80	Sobresaliente	00-01	EQ Erasmus
Teo. Integral y Medida	80	Aprobado	00-01	EQ Erasmus
Variable Compleja I	80	Notable	00-01	EQ Erasmus
Álgebra II	80	Aprobado	00-01	EQ Erasmus
Ec. Dif, y Anál. Funcional	80	Aprobado	00-01	EQ Erasmus
Probabilidad II	80	Matrícula de Honor	00-01	EQ Erasmus

Cuarto curso

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Geometría III	90	Sobresaliente	01-02	
Cálculo Numérico II	90	Aprobado	01-02	

4.3.2 Asignaturas optativas:

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Historia de las Matemáticas	80	Notable	99-00	
Matemática Discreta	80	Sobresaliente	00-01	EQ Erasmus
Teoría de Números	80	Notable	00-01	EQ Erasmus
Estadística I	80	Notable	01-02	
Estadística II	80	Notable	01-02	
Modelización II	80	Aprobado	01-02	
Lógica	80	Notable	01-02	

4.3.3 Asignaturas de libre elección:

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Inglés (nivel medio)	50	Sobresaliente	97-98	
Inglés (nivel superior)	70	Notable	98-99	
Bases de Datos	50	Notable	00-01	EQ Erasmus
Derecho de la Empresa	60	Notable	00-01	EQ Erasmus
Prácticas en Empresas	120	Apto	01-02	
Actividades extracurriculares	50	Apto		

4.3.4 Asignaturas cursadas en equivalencia:

En la Universität Würzburg, Alemania (EQ Erasmus)

Funktionentheorie
Algebra
Elementare Zahlentheorie
Funktionalanalysis
Einführung zu JAVA
Deutsch als Fremdsprache (Mittelstufe)
Deutsch als Fremdsprache (Oberstufe)
Deutsch als Fremdsprache (Landeskunde)

4.3.1 Asignaturas troncales y obligatorias

Primer curso

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Álgebra Lineal	75	Notable	99-00	Adaptada
Elementos de Análisis Matemático	75	Aprobado	99-00	
Física General	60	Aprobado	99-00	Adaptada
Informática	90	Notable	99-00	Adaptada
Análisis Matemático I	90	Aprobado	99-00	Adaptada
Cálculo Numérico I	60	Aprobado	99-00	Adaptada
Elementos de Geom. Diferencial y Top.	75	Notable	99-00	Adaptada
Geometría	75	Notable	99-00	Adaptada

Segundo curso

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Ampliación de Geometría	60	Aprobado	99-00	
Análisis Matemático II	60	Aprobado	99-00	Adaptada
Cálculo de Probabilidades	60	Notable	99-00	Adaptada
Cálculo Numérico II	60	Aprobado	99-00	Adaptada
Física Teórica	75	Aprobado	99-00	
Ampl. Teoría de Func.Varias Variabl.	75	Notable	99-00	Adaptada
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	75	Aprobado	99-00	Adaptada

Tercer curso

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Estadística Matemática	60	Notable	99-00	Adaptada
Geometría local de Curvas y Superf.	90	Aprobado	99-00	
Álgebra	75	Aprobado	99-00	Adaptada
Variable Compleja y Análisis Fourier	60	Notable	99-00	Adaptada

Cuarto curso

Asignatura	Horas presenciales	Calificación	Año	Observaciones
Análisis Funcional	45	Aprobado	00-01	
Cálculo Numérico III	90	Aprobado	00-01	
Estructuras Algebraicas	90	Notable	00-01	
Variable Compleja	60	Notable	00-01	
Variedades Diferenciables	45	Aprobado	00-01	
E. D. P. y Análisis Funcional	90	Aprobado	00-01	
Elementos de Homología Clásica	60	Aprobado	00-01	

4.4 Sistema de calificación y, si se conoce, la distribución de las calificaciones:

Cada asignatura se evalúa en una escala de 0 a 10 puntos. Esta calificación numérica tiene asociada una calificación cualitativa, de la siguiente forma:

Calificación Cualitativa	Calificación Numérica
Suspenso	Entre 0 y 4,9 puntos
Aprobado	Entre 5 y 6,9 puntos
Notable	Entre 7 y 8,9 puntos
Sobresaliente	Entre 9 y 10 puntos
Matrícula de Honor	Sobresaliente + Mención especial

Para superar una asignatura es preciso obtener, al menos, 5 puntos. Por tato una asignatura se supera con las calificaciones de Matrícula de Honor, Sobresaliente, Notable o Aprobado, y no se supera si se obtiene la calificación de Suspenso.

Matrícula de Honor significa haber obtenido un Sobresaliente y una mención especial y se puede conceder, como máximo, una Matrícula de Honor por cada 20 estudiantes matriculados en la asignatura.

Algunas actividades se califican sólo como Apto/No Apto. No tienen calificación numérica y no se tienen en cuenta en el cálculo de la puntuación media..

No Presentado significa que el alumno ha abandonado voluntariamente la asignatura.

La distribución de calificaciones de los estudiantes que han superado las asignaturas de Matemáticas en los últimos cuatro años ha sido

UAM

Aprobado	65,74 %
Notable	23,50 %
Sobresaliente	7,55 %
Matrícula de Honor	3,21 %

UAB

Aprobado	62,52 %
Notable	26,17 %
Sobresaliente	9,35 %
Matrícula de Honor	1,98 %

UC

Aprobado	67,57 %
Notable	22,34 %
Sobresaliente	6,27 %
Matrícula de Honor	3,82 %

USC

Aprobado	62,12 %
Notable	31,82 %
Sobresaliente	4,54 %
Matrícula de Honor	1,52 %

US

Aprobado	68,29 %
Notable	24,39 %
Sobresaliente	4,88 %
Matrícula de Honor	2,44 %

La observación "EQ" significa que el alumno ha cursado una asignatura equivalente.
La observación "Convalidada" significa que el alumno ha cursado una asignatura similar y no se le asigna calificación.
La observación “Adaptada” significa que el alumno ha cursado una asignatura similar, pero en un Plan de Estudios de Licenciado en Matemáticas diferente del actual.

4.5 **Clasificación general de la titulación (en la lengua original):**
Puntuación media 1.9 [si el estudiante obtiene Premio Extraordinario, señalarlo. En este caso añadir también:
[UAM] Sólo puede ser premiado con la distinción de "Premio Extraordinario" un estudiante de cada 125 por promoción.
[UAB] Sólo pueden ser premiados con la distinción de "Premio Extraordinario" dos estudiantes por cada promoción entre los que hayan obtenido una calificación global igual o superior a 2,3.
[UC] La distinción de "Premio Extraordinario" es asignada a lo sumo a un estudiante por promoción por una Comisión de la Facultad de Ciencias en atención a un expediente de excepcional mérito.
[USC] Sólo puede ser premiado con la distinción de "Premio Extraordinario" un estudiante de cada cinco que hayan obtenido la calificación de Sobresaliente en la obtención del Grado de Licenciado.

[UC] [Si el estudiante presenta una Tesina o supera el Examen de Grado de Licenciatura, señalarlo. En este caso añadir también:

- Como complemento a su formación el estudiante ha superado el Examen de Grado con la calificación de ¿¿??
- Como complemento a su formación e iniciación a la investigación el estudiante ha elaborado y defendido la Tesina de Licenciatura titulada ¿¿?? que recibió la calificación de ¿¿??]

La puntuación media de los Licenciados en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid durante los últimos cuatro años es 1.3.

La puntuación media se calcula mediante el criterio numérico siguiente:

Aprobado o Convalidada	1 punto
Notable	2 puntos
Sobresaliente	3 puntos
Matrícula de Honor	4 puntos

5. INFORMACIÓN SOBRE LA FUNCIÓN DE LA TITULACIÓN

5.1 **Acceso a ulteriores estudios:** Después de la Licenciatura se puede acceder a:

- Diploma de Estudios Avanzados (no sólo en Matemáticas). Si es seguido de una Tesis de Investigación, se obtiene el título de Doctor.
- Másters y títulos de especialización en diferentes campos.
- Certificado de Aptitud Pedagógica, necesario para ser profesor permanente en el sistema público de educación secundaria.

5.2 **Rango profesional (si procede):** Matemático no es una profesión regulada oficialmente. Un Licenciado en Matemáticas, como todo Licenciado, puede optar a las categorías más altas de la función pública. El título de Licenciado en Matemáticas cualifica para la formulación matemática, análisis, resolución y, en su caso, tratamiento informático de problemas en diversos campos interdisciplinares de las ciencias básicas, ciencias sociales y de la vida, ingeniería, finanzas, consultoría, etc..., con vistas a las aplicaciones, la investigación y/o la docencia.

6. INFORMACIÓN ADICIONAL

6.1 **Información adicional:**

[UAM] El título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid no está dirigido hacia la formación especializada en ninguna rama de las Matemáticas. Ofrece una amplia selección de asignaturas optativas, de manera que el estudiante puede diseñar un curriculum adaptado a sus futuros intereses profesionales. Es posible, pero no obligatorio, conseguir créditos por realizar prácticas en una empresa o industria.

[UAB] El título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona no está dirigido hacia la formación especializada en ninguna rama de las Matemáticas. Ofrece una selección de asignaturas optativas, de orientación aplicada y teórica, de manera que el estudiante puede diseñar un curriculum adaptado a sus expectativas profesionales. Escogiendo bien los créditos optativos y de libre elección, el estudiante puede obtener una mayor especialización laboral cursando 30 créditos adicionales. Se pueden conseguir créditos optativos por realizar prácticas en una empresa o un centro de enseñanza de secundaria y también por la realización de un Trabajo Dirigido.

[USC] El título de Licenciado en Matemáticas en la Universidad de Santiago no está dirigido hacia la formación especializada en ninguna rama de las Matemáticas. Ofrece una amplia selección de asignaturas optativas, que se encuadran en las orientaciones de Matemática Aplicada, Matemática Pura y de Estadística e Investigación Operativa. Estas orientaciones hacen posible que el estudiante pueda diseñar un curriculum adaptado a sus expectativas profesionales. Es posible, pero no obligatorio, conseguir créditos por realizar prácticas en una empresa o industria y por trabajos académicamente dirigidos.

[US] El título de Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla pretende dar una formación lo más amplia posible de muy diversas ramas de las Matemáticas, tanto puras como aplicadas. Los estudiantes adquieren conocimientos y destrezas que les capacitan para adaptarse con facilidad tanto al ejercicio profesional como a la docencia y la investigación.

6.2 Otras fuentes de información:

- Sobre el sistema educativo español: www.mecd.es,
- Sobre la Universidad Autónoma de Madrid: www.uam.es,
- Sobre la Titulación de Matemáticas en la UAM: www.uam.es/matem
- Sobre las universidades catalanas: http://dursi.gencat.es
- Sobre la Universidad Autónoma de Barcelona: www.uab.es,
- Sobre la Titulación de Matemáticas en la UAB: http://mat.uab.es/seccio
- Sobre la Universidad de Cantabria: www.unican.es,
- Sobre la Facultad de Ciencias: www.fciencias.unican.es
- Sobre la titulación de Licenciado en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Cantabria: http://campusvirtual.unican.es/planes/CMATEMAA.htm
- Sobre la Universidad de Santiago: www.usc.es,
- Sobre la Titulación de Matemáticas en la USC: www.usc.es/intro/facescg.htm
- Sobre la Universidad de Sevilla: www.us.es
- Sobre la Titulación de Matemáticas en la Universidad de Sevilla: www.matematicas.us.es

7. CERTIFICACIÓN DEL SUPLEMENTO

7.1 **Fecha:** 10 de octubre de 2001

7.2 **Firma:** [Secretario General IMPRESA] [Decano/Administrador del Centro/... ORIGINAL]

7.3 **Cargo:** Secretario General de la Universidad ... Decano/Administrador de la Facultad ...

7.4 **Sello o tampón oficial:** SELLO SECO

8. INFORMACIÓN SOBRE EL SISTEMA NACIONAL DE ENSEÑANZA SUPERIOR

(N.B. Las instituciones que tienen previsto expedir el Diploma Supplement deben consultar las notas explicativas sobre su cumplimentación.)

THE DIPLOMA SUPPLEMENT

EJEMPLO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS EN LA UAM

1 INFORMATION IDENTIFYING THE HOLDER OF THE QUALIFICATION

1.1 **Family name(s):** García Pérez [en la versión informática: un solo campo con espacio en blanco entre los dos apellidos]
1.2 **Given name(s):** Carmen
1.3 **Date of birth *(day/month/year)*:** 01/01/1979
1.4 **Student identification number or code *(if available)*:** EMADRID04 + DNI [temporalmente se utilizará código Erasmus + DNI, aunque se apoyará el proyecto ScanNet]

2 INFORMATION IDENTIFYING THE QUALIFICATION

2.1 **Name of studies and *(if applicable)* title conferred *(in original language)*:**
Studies: Licenciatura en Matemáticas
Title conferred: Licenciada en Matemáticas (state recognised)
2.2 **Main field(s) of study for the qualification:** Mathematics (Algebra, Mathematical Analysis, Geometry, Statistics, Numerical Analysis)
2.3 **Name and status of awarding institution *(in original language)*:** Universidad Autónoma de Madrid, universidad pública
2.4 **Name and status of institution *(if different from 2.3)* administering studies *(in original language)*:**
2.5 **Language of instruction/examination:** Spanish

3 INFORMATION ON THE LEVEL OF THE QUALIFICATION

3.1 **Level of qualification:** Licenciado (see 8).
3.2 **Official length of programme:** 4 years, but there is the choice of doing it in 5 years. In both cases the total time of contact with the lecturers in theoretical classes, problems sessions and laboratory work is 3000 hours during the degree. The total estimated working time for the student, including classes, individual study, exams and preparation for them, is annually about 1500 hours.
3.3 **Access requirements(s):** Bachillerato + University Entrance Examination. Students holding the degree of Diplomado en Estadística are admitted directly into the second cycle taking some complementary courses.

4 INFORMATION ON THE CONTENTS AND RESULTS GAINED

4.1 **Mode of study:** Presential programme. Students are free to organise temporally their study plan in any way they want. [Sería conveniente que se estableciese con claridad la distinción entre estudiantes a tiempo completo y a tiempo parcial].
4.2 **Programme requirements:** The student has to complete 2500 contact hours with the lecturers corresponding to:

- 18 core subjects (1410 contact hours)
- 4 compulsory subjects (290 contact hours)
- 7 elective subjects (400 contact hours)
- free choice subjects (400 contact hours) that the student may take among all subjects offered by the university in all disciplines or other extracurricular activities.

Each subject must be passed independently.

4.3 **Programme details: (e.g. modules or units studied), and the individual grades/marks/credits obtained:**
(if this information is available on an official transcript this should be used here)

4.3.1 **Core and compulsory subjects:**

First year

Subject	**Contact hours**	**Grade**	**Year**	**Observations**
Conjuntos y Números (Sets and Numbers)	120	Sobresaliente	97-98	
Cálculo I (Calculus I)	120	Recognised	97-98	Recognised
Álgebra Lineal (Linear Algebra)	120	Recognised	97-98	Recognised
Informática (Computer Science)	100	Aprobado	97-98	
Cálculo II (Calculus II)	120	Matrícula de Honor	97-98	
Geometría I (Geometry I)	120	Aprobado	98-99	

Second year

Subject	**Contact hours**	**Grade**	Year	Observations
Cálculo III (Calculus III)	80	Notable	98-99	
Ec. Diferen. Ordinarias (Ordinary Differential Equations)	80	Aprobado	99-00	
Probabilidad I (Probability I)	100	Notable	98-99	
Cálculo Numérico I (Numerical Analysis I)	100	Sobresaliente	98-99	
Geometría II (Geometry II)	80	Aprobado	99-00	
Topología (Topology)	80	Aprobado	98-99	
Modelización I (Mathematical Models I)	80	Aprobado	99-00	
Física para Matemáticos (Physics)	80	Aprobado	99-00	

Third year

Subject	**Contact hours**	**Grade**	**Year**	**Observations**
Álgebra I (Algebra I)	80	Sobresaliente	00-01	EQ Erasmus
Teo. Integral y Medida (Measure Theory)	80	Aprobado	00-01	EQ Erasmus
Variable Compleja I (Complex Variables I)	80	Notable	00-01	EQ Erasmus
Álgebra II (Algebra II)	80	Aprobado	00-01	EQ Erasmus
Ec. Difer, y Anál. Funcional (Differential Equations and Functional Analysis)	80	Aprobado	00-01	EQ Erasmus
Probabilidad II (Probability II)	80	Matrícula de Honor	00-01	EQ Erasmus

Fourth year

Subject	**Contact hours**	Grade	**Year**	**Observations**
Geometría III (Geometry III)	90	Sobresaliente	01-02	
Cálculo Numérico II (Numerical Analysis III)	90	Aprobado	00-01	

4.3.2 Elective subjects

Subject	**Contact hours**	**Grade**	**Year**	**Observations**
Historia de las Matemáticas (History of Math)	80	Notable	99-00	
Matemática Discreta (Discrete Mathematics)	80	Sobresaliente	00-01	EQ Erasmus
Teoría de Números (Number Theory)	80	Notable	00-01	EQ Erasmus
Estadística I (Statistics I)	80	Notable	01-02	
Estadística II (Statistics II)	80	Notable	01-02	
Modelización II (Mathematical Models II)	80	Aprobado	01-02	
Lógica (Mathematical Logic)	80	Notable	01-02	

4.3.3 Free choice subjects

Subject	Contact hours	Grade	Year	Observations
Inglés, nivel medio (English, intermediate level)	50	Sobresaliente	97-98	
Inglés, nivel superior (English, advanced level)	70	Notable	98-99	
Bases de Datos (Databases)	50	Notable	00-01	EQ Erasmus
Derecho de la Empresa (Enterprise Law)	60	Notable	00-01	EQ Erasmus
Prácticas en Empresas (Practices in companies)	120	Apto	01-02	
Extracurricular activities	50	Apto		

4.3.4 Subjects taken in equivalence

At the Universität Würzburg, Germany (EQ Erasmus)

Funktionentheorie (Function Theory)
Algebra I (Algebra I)
Elementare Zahlentheorie (Elementary Number Theory)
Funktionalanalysis (Functional Analysis)
Einführung zu JAVA (Introduction to JAVA)
Deutsch als Fremdsprache, Mittelstufe (German, intermediate level)
Deutsch als Fremdsprache, Oberstufe (German, advanced level)
Deutsch als Fremdsprache, Landeskunde (German regional studies)

4.4 Grading scheme and, if available, grade distribution guidance:

Each subject is graded in a scale from 0 a 10 points. Each numeric grade correspond to a qualitative grade as follows:

Qualitative Grade	Numeric Grade
Suspenso	Entre 0 y 4,9 puntos
Aprobado	Entre 5 y 6,9 puntos
Notable	Entre 7 y 8,9 puntos
Sobresaliente	Entre 9 y 10 puntos
Matrícula de Honor	Sobresaliente + Mención especial

To pass a subject it is necessary to get at least 5 points. There are therefore four passing grades (Matrícula de Honor, Sobresaliente, Notable, Aprobado) plus one fail grade (Suspenso).

Matrícula de Honor means getting a Sobresaliente plus an special mention. A maximum of one Matrícula de Honor per 20 students registered in a given subjectc an be awarded.

Some activities are graded only on a Pass (Apto) / Fail (No Apto) basis. These subjects do not have a numeric grade and are not taken under consideration when calculating the Grade Point Average (GPA).

No Presentado means that the student has voluntarily dropped the subject,

The grade’s distribution of students passing Mathematics' subjects in the last four years has been

	UAM
Aprobado	65,74 %
Notable	23,50 %
Sobresaliente	7,55 %
Matrícula de Honor	3,21 %

The observation "EQ" means that the student has taken an equivalent subject.
The observation "Recognised" means that the student has taken a similar subject and no grade is assigned.

4.5 **Overall classification of the qualification *(in original language)*:** Grade Point Average 1.9 [si el estudiante obtiene Premio Extraordinario, señalarlo. En este caso añadir también: No more than 1 student out of 125 in each graduating class can be awarded the distinction of "Premio Extraordinario".]
The mean GPA among Licenciados en Matemáticas at Universidad Autónoma de Madrid in the last four years is 1.3.

The Grade Point Average (GPA) is calculated with the following numerical criterion:

Aprobado or Convalidada	1 point
Notable	2 points
Sobresaliente	3 points
Matrícula de Honor	4 points

5 INFORMATION ON THE FUNCTION OF THE QUALIFICATION

5.1 **Access to further study:** A Licenciado en Matemáticas has access to:

- Diploma de Estudios Avanzados (not only in Mathematics). If this is followed by a Research Thesis, the degree of Doctor is awarded.
- Non-doctoral postgraduate studies like Masters and other specialisation degrees in different fields.
- Certificado de Aptitud Pedagógica, required to be a permanent teacher in the public secondary school system.

5.2 **Professional status *(if applicable)*:** Mathematician is not an officially regulated profession. A Licenciado en Matemáticas, as is the case of all Licenciados, can opt to the highest ranks of the Civil Service. The degree of Licenciado en Matemáticas qualifies for the mathematical formulation, analysis, resolution and, if it is the case, computational processing of problems in different interdisciplinary fields of basic science, social and life sciences, engineering, finances, consulting, etc..., in a view to applications, research and/or teaching.

6 ADDITIONAL INFORMATION

6.1 **Additional information:** The degree of Licenciado en Matemáticas at Universidad Autónoma de Madrid is not directed towards specialized training in any branch of Mathematics. It offers a broad selection of optional subjects, so that students can build up a curriculum geared to their future professional interests. It is possible, but not compulsory, to get credit for an internship in a company or industry.

6.2 **Further information sources:**

- About the Spanish education system: www.mecd.es,
- About the Universidad Autónoma de Madrid: www.uam.es,
- About the Degree in Mathematics at UAM: www.uam.es/matem

7 CERTIFICATION OF THE SUPPLEMENT

7.1 **Date:** October 10th, 2001
7.2 **Signature:** [Secretario General IMPRESA] [Decano/Administrador del Centro/... ORIGINAL]
7.3 **Capacity:** Secretario General de la Universidad ... Decano/Administrador de la Facultad ...
7.4 **Official stamp or seal:** SELLO SECO

8 INFORMATION ON THE NATIONAL HIGHER EDUCATION SYSTEM

(N.B. Institutions who intend to issue Diploma Supplements should refer to the explanatory notes that explain how to complete them.)

Anexo 3

Informe y datos obtenidos respecto a la valoración de créditos europeos (ECTS)

ESTUDIO SOBRE LA ASIGNACIÓN DE CRÉDITOS EUROPEOS A LAS DISTINTAS MATERIAS DEL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Octubre 2002

Índice

1. Introducción

En la declaración de Bolonia de 1999, los 29 países firmantes aspiran a la creación de un espacio europeo de educación superior para el año 2010, con el fin de mejorar el empleo y la movilidad de los ciudadanos y de incrementar la competitividad internacional de la educación superior europea.

Para ello es necesario alcanzar un alto grado de compatibilidad y comparabilidad entre los diferentes sistemas de educación superior, a través de los siguientes objetivos:

- Adopción de un sistema de títulos de fácil interpretación y comparación, mediante la implantación de un Suplemento Europeo al Título
- Adopción de un sistema esencialmente basado en dos ciclos principales, grado y postgrado
- Implantación de un sistema de créditos, basado en el sistema ECTS, como medio adecuado para fomentar la movilidad de los estudiantes
- Promoción de la cooperación europea en los procesos de evaluación y acreditación de calidad mediante el desarrollo de metodologías y criterios comparables
- Promoción de una educación superior de dimensión europea.

2. Sistema Europeo de Transferencia de Créditos

Hace diez años se desarrolló el Sistema Europeo de Transferencia de Créditos (ECTS, en sus siglas en inglés), en forma de proyecto piloto en el marco del programa Erasmus, con el fin de facilitar el reconocimiento académico de los estudios cursados en el extranjero. El ECTS se basa en dos elementos básicos: la información sobre los programas de estudios y la utilización de créditos europeos.

El sistema de créditos ECTS proporciona un procedimiento estandarizado de medida y comparación del aprendizaje en diferentes contextos (diferentes programas académicos, diferentes países, ...). Para ello los créditos en el ECTS no deben indicar simplemente el número de horas dedicadas al aprendizaje, sino que deben además aportar información sobre las cualidades de ese aprendizaje (naturaleza, contexto, nivel, ...). De esta manera los créditos serán una herramienta eficaz para conseguir transparencia e integración de los diferentes sistemas europeos de educación superior.

Se valora en 60 créditos europeos el conjunto organizado de materias/asignaturas que un estudiante medio, dedicado a los estudios a tiempo completo, debe superar en un año. Esto supone una definición del aprendizaje posible en un año académico de un estudiante medio a tiempo completo e incluye las horas de clase en aula o laboratorio, las prácticas, las horas de estudio personal y la preparación y realización de exámenes.

Su equivalencia en horas de trabajo para dicho estudiante medio es de aproximadamente1600 horas:

8 horas diarias x 5 días a la semana x 40 semanas al año = 1600 horas.

Un crédito europeo representa entre 25 y 30 horas de trabajo del estudiante. Evidentemente, los estudiantes más dotados requerirán menos horas y los menos dotados más. Tiene la ventaja de que cada persona, estudie a tiempo completo o a tiempo parcial, puede valorar lo que puede asumir en el tiempo de que disponga.

2.1 Asignación de créditos europeos

En el actual sistema español un crédito corresponde a 10 horas presenciales. No cuantifica en horas el trabajo personal del estudiante ni la preparación y realización de exámenes.

A efectos de movilidad en el programa Erasmus se convirtieron los créditos locales a créditos europeos mediante simples reglas de tres y eso ha creado un hábito que hay que romper. El que los créditos europeos tengan sentido y no se reduzcan a una mera adaptación numérica depende del esfuerzo que internamente realicen las universidades y de la voluntad del profesorado para asumir los nuevos criterios diseñando las estrategias para el aprendizaje adecuadas.

La implantación de los créditos europeos supone un cambio en la orientación pedagógica de las enseñanzas, menos centrada en lo que se enseña y más precisa en lo que se aprende y cuánto esfuerzo requiere este aprendizaje. La implantación de los créditos europeos requiere, por tanto, la elaboración de guías de cada titulación en las que en cada materia se detallen las horas necesarias de dedicación de un “estudiante medio” a cada tipo de actividad, los objetivos formativos que se persiguen y las habilidades que el estudiante debe adquirir.

El volumen de trabajo que realiza un estudiante medio para superar una asignatura depende de la titulación, el programa de estudios, el nivel de exigencia, etc., por lo que cada universidad y, en ella, cada titulación, deberá analizar su caso concreto a la hora de asignar créditos europeos.

La asignación de créditos conviene hacerla siguiendo un procedimiento “ top-down” (descendente). Primero se determina el volumen de trabajo de un curso académico completo y se define con 60 créditos. A cada asignatura de ese curso se le asignará un número de créditos según la proporción de trabajo que requiera en relación con el total. Para ello será útil disponer de datos fiables sobre el número de horas que los estudiantes dedican a cada asignatura. En la práctica, el volumen de trabajo varía de año en año, dependiendo de diversos factores, como la utilización de diferentes metodologías docentes, el número de estudiantes por profesor, los conocimientos previos de los estudiantes, ... La única manera de asignar créditos coherentemente es especificando de antemano el volumen de trabajo en una guía docente.

La aplicación del sistema europeo implica un cambio en el diseño de las titulaciones y programas. Primero hay que determinar qué se quiere ofrecer al estudiante (si unos estudios más teóricos o más prácticos, con alguna especialización o no, ...) y fijar unos objetivos, y luego cuánto tiempo necesita el estudiante para alcanzar esos objetivos; y no a la inversa, como se suele hacer actualmente, donde primero se fija la duración de los estudios y después se “rellenan” los cursos con asignaturas.

No hay ninguna institución que controle la aplicación del ECTS. Esto tiene la ventaja de que no se interfiere en la autonomía de las universidades ni de los sistemas educativos pero, por otro lado, las disparidades en los criterios de asignación de créditos influyen negativamente en la comparabilidad.

Si el ECTS se aplica correctamente es posible comparar, desde un punto de vista cuantitativo, estudios en diferentes universidades. Pero la comparabilidad y consigo la transferibilidad de resultados académicos depende también de criterios cualitativos como los contenidos, el grado de dificultad, la calidad de la enseñanza, el tipo de examen y de puntuación.

3. Encuesta

Se ha realizado una encuesta para obtener datos que orienten y faciliten la asignación de créditos ECTS a las distintas materias del currículum de Matemáticas.

3.1 Objetivos

- Obtener una estimación general de las horas de trabajo personal dedicadas por los estudiantes a cada asignatura
- Contrastar el trabajo realizado por los estudiantes con el exigido por los profesores

3.2 Ámbito y diseño de la encuesta

La encuesta se ha realizado en los cursos de primer ciclo de la Licenciatura de Matemáticas de las cinco universidades participantes, así como en los de segundo ciclo de la Universidad Autónoma de Barcelona y de la Universidad de Santiago.

En algunos casos la encuesta se realizó dentro del horario lectivo (se destinó tiempo de clase para que los estudiantes la completaran) y en otros no (los estudiantes debían completarla en casa), siendo la participación notablemente superior en los primeros.

En la Universidad Autónoma de Madrid la encuesta se extendió también a los profesores que impartían docencia en los cursos de primer ciclo.

En la Universidad de Sevilla, la respuesta de los estudiantes fue tan reducida, que no se han incluído los resultados en este estudio

A modo de ejemplo se adjuntan en el Anexo ECTS-1 los dos formularios de la UAM.

Al redactar los formularios para los estudiantes surgió la duda de qué ocurre con aquellos que repiten una asignatura, ¿deben o no contabilizar en el tiempo invertido a esa asignatura el que dedicaron en las convocatorias anteriores? Se creyó que lo correcto era tener en cuenta todas las horas que el estudiante necesitara hasta superarla (¿es realmente lo correcto?) y así se explicó al distribuir el formulario entre los estudiantes. Para controlar este aspecto se preguntó la convocatoria en la que el estudiante se encuentra. En la práctica no se sabe cómo ha sido interpretado este aspecto por los estudiantes ni si lo tuvieron en cuenta. Es algo que habría que mejorar en encuestas posteriores.

Aspectos que habría que mejorar:

- controlar si en el número de horas que los estudiantes repetidores dicen dedicar a una asignatura incluyen las convocatorias anteriores.
- aumentar la participación de los estudiantes (mayor número de respuestas).

3.3 Resultados (ver Anexo ECTS-2)

En general el número de respuestas obtenidas es bajo, lo cual limita la significación de los datos. A pesar de ello es posible extraer algunas características generales, en las que cabe destacar lo siguiente:

- Es frecuente la discrepancia entre las horas de trabajo estimadas por los profesores y las dedicadas por los estudiantes.

- Hay asignaturas que parecen requerir un volumen de trabajo personal de los estudiantes superior al resto.

  En ocasiones, esto podría explicarse por tener la asignatura alguna característica específica, como puede ser la necesidad de utilizar el ordenador. Sería el caso de las asignaturas de Análisis Numérico de varias de las Universidades, y estas características específicas deberían tomarse en cuenta a la hora de asignar créditos ECTS a dichas asignaturas.

  Pero otras veces, la necesidad de dedicar más horas a una asignatura parece deberse más bien a algún error de diseño (contenidos excesivos y/o no adaptados al nivel de los estudiantes,...). Ejemplos de esta situación parecerían ser Geometría I en la UAM, Análisis de varias variables reales en la UC o Ecuaciones diferenciales ordinarias en la USC.

3.4 Ejemplos de asignación de créditos para Matemáticas en la UAM

Se presentan a continuación dos métodos para llevar a cabo dicha asignación. El primero de ellos, que no consideramos aconsejable, está basado directamente en la estimación del volumen total de trabajo del estudiante, tal y como se refleja en las encuestas. El segundo, basado en la guía docente, asigna factores a cada materia que relacionan el número de horas presenciales y el número de horas de trabajo personal del estudiante.

Aunque no se aprecian diferencias notables entre la media de horas de estudio del total de los estudiantes (incluidos quienes suspenden) y la de los que superan la asignatura, nuestra referencia van a ser los datos de los estudiantes que superan cada asignatura de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid.

Primer curso

Asignatura	Créditos españoles	Horas presenciales	Media horas estudio aprobados	Horas totales (presencial + estudio)	Horas estudio por hora presencial	Horas totales por crédito europeo
Cálculo I	12	84	144	228	**1,7**	**24**
Conjuntos y Números	12	84	142	226	**1,7**	**24**
Álgebra Lineal	12	84	143	227	**1,7**	**24**
Cálculo II	12	84	127	211	**1,5**	**22**
Geometría I	12	84	245	329	**2,9**	**34**
Informática	10	98	137	235	**1,4**	**29**
Libre elección	5	50	50	100	**1**	**25**
Total	75	568		**1556**		

Segundo Curso

Asignatura	Créditos españoles	Horas presenciales	Media horas estudio aprobados	Horas totales (presencial + estudio)	Horas estudio por hora presencial	Horas totales por crédito europeo
Cálculo III	8	56	140	196	**2,5**	**31**
Cálculo Numérico I	10	98	240	338	**2,5**	**42**
Probabilidad I	10	77	129	206	**1,7**	**26**
E.D.O.	8	56	158	214	**2,8**	**33**
Topología	8	56	154	210	**2,7**	**33**
Geometría II	8	56	147	203	**2,6**	**32**
Modelización I	8	56	98	154	**1,8**	**24**
Física	8	56	146	202	**2,6**	**32**
Libre elección	7	70	70	140	**1,0**	**25**
Total	75	581		**1862**		

Los resultados de la encuesta en la UAM sugieren que:

- El primer curso, con 7 asignaturas, requiere un volumen razonable de trabajo para el estudiante (entre 1500 y 1600 horas).

- El segundo curso, con 9 asignaturas, requiere excesivo trabajo por parte del estudiante (más de 1700 horas, con una dedicación media de 2’5 horas de estudio por hora presencial en cada asignatura). Habría que disminuir el número de asignaturas (lo que supondría aumentarlo en otro curso) o cambiar la metodología (lo más correcto), sustituyendo clases teóricas por clases de problemas, para no superar las 2 horas de estudio por hora presencial.

- Geometría I, debido a un mal diseño (que se está corrigiendo), es una asignatura a la que los estudiantes dedican muchas más horas que al resto (casi 3 horas de estudio por hora presencial), a menudo a lo largo de varias convocatorias.

- En la asignatura de Informática se imparten más horas presenciales de prácticas con ordenador (56 horas) que teóricas (42 horas), lo que hace que los estudiantes no tengan que dedicarle muchas más horas de estudio fuera del aula (1’4 horas de estudio por hora presencial).

- En Cálculo Numérico I también ocurre que se imparten más horas presenciales de prácticas con ordenador (56 h) que teóricas (42 h), pero en esta asignatura los estudiantes dedican 2’5 horas de estudio por cada hora presencial, excesivas como en otras asignaturas de segundo curso. En Cálculo Numérico I hay tres tipos de trabajo: estudio de la teoría, resolución de problemas y realización de prácticas en ordenador. A diferencia que en Informática, las prácticas apenas están conectadas a la teoría y los problemas (a la materia de examen), de manera que en realidad añaden trabajo extra. Probablemente un cambio de metodología en las clases teóricas como el expresado anteriormente para las asignaturas de segundo curso corregiría el exceso de horas de estudio por hora presencial.

- La estimación de los profesores no puede ser la única referencia que se utilice para determinar el volumen de trabajo de los estudiantes, ya que en la mayoría de los casos sus estimaciones discrepan de las de los alumnos (véase por ejemplo Geometría I, Cálculo Numérico I o Física).

Modelo 1: basado en el volumen total de trabajo del estudiante reflejado en las encuestas (no aconsejable)

En una asignación de créditos basada en las horas totales (horas presenciales más horas de estudio personal) que dedican los estudiantes que superan la asignatura habría que calcular la proporción de trabajo que requiere cada asignatura en relación con el curso completo y multiplicarlo por 60:

$$\frac{\text{volumen de trabajo de aprobados en la asignatura}}{\text{volumen de trabajo del curso completo}} \times 60$$

Esta cantidad es lo que en la tabla aparece como “Proporción”. Para quitar los decimales se redondea a la alta o a la baja según se crea más adecuado.

Primer curso

Asignatura	Créditos españoles	Créditos españoles normalizados a 60	Horas totales aprobados	Proporción	**Propuesta créditos europeos**
Cálculo I	12	9,6	228	8,81	**9**
Conjuntos y Números	12	9,6	226	8,73	**9**
Álgebra Lineal	12	9,6	227	8,75	**9**
Cálculo II	12	9,6	211	8,14	**9**
Geometría I	12	9,6	329	12,67	**11**
Informática	10	8	235	9,05	**9**
Libre elección	5	4	100	3,86	**4**
Total	75	60	1556		60

Segundo curso

Asignatura	Créditos españoles	Créditos españoles normalizados a 60	Horas totales aprobados	Proporción	**Propuesta Créditos europeos**
Cálculo III	8	6,4	196	6,30	**6,5**
Cálculo Numérico I	10	8	338	10,90	**11**
Probabilidad I	10	8	206	6,62	**6,5**
E.D.O.	8	6,4	214	6,89	**7**
Topología	8	6,4	210	6,75	**6,5**
Geometría II	8	6,4	203	6,54	**6,5**
Modelización I	8	6,4	154	4,97	**5**
Física	8	6,4	202	6,52	**6,5**
Libre elección	7	5,6	140	4,51	**4,5**
Total	75	60	1862	60	60

Esta asignación de créditos no es aconsejable ya que n o hay razones académicas que justifiquen estas diferencias tan grandes en el volumen de trabajo de las asignaturas. La comparación de las encuestas realizadas en distintas universidades no confirma el hecho de que la dificultad esté en la materia en sí misma, si no en su plasmación concreta en una universidad. Aplicar el resultado de las encuestas directamente no haría más que consolidar las situaciones presuntamente patológicas reflejadas en ella.

Las estimaciones de los estudiantes deben servir para detectar (y corregir) anomalías en asignaturas concretas, pero no para asignar créditos.

Modelo 2: basado en la guía docente

Cada asignatura, según su dificultad y metodología docente adoptada, requerirá diferente volumen de trabajo del estudiante. L as horas presenciales y las horas de trabajo personal del estudiante están relacionadas por un factor, reflejado en el primer cuadro de este apartado, aunque éste no es el mismo para todas las materias.

Las asignaturas de primer curso, excepto Informática, además de cuatro horas semanales de teoría, incluyen dos horas de problemas para facilitar el trabajo a los estudiantes. Esto hace que se necesite alrededor de 1'7 horas de estudio por cada hora presencial. Geometría I, tal y como está diseñada actualmente, requiere mayor dedicación que las otras asignaturas. Creemos que lo razonable sería 1'9 horas de estudio por hora presencial. En la asignatura de Informática, por sus contenidos y objetivos, la teoría y la práctica se complementan y requiere menos horas de trabajo personal por hora presencial (factor 1'5).

En segundo curso, en cambio, se reducen las horas presenciales de cada asignatura (eliminando las clases de problemas) para que los estudiantes dispongan de más tiempo para el estudio personal. La ausencia de clases de resolución de problemas incrementa la dedicación a 2'5 horas de estudio por hora presencial. Como se ha dicho anteriormente creemos necesario un cambio metodológico para que el factor horas estudio / horas presenciales no sea superior a 2. En Cálculo Numérico I y Probabilidad I hay que diferenciar las horas de teoría de las de prácticas, las primeras con un factor 1’7, menor que en las asignaturas sólo teóricas porque el tiempo dedicado a las prácticas ayuda a la comprensión de la teoría, y las segundas con un factor 1’5 como en Informática.

Cálculo I Conjuntos y Números Álgebra Lineal Cálculo II	84 h presenciales x factor **1’7** = 143 h estudio; 143 h estudio + 84 h presenciales = aprox. **225** h totales
Geometría I	84 h presenciales x factor **1’9** = 165 h estudio 165 h estudio + 84 presenciales = aprox. **250** h totales
Informática	98 h presenciales x factor **1'5** = 147 h estudio 147 h estudio + 98 h presenciales = aprox. **250** h totales
Cálculo III E.D.O. Topología Geometría II Física Modelización I	56 h presenciales x factor **2** = 112 h estudio 112 h estudio + 56 h presenciales = aprox. **175** h totales

Cálculo Numérico I	42 h presenciales teoría x factor **1'7** = 72 h estudio teoría 56 h presenciales prácticas x factor **1'5** = 84 h estudio práctica 72 + 84 h estudio + 98 h presenciales = aprox. **250** h totales
Probabilidad I	56 h presenciales teoría x factor **1'7** = 95 h estudio teoría 21 h presenciales práctica x factor **1'5** = 30 h estudio práctica 95 + 30 h estudio + 77 h presenciales = aprox. **210** h totales

Primer curso

Asignatura	Créditos españoles	Horas totales guía docente	Proporción	Propuesta créditos europeos	Horas totales por crédito europeo
Cálculo I	12	225	9	**9**	25
Conjuntos y Números	12	225	9	**9**	25
Álgebra Lineal	12	225	9	**9**	25
Cálculo II	12	225	9	**9**	25
Geometría I	12	250	10	**10**	25
Informática	10	250	10	**10**	25
Libre elección	5	100	4	**4**	25
Total	75	1500		60	

Segundo curso

Asignatura	Créditos españoles	Horas totales guía docente	Proporción	Propuesta créditos europeos	Horas totales por crédito europeo
Cálculo III	8	175	6,5	**6,5**	26,9
Cálculo Numérico I	10	250	9,3	**9**	26,3
Probabilidad I	10	210	7,8	**8**	26,3
E.D.O.	8	175	6,5	**6,5**	26,9
Topología	8	175	6,5	**6,5**	26,9
Geometría II	8	175	6,5	**6,5**	26,9
Modelización I	8	175	6,5	**6,5**	25,0
Física	8	175	6,5	**6,5**	26,9
Libre elección	7	100	3,7	**4,0**	25,0
Total	75	1610	60	60	

4. Guía docente

La aplicación del ECTS implica centrar la formación en el aprendizaje y la adquisición de competencias y destrezas, valorando adecuadamente el esfuerzo requerido y la calidad del aprendizaje de los estudiantes. Para ello es necesario:

Primero, desarrollar una guía docente que describa, para cada materia:

- objetivos
- contenidos mínimos
- destrezas a adquirir
- metodología de enseñanza
- sistema de evaluación del aprendizaje
- tiempo de estudio personal que debe dedicar un estudiante medio para superarla

Segundo, crear mecanismos de seguimiento de la puesta en práctica de la guía docente y que proporcionen información que permita mejorarla.

Uno de los objetivos de la declaración de Bolonia es ***"promover la cooperación europea en garantía de calidad mediante el desarrollo de metodologías y criterios comparables"***. La guía docente es una herramienta para alcanzar este objetivo ya que proporciona transparencia, aportando información cualitativa (además de cuantitativa) sobre la titulación.

La guía docente debe ser pública y conocida por los estudiantes.

4.1 No hay enseñanza si no hay aprendizaje

Parece necesario un cambio hacia una metodología docente que no lleve al estudiante a posiciones quietistas, y un cambio en la actitud del estudiante frente a su aprendizaje. La implantación del Sistema Europeo de Créditos puede ayudar a reorientar pedagógicamente las enseñanzas, al obligar a definir con detalle objetivos y destrezas de las materias, y aportar transparencia.

Las estrategias de aprendizaje no sólo deben centrarse en el desarrollo de destrezas matemáticas básicas, como el razonamiento abstracto, la deducción lógica y la resolución de problemas, es igualmente importante desarrollar otros aspectos como la capacidad de aprender de forma independiente, de transferir conocimientos de un contexto a otro o de comunicar resultados de manera clara, por mencionar algunos.

Las clases destinadas a la resolución de problemas son una ocasión inmejorable para fomentar la participación de los estudiantes y el intercambio de ideas entre ellos.

4.2 La importancia de la evaluación del aprendizaje

La actitud del estudiante frente a su aprendizaje depende en gran parte de la evaluación. En los sistemas de evaluación del aprendizaje basados exclusivamente en un único examen a final del cuatrimestre los estudiantes suelen posponer el trabajo hasta los últimos días antes del examen mientras que, cuando la evaluación es más continua, tienen que realizar un trabajo más constante.

Siguiendo la línea de la formación centrada en el aprendizaje, y en consonancia con lo que se hace en algunos países europeos, nos atrevemos a sugerir una reflexión sobre la posibilidad de introducir algunas novedades en los sistemas tradicionales de evaluación.

Por una parte, se podría pensar en un sistema de evaluación basado en controles frecuentes (como que el estudiante tenga que resolver problemas propuestos por el profesor y entregarlos periódicamente, realizar trabajos o prácticas en ordenador, individuales o en grupo, preparar y exponer temas, exámenes cortos, etc.) que cuenten para la nota final pero que no supongan excesivo trabajo para el profesor. Si esta evaluación continua es superada, entonces se permitiría la realización del examen final.

Por otra, sería interesante meditar sobre la conveniencia de sustituir los exámenes independientes de asignaturas por exámenes de bloques de asignaturas (por ejemplo, un solo examen para las asignaturas de cada cuatrimestre, en el que el estudiante tenga que relacionar los conceptos y destrezas adquiridos a lo largo del cuatrimestre) y en los cuales sería posible la compensación entre asignaturas. Así se superaría o suspendería todo el bloque, aunque en cada asignatura se obtendría una nota individual.

La capacidad de expresión oral y escrita debe reforzarse a lo largo de la carrera, y debe formar parte del sistema de evaluación del aprendizaje en los últimos cursos.

4.3 Ejemplo: posible planificación de una asignatura de "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias".

Asignatura
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Horas presenciales teóricas: 42
de problemas: 14
de prácticas con ordenador: 7 x 1'5 = 10'5

Horas no presenciales: 110 (7 h a la semana, 3 h de teoría y 4 h de problemas/ prácticas, + 12 h preparación del examen final)

Horas de evaluación: 1'5 h x 4 controles periódicos = 6 horas

Total volumen de trabajo : 182'5 horas

Objetivos de la asignatura
- Conocer y saber utilizar los conceptos y los resultados clásicos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, con especial énfasis en el caso lineal.
- Comprender la imposibilidad de resolver de manera exacta (mediante fórmulas) todas las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y la necesidad de utilizar métodos numéricos y/o enfoques cualitativos (teóricos) para su resolución.
- Conocer la relación entre los problemas reales y su modelo matemático en términos de EDO.

Contenidos
- Interpretación de la derivada de una función en sentido geométrico (pendiente de una curva) y en sentido físico (velocidad).
- Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Problema de Cauchy: ejemplos con solución única, sin solución y con infinitas soluciones.
- EDO lineales de primer orden. EDO homogénea. EDO no homogénea: método de variación de constantes y método de coeficientes indeterminados.

- EDO no lineales de primer orden. EDO reducibles a lineales: Ecuaciones de Bernoulli y Riccati. Ecuaciones de variables separadas y reducibles a ellas. Ecuaciones exactas. Factores integrantes.
- EDO lineales de segundo orden. Espacio vectorial de las soluciones de la EDO homogénea: soluciones linealmente independientes (wronskiano). EDO con coeficientes constantes: polinomio característico. EDO con coeficientes variables: método de serie de potencias. Reducción de orden.
- Sistemas de EDO lineales de primer orden. Espacio vectorial de las soluciones del sistema homogéneo. Sistemas con coeficientes constantes: exponencial de una matriz. Sistemas no homogéneos: método de variación de constantes y método de coeficientes indeterminados.
- Teoremas de existencia y unicidad de solución para problemas de Cauchy. Condición de Lipschitz. Soluciones aproximadas: Iterantes de Picard.
- Sistemas autónomos. Plano de fases.
- Aplicaciones de las EDO: modelos de población de Malthus y logístico, problemas de enfriamiento, desintegración radioactiva, vibraciones en sistemas mecánicos, modelos en biología (ecuación de Volterra).

Destrezas a adquirir

- Distinguir los diferentes tipos de EDO.
- Conocer los principales métodos para resolver EDO.
- Aplicar correctamente los métodos para resolver EDO sencillas.
- Extraer información cualitativa de las soluciones de una EDO, sin necesidad de resolverla (crecimiento, concavidad, …).
- Utilizar algún software de cálculo simbólico para resolver EDO.
- Utilizar algún software para resolver numéricamente problemas de Cauchy asociados a EDO.
- Analizar teóricamente un problema de Cauchy y concluir que tiene solución única en casos donde se verifica la condición de Lipschitz.
- Traducir algunos problemas “reales” (sacados de la Física, Química, Biología, etc…) en términos de EDO.

Temario (con planificación temporal)

Tema 1. Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Concepto. Interpretación geométrica. Modelos. Ecuaciones lineales/no lineales. Problema de valores iniciales. (1 semana)

Tema 2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden: Variables separadas, lineales, homogéneas y reducibles a ellas. Exactas: Factor integrante. (2 semanas)

Tema 3. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Caso con coeficientes constantes. Método de los coeficientes indeterminados. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables: Soluciones en forma de serie de potencias. Métodos numéricos: método de Euler y Euler mejorado. (3 semanas)

Tema 4. Teorema de Arzela-Ascoli. Soluciones aproximadas: Poligonales de Euler. Desigualdad de Gronwall. Condición de Lipschitz. Teoremas de existencia y unicidad de solución: Teoremas de Cauchy-Peano y Picard. Iterantes de Picard. Prolongación de soluciones. Soluciones maximales. Dependencia continua y diferenciabilidad respecto de los datos iniciales. (3 semanas)

Tema 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Métodos matriciales.
(2 semanas)

Tema 6. Sistemas autónomos. Trayectorias. Plano de fases. Concepto de estabilidad de un punto crítico. Método directo de Liapunov: estabilidad, estabilidad asintótica, inestabilidad. (2 semanas)

Bibliografía de referencia

- W. E. Boyce, R. C. DiPrima "Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Valores en la Frontera" Limusa,1998.
- M. Braun "Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones" Grupo Editorial Iberoamericano, 1990.
- C. H. Edwards, D. E. Penney "Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones" Prentice-Hall Hispanoamericana ,1986.
- G. F. Simmons "Ecuaciones Diferenciales" Mc. Graw-Hill, 1993.

Conocimientos previos necesarios
Derivación e integración en una y varias variables. Diagonalización de matrices. Convergencia de series de funciones.

Metodología
3 horas de teoría y 1 hora de problemas a la semana. En las clases de problemas los estudiantes corregirán en la pizarra los problemas propuestos.
Cada dos semanas habrá una sesión de una hora y media en el aula de ordenadores donde se aprenderá a utilizar software de cálculo simbólico aplicado a las ecuaciones diferenciales.

Evaluación del aprendizaje
Cada semana se pondrá a disposición de los estudiantes una hoja con 4 o 5 problemas que deberá ser trabajada (individualmente o en grupos de, a lo sumo, dos personas) y entregada a la semana siguiente. Los problemas entregados por cada estudiante serán corregidos y puntuados, de 0 a 10, por estudiantes de cursos más avanzados (que recibirán créditos de libre elección y beca económica por esta tarea).
Cada cuatro semanas se realizará un control del aprendizaje (examen, exposición de un tema o entrega de un trabajo,...) en el que se evaluará siempre el temario visto desde el primer día de clase. Se hará hincapié en las conexiones entre las asignaturas del cuatrimestre (Cálculo III, Cálculo Numérico I, Probabilidad I y EDO). Todos los controles periódicos contarán igual para la nota final.

Los estudiantes que obtengan al menos el 50% de los puntos en los problemas y un 5 de media en los controles periódicos superarán la asignatura. Para aquellos estudiantes que no alcancen el nivel exigido habrá un sistema de compensación consistente en un examen final conjunto con las asignaturas de Cálculo III, Cálculo Numérico I y Probabilidad I.

5. Conclusiones

El sistema europeo de créditos proporciona un procedimiento estandarizado de medida y comparación del aprendizaje en diferentes contextos, aportando información cualitativa sobre el aprendizaje. Su implantación supone centrar la enseñanza en lo que se aprende y cuánto esfuerzo requiere ese aprendizaje, y hace necesaria la elaboración de guías docentes de cada titulación y cambios en la metodología docente.
Las encuestas dirigidas a estudiantes y profesores aportan información sobre el esfuerzo que requiere el aprendizaje y sirven para detectar anomalías (son un mecanismo de seguimiento), pero no pueden ser la base para la asignación de créditos. Ésta debe hacerse conforme a la guía docente.

El sistema de evaluación del aprendizaje es importante ya que determina en gran parte la actitud del estudiante frente a su aprendizaje y debe planificarse en la guía docente.

6. Referencias

- Declaración de Bolonia, 1999 www.esib.org
- ***El ámbito europeo de la enseñanza superior. Informe de situación y programa de acciones piloto en la Comunidad de Madrid***, Carmen Ruiz-Rivas Hernando, junio 2002
- ***ECTS Guía del usuario***, Comisión Europea, 1998 http://europa.eu.int/comm/education/socrates/usersg.html
- ***The Benchmark document on Mathematics, Statistics and Operational Research***, de la UK Quality Assurance Agency for Higher Education, 2002 www.qaa.ac.uk/cnrtwork/benchmark/phase2/mathematics.pdf
- ***Modalisierung in Hochschulen***, Cuaderno 101, Bund-Länder Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Bund-länder Commission for educational planning and research promotion) www.blk-bonn.de
- Guía para el plan docente de la Diplomatura en Turismo de la Universidad de Barcelona

7. Apéndices

7.1 Apéndice ECTS-1: Formularios encuesta UAM

ENCUESTA ECTS - Estudiantes

El Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid participa en el "Proyecto de Convergencia Europea en Matemáticas", cuyo objetivo es facilitar e impulsar la armonización de la carrera de Matemáticas en las diferentes universidades europeas. Dentro de este proyecto se está trabajando en los créditos **ECTS** (European Credit Transfer System), un sistema desarrollado por la Comisión Europea para medir el aprendizaje de la misma manera en toda la UE y que haga más fácil estudiar en otro país. Los créditos **ECTS** reflejan la carga de trabajo que se exige al estudiante para superar cada asignatura (clases, prácticas, seminarios, **trabajo personal**, exámenes,...). 60 créditos **ECTS** representan un curso académico completo.

Para este proyecto te pedimos una estimación lo más aproximada posible del tiempo total invertido en cada asignatura de primer ciclo de la que te hayas examinado (tanto si la aprobaste como si no). Dentro del tiempo invertido debes contar el tiempo dedicado a las siguientes actividades, siempre que guarden relación con la asignatura:

- estudiar, ya sea de forma individual o en grupo
- pasar apuntes
- hacer problemas
- realizar los exámenes
- preparar trabajos para exponer en clase o para entregar
- hacer las prácticas
- utilizar el ordenador para preparar o para buscar material docente
- hacer gestiones en la biblioteca, en la fotocopiadora, etc.

y, en general, el tiempo dedicado a cualquier actividad relacionada con la asignatura **excepto** la asistencia a clase y los desplazamientos (de casa a la facultad, por ejemplo)

Observación: Un cuatrimestre consta de 14 semanas lectivas. Intenta estimar el número de horas que dedicaste a la asignatura cada semana y luego súmalas. También debes añadir el tiempo que dedicaste a estudiar durante los periodos no lectivos (fines de semana, vacaciones, periodo de exámenes). La encuesta es anónima y sólo se utilizarán los datos promediados.

Asignatura	**Calificación obtenida**	**Convocatoria * (1^a, 2^a,...)**	**Número de horas**
Cálculo I			
Conjuntos y Números			
Álgebra lineal			
Cálculo II			
Geometría I			
Informática			
Cálculo III			
Cálculo Numérico I			
Probabilidad I			
Ec. Diferenciales Ordinarias			
Topología			
Geometría II			
Modelización I			
Física para Matemáticos			

***** Convocatoria en la que aprobaste o en la que te encuentras

Muchas gracias.

Encuesta ECTS - Profesores

Querido/a ... :

El Departamento de Matemáticas participa en el “Proyecto de Convergencia Europea en Matemáticas”, cuyo objetivo es facilitar e impulsar la armonización de la carrera de Matemáticas en las diferentes universidades europeas. Dentro de este proyecto se está trabajando en los créditos **ECTS** (European Credit Transfer System), un sistema desarrollado por la Comisión Europea para medir el aprendizaje de la misma manera en toda la UE y que haga más fácil estudiar en otro país. Los créditos **ECTS** reflejan la carga de trabajo que se exige al estudiante para superar cada asignatura (clases, prácticas, seminarios, **trabajo personal**, exámenes,...). 60 créditos **ECTS** representan un curso académico completo.

Para este proyecto te pedimos una estimación del número de horas que un estudiante medio debería dedicar **fuera de clase** a la asignatura que impartes para superarla.

Asignatura: ...

	Número de horas a la semana	Número de horas en todo el cuatrimestre
Estudiar la teoría		
Hacer los problemas		
Preparar prácticas/trabajos obligatorios		
Preparar prácticas/trabajos opcionales		
Otros (pasar apuntes, gestiones en la biblioteca, en la fotocopiadora,...)		

Observación: Un cuatrimestre consta de 14 semanas lectivas. Indica el número de horas a la semana o en todo el cuatrimestre según sea más fácil de estimar. No olvides tener en cuenta el tiempo que se debería dedicar a la asignatura durante los periodos no lectivos (fines de semana, vacaciones, periodo de exámenes).

Muchas gracias.

7.2 Apéndice ECTS-2: Resultados encuesta

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BARCELONA

Primer Curso (1er semestre)

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos		Total horas aula + estudio alumnos
		todos	Sólo aprob	
Introducción al Álgebra Lineal	75	57,46	58,16	132,46
Cálculo Infinitesimal	75	76,15	77,19	151,15
Matemática Discreta	60	59,55	62,50	119,55
Informática	60	41,59	43,28	101,59
Prácticas Integradas	30	16,90	13,63	46,90
Total	300	251,65		**551,65**

Segundo Curso

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos		Total horas aula + estudio alumnos
		todos	Sólo aprob	
Análisis Matemático I	90	82,59	60,75	172,59
Geometría Lineal	75	57,46	58,77	132,46
Elementos de Física	75	45,15	46,25	120,15
Métodos Numéricos (1er sem.)	60	43,29	55,63	103,29
Análisis Matemático II	90	91,82	78,46	181,82
Geometría Proyectiva	75			75
Fundamentos de Álgebra	90	103,18	93,89	193,18
Total	555	423,48		**978,48**

Tercer Curso

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos		Total horas aula + estudio alumno
		todos	Sólo aprob	
Análisis vectorial	60			
Probabilidad	75	86,00	91,32	161,00
Topología I	75	87,26	89,40	162,26
Modelos con Ec. Diferenciales	75			
Geometría diferencial	75			
Estadística	90			
Análisis complejo	75			
Ecuaciones diferenciales	75	95,75	112,00	170,75

Cuarto y Quinto Curso

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos		Total horas aula + estudio alumno
		todos	sólo aprob	
Análisis Real y Funcional	90	103,08	106,90	193,08
Topología II	60	86,53	91,38	146,53
Álgebra	90			
Cálculo Numérico	90	173,70	184,11	263,70
Análisis de Fourier y EDP	90	106,25	106,25	196,25
Geometría de variedades	60			

TIEMPO MEDIO DE ESTUDIO POR ASIGNATURA Y CALIFICACIÓN

Primer Curso (1er semestre)

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprobado		Not / Sobr / MH	
	nº resp	horas	nº resp	horas	nº resp	horas
Introducción al Álgebra Lineal	16	56,63	14	59,64	5	54,00
Cálculo Infinitesimal	28	75,18	20	78,50	6	72,83
Matemática Discreta	16	56,59	8	64,13	8	60,88
Informática	7	35,57	20	45,35	5	35,00
Prácticas Integradas	20	22,15	23	14,52	9	11,33

Segundo Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprobado		Not / Sobr / MH	
	nº resp	horas	nº resp	horas	nº resp	horas
Análisis Matemático I	13	89,31	4	60,75	0	
Geometría Lineal	1	43,00	0		11	58,77
Elementos de Física	13	43,46	16	49,31	4	34,00
Métodos Numéricos (1er sem.)	6	26,83	4	52,50	4	58,75
Análisis Matemático II	9	111,11	11	74,55	2	100,00
Geometría Proyectiva						
Fundamentos de Álgebra	2	145,00	4	108,50	5	82,20

Tercer Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprobado		Not / Sobr / MH	
	nº resp	horas	nº resp	horas	nº resp	horas
Análisis vectorial						
Probabilidad	8	69,38	12	95,50	13	87,46
Topología I	4	79,25	11	78,45	4	119,50
Modelos con Ec. Diferenciales						
Geometría diferencial						
Estadística						
Análisis complejo						
Ecuaciones diferenciales	7	65,57	10	110,60	3	116,67

Cuarto y Quinto Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprobado		Not / Sobr / MH	
	nº resp	horas	nº resp	horas	nº resp	horas
Análisis Real y Funcional	14	100,36	7	112,71	3	93,33
Topología II	3	60,67	11	101,27	5	69,60
Álgebra						
Cálculo Numérico	1	80,00	5	199,00	4	165,50
Análisis de Fourier y EDP	0		3	101,67	1	120,00
Geometría de variedades						

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LOS ALUMNOS QUE SUPERAN LA ASIGNATURA

Primer curso (1er semestre)

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas Estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Introducción al Álgebra Lineal	7,5	75	19	58,16	133,16	**18**
Cálculo Infinitesimal	7,5	75	26	77,19	152,19	**20**
Matemática Discreta	6	60	16	62,50	122,50	**20**
Informática	6	60	25	43,28	103,28	**17**
Prácticas Integradas	3	30	32	13,63	43,63	**15**

Segundo curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas Estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Análisis Matemático I	9	90	4	60,75	150,75	**17**
Geometría Lineal	7,5	75	11	58,77	133,77	**18**
Elementos de Física	7,5	75	20	46,25	121,25	**16**
Métodos Numéricos (1er sem.)	6	60	8	55,63	115,63	**19**
Análisis Matemático II	9	90	13	78,46	168,46	**19**
Geometría Proyectiva	7,5	75	0			
Fundamentos de Álgebra	9	90	9	93,89	183,89	**20**

Tercer curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas Estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Análisis vectorial	6	60	0			
Probabilidad	7,5	75	25	91,32	166,32	**22**
Topología I	7,5	75	15	89,4	164,4	**22**
Modelos con Ec. Diferenciales	7,5	75	0			
Geometría diferencial	7,5	75	0			
Estadística	9	90	0			
Análisis complejo	7,5	75	0			
Ecuaciones diferenciales	7,5	75	13	112	187	**25**

Cuarto y Quinto curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas Estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Análisis Real y Funcional	9	90	10	106,90	196,90	**22**
Topología II	6	60	16	91,38	151,38	**25**
Álgebra	9	90	0			
Cálculo Numérico	9	90	9	184,11	274,11	**30**
Análisis de Fourier y EDP	9	90	4	106,25	196,25	**22**
Geometría de variedades	6	60	0			

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Primer curso

Además habría que añadir 5 créditos de libre elección

Asignatura	Horas aula Teoría	Horas aula problemas/ práct	Media horas estudio alumnos		Horas estudio profesores	Total horas aula + estudio alumno
			todos	Sólo aprob		
Cálculo I	56	28	144,1	144,4	266	228,1
Conjuntos y Números	56	28	142,4	142,4	140	226,4
Álgebra Lineal	56	28	152,7	142,9	115,5	236,7
Cálculo II	56	28	120,7	127,1	117,5	204,7
Geometría I	56	28	238,3	244,5	142	322,3
Informática	42	56	136,8	136,8	98	234,8
Total	322	196	935		879	**1453**

Segundo curso

Además habría que añadir 7 créditos de libre elección

Asignatura	Horas aula teoría	Horas aula problemas/ práct	Media horas estudio alumnos		Horas estudio profesores	Total horas aula + estudio alumno
			todos	Sólo aprob		
Cálculo III	56	0	139,5	139,5	100,5	195,5
Cálculo Numérico I	42	56	240,4	240,4	140	338,4
Probabilidad I	56	21	120,5	128,5	105,5	197,5
E.D.O.	56	0	152	157,8	210	208
Topología	56	0	153,1	153,6	147,5	209,1
Geometría II	56	0	146,9	146,9	89	202,9
Modelización I	56	0	98,3	98,3	110	154,3
Física	56	0	146,4	146,4	60,5	202,4
Total	434	77	1197,1		963	**1708,1**

TIEMPO MEDIO DE ESTUDIO POR ASIGNATURA Y CALIFICACIÓN

Primer Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprobado		Notable / Sobresal / MH	
	nº respuestas	Tiempo medio	nº respuestas	Tiempo medio	nº respuestas	tiempo medio
Cálculo I	1	140	6	132,5	8	153,3
Conjuntos y Números	0	0	5	112	9	159,2
Álgebra Lineal	1	280	5	132	8	149,8
Cálculo II	1	50	8	123,5	3	136,7
Geometría I	1	170	5	118	6	350
Informática	0	0	9	140	2	122,5

Segundo Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprobado		Notable / Sobresal / MH	
	nº respuestas	Tiempo medio	nº respuestas	Tiempo medio	nº respuestas	tiempo medio
Cálculo III	0	0	6	125,8	4	160
Cálculo Numérico I	0	0	5	202	7	267,9
Probabilidad I	1	40	8	134,4	2	105
E.D.O.	1	100	6	153,3	3	166,7
Topología	1	150	3	163,3	4	146,3
Geometría II	0	0	6	164,2	2	95
Modelización I	0	0	4	105	5	93
Física	0	0	4	120	3	181,7

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LOS ALUMNOS QUE SUPERAN LA ASIGNATURA

Primer curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Cálculo I	12	84	14	144,36	228,36	**19**
Conjuntos y Números	12	84	14	142,36	226,36	**19**
Álgebra Lineal	12	84	13	142,92	226,92	**19**
Cálculo II	12	84	11	127,09	211,09	**18**
Geometría I	12	84	11	244,55	328,55	**27**
Informática	10	98	11	136,82	234,82	**23**

Segundo Curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Cálculo III	8	56	10	139,50	195,50	**24**
Cálculo Numérico I	8	98	12	240,42	338,42	**42**
Probabilidad I	8	77	10	128,50	205,50	**26**
E.D.O.	8	56	9	157,78	213,78	**27**
Topología	8	56	7	153,57	209,57	**26**
Geometría II	8	56	8	146,88	202,88	**25**
Modelización I	8	56	9	98,33	154,33	**19**
Física	8	56	7	146,43	202,43	**25**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Primer Curso

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos			Total horas aula + estudio alumnos (todos)
		todos	sólo aprob	sólo susp	
Álgebra Básica 1	70	104,83	123,92	66,67	174,83
Álgebra Básica 2	70	107,22	152	51,25	177,22
Análisis de una variable real	70	101,16	99,67	106,75	171,16
Ampliación de análisis de una variable real	84	120,00	120,00		204,00
Geometría básica	56	87,32	88,50	84,00	143,32
Informática	84	71,32	91,92	26,67	155,32
Estadística básica	56	54,63	60,29	15,00	110,63
Álgebra Lineal 1	70	167,22	185,00	25,00	237,22
Total	588	813,69			**1401,69**

Segundo Curso

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos			Total horas aula + estudio alumnos (todos)
		todos	sólo aprob	sólo susp	
Cálculo Numérico 1	56	91,25	143,50	39,00	147,25
Álgebra Lineal 2	70	133,33	210,00	56,67	203,33
Cálculo de Probabilidad	70	83,88	83,88		153,88
Análisis de varias variables reales	84	254,29	228,00	320,00	338,29
Teoría de grupos					
Ampliación de An. V. Var. Reales					
Topología					
Inferencia estadística					

TIEMPO MEDIO DE ESTUDIO POR ASIGNATURA Y CALIFICACIÓN

Primer Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprob / Not / Sobresal / MH	
	nº respuestas	horas	nº respuestas	Horas
Álgebra Básica 1	6	66,67	12	123,92
Álgebra Básica 2	4	51,25	5	152
Análisis de una variable real	4	106,75	15	99,67
Ampliación de análisis de una variable real	0		10	120,00
Geometría básica	5	84,00	14	88,50
Informática	6	26,67	13	91,92
Estadística básica	1	15,00	7	60,29
Álgebra Lineal 1	1	25,00	8	185,00

Segundo Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprob / Not / Sobresal / MH	
	nº respuestas	horas	nº respuestas	Horas
Cálculo Numérico 1	4	39,00	4	143,5
Álgebra Lineal 2	3	56,67	3	210
Cálculo de Probabilidad	0		8	83,88
Análisis de varias variables reales	2	320,00	5	228

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LOS ALUMNOS QUE SUPERAN LA ASIGNATURA

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de Encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Álgebra Básica 1	7,5	70	12	123,92	193,92	**26**
Álgebra Básica 2	7,5	70	5	152	222,00	**30**
Análisis de una variable real	7,5	70	15	99,67	169,67	**23**
Ampliación de análisis de una variable real	9	84	10	120,00	204,00	**23**
Geometría básica	6	56	14	88,50	144,50	**24**
Informática	12	84	13	91,92	175,92	**15**
Estadística básica	6	56	7	60,29	116,29	**19**
Álgebra Lineal 1	7,5	70	8	185,00	255,00	**34**
Cálculo Numérico 1	6	56	4	143,5	199,50	**33**
Álgebra Lineal 2	7,5	70	3	210	280,00	**37**
Cálculo de Probabilidad	7,5	70	8	83,88	153,88	**21**
Análisis de varias variables reales	9	84	5	228	312,00	**35**

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Primer Curso

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos			Total horas aula + estudio alumnos (todos)
		todos	sólo aprob	sólo susp	
Introducción á análise matemática	90	85,83	67	180	175,83
Xeometría métrica	90	127,77	129,28	90	217,77
Álxebra lineal e multilineal	90	118,13	122,14	90	208,13
Cálculo diferencial e integral	90	121,96	116,26	140	211,96
Informática	90	35	45	25	125
Introducción ó cálculo numérico	75	125,26	123,89	150	200,26
Topoloxía dos espacios euclidianos	75	81,19	80,25	100	156,19
Total	600	695,14			**1295,14**

Segundo Curso Habría que añadir 7,5 créditos libre elección

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos			Total horas aula + estudio alumnos (todos)
		todos	sólo aprob	sólo susp	
Análise numérica matricial	60	174,80	163,87	207,6	234,80
Difer. de func. de vv. vv. reais	75	82,64	79,56	86,33	157,64
Integ. de func. de vv. vv. reais	75	134,47	140,92	92,5	209,47
Int. ás ecuacións diferen. ordinarias	75	121,90	130,62	105,71	196,90
Int. ó cálculo de probabilidades	60	93,25	94,12	88,33	153,25
Xeometría afín e proxectiva	90	121,53	129,12	114,74	211,53
Topoloxía	90	121,23	107,5	129,9	211,23
Total	525	849,82			**1374,82**

Tercer Curso Habría que añadir 6 créditos libre elección

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos			Total horas aula + estudio alumnos (todos)
		todos	sólo aprob	sólo susp	
Curvas e superficies	90	129,75	134,68	111	219,75
Elementos de variable complexa	60	91,53	91,6	91,43	151,53
Inferencia estatística	75	148,79	150,23	130	223,79
Introducción á álxebra	75	157,95	162,57	155,64	232,95
Métodos numéricos	60	213,4	212,71	215	273,4
Series de Fourier e int. ás EDPs	45	93,3	99,05	79,9	138,3
Teoría global de superficies	75	151,25	151,36	150	226,25
Vectores aleatorios	60	97,14	104,29	90	157,14
Total	540	1083,11			**1623,11**

Cuarto Curso Habría que añadir 4,5 cr optativos y 7,5 cr libre elección

Asignatura	Horas aula	Media horas estudio alumnos			Total horas aula + estudio alumnos (todos)
		todos	sólo aprob	sólo susp	
Xeometría e topoloxía	95	167,03	169,36	157,7	262,03
Teoría da medida	60	144,84	147,89	140	204,84
Álxebra	95	192,71	209,78	173,5	287,71
Análise func. en espacios de Banach	75	179,38	240	143	254,38
Cálculo numérico	90	232,31	228,18	255	322,31
Ecuacións diferenciais ordinarias	60	171,5	250	162,78	231,5
Total	475	1087,77			**1562,77**

Variable complexa	50	110	103,75	120	160

TIEMPO MEDIO DE ESTUDIO POR ASIGNATURA Y CALIFICACIÓN

Primer Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprob / Not / Sobr / MH	
	nº resp	Horas	nº resp	horas
Introducción á análise matemática	1	180	5	67
Xeometría métrica	1	90	25	129,28
Álxebra lineal e multilineal	1	90	7	122,14
Cálculo diferencial e integral	6	140	19	116,26
Informática	4	25	4	45
Introducción ó cálculo numérico	1	150	18	123,89
Topoloxía dos espacios euclidianos	1	100	20	80,25

Segundo Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprob / Not / Sobr / MH	
	nº resp	Horas	nº resp	horas
Análise numérica matricial	5	207,6	15	163,87
Difer. de func. de vv. vv. reais	15	86,33	18	79,56
Integ. de func. de vv. vv. reais	2	92,5	13	140,92
Int. ás ecuacións diferen. ordinarias	7	105,71	13	130,62
Int. ó cálculo de probabilidades	3	88,33	17	94,12
Xeometría afín e proxectiva	19	114,74	17	129,12
Topoloxía	19	129,9	12	107,5

Tercer Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprob / Not / Sobr / MH	
	nº resp	horas	nº resp	horas
Curvas e superficies	5	111	19	134,68
Elementos de variable complexa	7	91,43	10	91,6
Inferencia estatística	2	130	26	150,23
Introducción á álxebra	14	155,64	7	162,57
Métodos numéricos	6	215	14	212,71
Series de Fourier e int. ás EDPs	9	79,9	21	99,05
Teoría global de superficies	2	150	22	151,36
Vectores aleatorios	7	90	7	104,29

Cuarto Curso

Asignatura \ Calificación	Suspenso		Aprob / Not / Sobr / MH	
	nº resp	horas	nº resp	horas
Xeometría e topoloxía	7	157,7	28	169,36
Teoría da medida	12	140	19	147,89
Álxebra	8	173,5	9	209,78
Análise func. en espacios de Banach	5	143	3	240
Cálculo numérico	2	255	11	228,18
Ecuacións diferenciais ordinarias	9	162,78	1	250

Variable complexa	5	120	8	103,75

RESUMEN DE LOS RESULTADOS DE LOS ALUMNOS QUE SUPERAN LA ASIGNATURA

Primer Curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Introducción á análise matemática	9	90	5	67	157	**17**
Xeometría métrica	9	90	25	129,28	219,28	**24**
Álxebra lineal e multilineal	9	90	7	122,14	212,14	**24**
Cálculo diferencial e integral	9	90	19	116,26	206,26	**23**
Informática	9	90	4	45	135	**15**
Introducción ó cálculo numérico	7,5	75	18	123,89	198,89	**27**
Topoloxía dos espacios euclidianos	7,5	75	20	80,25	155,25	**21**

Segundo Curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Análise numérica matricial	6	60	15	163,87	223,87	**37**
Difer. de func. de vv. vv. reais	7,5	75	18	79,56	154,56	**21**
Integ. de func. de vv. vv. reais	7,5	75	13	140,92	215,92	**29**
Int. ás ecuacións diferen. ordinarias	7,5	75	13	130,62	205,62	**27**
Int. ó cálculo de probabilidades	6	60	17	94,12	154,12	**26**
Xeometría afín e proxectiva	9	90	17	129,12	219,12	**24**
Topoloxía	9	90	12	107,5	197,5	**22**

Tercer Curso

Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Curvas e superficies	9	90	19	134,68	224,68	**25**
Elementos de variable complexa	6	60	10	91,6	151,6	**25**
Inferencia estatística	7,5	75	26	150,23	225,23	**30**
Introducción á álxebra	7,5	75	7	162,57	237,57	**32**
Métodos numéricos	6	60	14	212,71	272,71	**45**
Series de Fourier e int. ás EDPs	4,5	45	21	99,05	144,05	**32**
Teoría global de superficies	7,5	75	22	151,36	226,36	**30**
Vectores aleatorios	6	60	7	104,29	164,29	**27**

Cuarto Curso

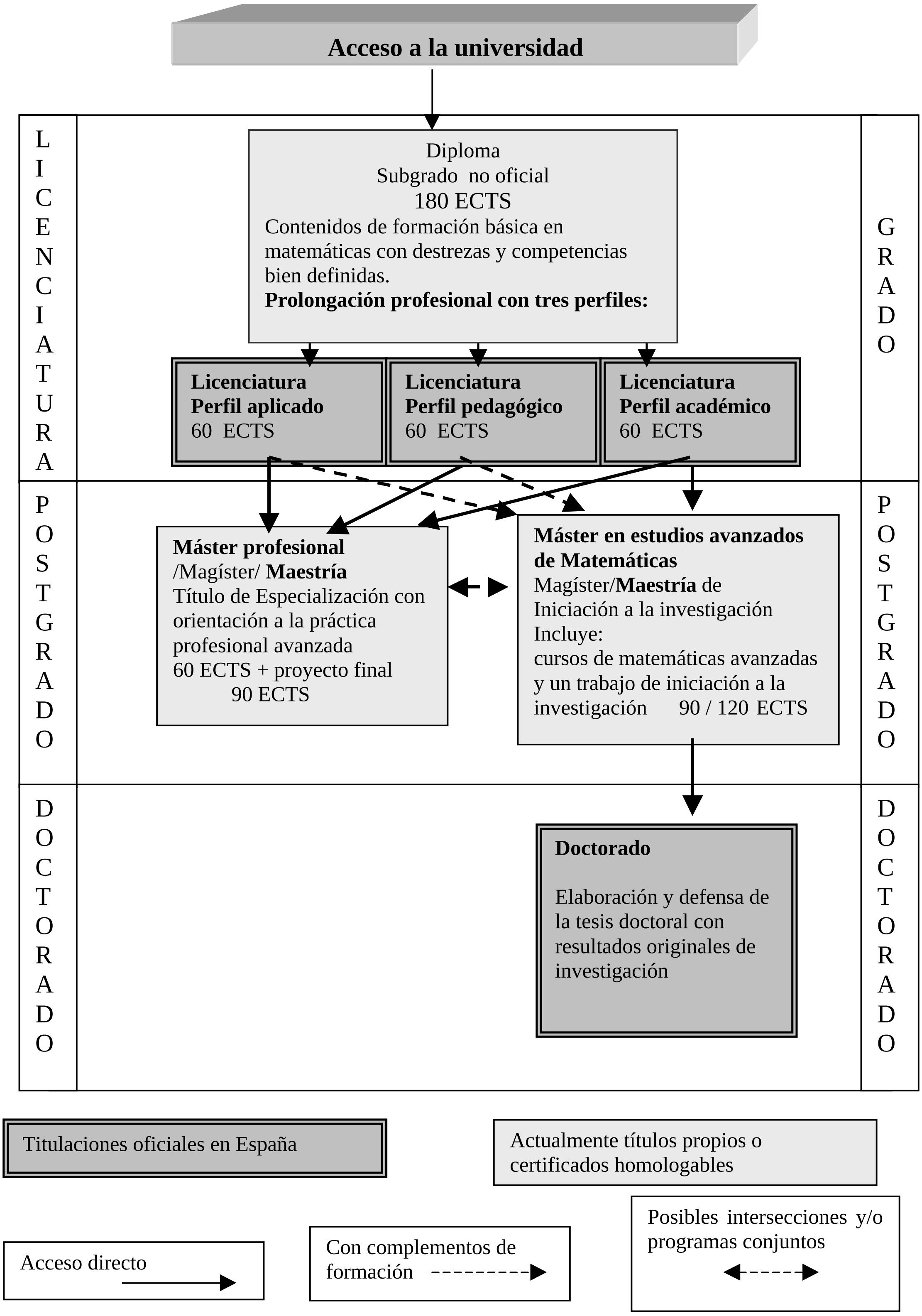
Asignatura	Créditos asignatura	Horas de contacto	Número de encuestados	Media horas estudio aprobados	Horas totales (contacto+estudio)	Horas totales por crédito
Xeometría e topoloxía	9,5	95	28	169,36	264,36	**28**
Teoría da medida	6	60	19	147,89	207,89	**35**
Álxebra	9,5	95	9	209,78	304,78	**32**
Análise func. en espacios de Banach	7,5	75	3	240	315	**42**
Cálculo numérico	9	90	11	228,18	318,18	**35**
Ecuacións diferenciais ordinarias	6	60	1	250	310	**52**

Variable complexa	5	50	8	103,75	153,75	**31**

Anexo 4

Propuesta de esquema general de estructura de los estudios

Propuesta de
esquema general para los estudios de matemáticas



El Grado en Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

El Grado en Matemáticas debe posibilitar el acceso directo al mercado de trabajo en puestos con un nivel alto de responsabilidad. Las administraciones públicas deben aceptar que el Grado en Matemáticas dé acceso al grupo A en la función pública.

Para garantizar ambas condiciones, sin olvidar la tradición española, el nombre del Grado debería ser **"Licenciado en Matemáticas"**.

El título de Licenciado en Matemáticas debe cualificar para la formulación matemática, análisis, resolución y, en su caso, tratamiento informático de problemas en diversos campos interdisciplinares de las ciencias básicas, ciencias sociales y de la vida, ingeniería, finanzas, consultoría, etc..., con vistas a las aplicaciones, los desarrollos científicos y/o la docencia.

El documento completo y detallado con los objetivos generales, contenidos básicos y destrezas a adquirir se encuentra en el anexo 5. A continuación se resumen algunos aspectos.

Contenidos

Quienes obtengan el grado de Licenciado en Matemáticas deben conocer y entender los métodos y técnicas básicas de las matemáticas a un nivel que les permita utilizarlas con eficacia para realizar tareas con contenido matemático en su vida laboral.

Todos los programas deben incluir como bases comunes: calculo en una y varias variables reales y álgebra lineal. Además, los graduados deben estar familiarizados con las principales áreas de las matemáticas, no sólo las que han guiado históricamente la actividad matemática, sino también las de origen más moderno. Por tanto, todos los graduados en matemáticas deben conocer las ideas básicas de:

- ecuaciones diferenciales
- funciones de variable compleja
- probabilidad
- estadística
- métodos numéricos
- geometría de curvas y superficies
- estructuras algebraicas
- matemática discreta

El conocimiento de otros métodos, técnicas y contenidos puede depender en gran medida de las características concretas del programa y del perfil profesional elegido pero es importante que todos los graduados hayan alcanzado un nivel más elevado en algún área.

Es necesario que todos los graduados hayan tratado al menos un campo en el que las matemáticas se apliquen de una manera que se considere esencial para la comprensión del campo en cuestión y su aplicación profesional.

Destrezas

La gran variedad de salidas profesionales que se ofrecen hoy en día a los graduados en matemáticas son, en gran medida, consecuencia del valor que los empleadores otorgan a la capacidad para el razonamiento riguroso, el análisis cuantitativo y la resolución de problemas, que caracterizan a los licenciados en matemáticas.

Las tres destrezas clave que deberían adquirirse durante este periodo son por tanto:

- la capacidad para idear una demostración,
- la habilidad para modelar una situación,
- la facilidad para resolver problemas, incluida la búsqueda de soluciones numéricas.

Es evidente que, hoy en día, encontrar soluciones numéricas a un problema requiere conocimientos sólidos de programación y algoritmos.

No es necesario recordar que estas destrezas se desarrollan progresivamente. No se empiezan los estudios de matemáticas con un curso llamado “Cómo hacer una demostración” y otro llamado “Cómo construir un modelo”, de modo que ambas cosas se aprendan inmediatamente. Por el contrario, todos los cursos del grado deben dirigirse a desarrollar las tres destrezas básicas.

Duración y organización

Hay en principio y dentro de los esquemas europeos, dos alternativas para la duración del Grado en Matemáticas: 3 años (180 créditos ECTS) y 4 años (240 créditos ECTS). Ambas tienen ventajas e inconvenientes y, sobre todo, responden a concepciones que, aunque parecidas, no son idénticas.

Se podría optar por **3 años** si se desease dar en el grado únicamente la formación básica. Las ventajas de esta alternativa son que permite una más rápida inserción en el mercado de trabajo (aunque sin un perfil definido) y que los alumnos desencantados por uno u otro motivo podrían dejar antes sus estudios con un título oficial. Una desventaja evidente en el contexto español sería la dificultad para el reconocimiento de un título alcanzado en tres años como correspondiente a una Licenciatura.

La opción de **4 años,** que corresponde a nuestra propuesta, permite completar la formación básica con una formación específica, que dependería de las aspiraciones profesionales futuras del estudiante, en el cuarto año. Se podrían diseñar, al menos, tres perfiles profesionales correspondientes a las tres actividades mayoritarias de los licenciados en matemáticas:

- Académico: dirigido a quienes deseen seguir una carrera como investigador o profesor universitario. Estaría centrada sobre todo en la matemática más pura o “teórica” (en todas las áreas, incluidas las asociadas con las aplicaciones).
- Didáctico: dirigida a los futuros profesores de enseñanza secundaria. El cuarto año debería incluir también la obtención del Certificado oficial de Capacitación Pedagógica (o equivalente) y por tanto ser el requisito para optar a la enseñanza pública de las matemáticas en la secundaria.
- Aplicado: para quienes quieran encaminarse a la industria o la empresa. Sus contenidos serían claramente aplicados y deberían complementarse con prácticas concretas.

Cada universidad, según su capacidad e intereses podría ofrecer los tres perfiles o sólo alguno de ellos; también podría diseñar programas conjuntos orientados a que el estudiante pueda realizar varias opciones.

Consideramos que esta opción es más realista y adecuada para nuestra tradición. Sin embargo creemos interesante mantener el diseño de un primer diploma, no necesariamente oficial, de 3 años que recoja los contenidos básicos y las destrezas correspondientes a una formación generalista en matemáticas y que pueda capacitar para, mediante las oportunas pasarelas, acceder a otros estudios.

La propuesta, por tanto se estructura de la siguiente forma:

LICENCIATURA

Diploma no oficial
180 ECTS
Contenidos de formación básica en matemáticas con destrezas y competencias bien definidas.
Prolongación profesional con tres perfiles:

Licenciatura **Perfil aplicado** 60 ECTS	**Licenciatura** **Perfil pedagógico** 60 ECTS	**Licenciatura** **Perfil académico** 60 ECTS

GRADO

El anexo 5 detalla la propuesta sobre los objetivos contenidos y destrezas correspondientes a la formación básica del graduado y los tres perfiles profesionales.

El postgrado en Matemáticas
Máster y Doctorado

El postgrado previo a la elaboración de una tesis doctoral de investigación debe denominarse **Máster** como en la actualidad en la mayoría de los países europeos incorporados al proceso abierto en Bolonia. En el anexo 6 se encuentran algunos ejemplos.

Nuestra propuesta contempla dos tipos de máster:

Máster profesional (90 créditos ECTS)

- Acceso directo desde cualquier perfil de los establecidos en los estudios de licenciatura.
- Prueba de acceso o, en su caso, complementos para estudiantes con otro tipo de estudios previos de grado.
- Orientación más aplicada o profesional.
- Consiste en cursos de formación profesional avanzada en ámbitos concretos y debería finalizar con un “proyecto fin de máster” (un trabajo que requiera una apreciable cantidad de trabajo personal) o con prácticas avanzadas en la industria o la empresa.
- Ejemplos: matematicas de la ingeniería, matemáticas de las finanzas, estadística aplicada, formación avanzada en enseñanza de las matemáticas,…

Máster científico / Estudios Avanzados (90/120 créditos ECTS)

- Acceso directo desde el perfil académico de la licenciatura y con complementos para los otros perfiles que deben establecerse de manera específica al presentar la programación de máster científico concreto
- Orientación más académica de iniciación a la investigación.
- Otorga la suficiencia investigadora y puede prolongarse con la elaboración de una tesis doctoral.
- Consiste en cursos que completen la formación académica avanzada en uno o varios campos de la matemática más un trabajo de iniciación a la investigación que puede servir de punto de partida para una tesis doctoral.

Sólo el máster científico de iniciación a la investigación otorga la suficiencia investigadora y por tanto el acceso a la elaboración de la tesis conducente al grado de Doctor. Consideramos posible y , en algunos casos, recomendable la organización de programas conjuntos con una amplia intersección común entre los dos tipos de máster, de forma que se pueda obtener un perfil de investigador adaptado a las actividades de I+D de industrias y empresas.

Doctorado

El título de **Doctor** se obtendrá tras la defensa y aprobación de una tesis doctoral con resultados originales de investigación. Será posterior a la obtención del título de máster científico.

El anexo 6 presenta varios ejemplos de postgrado de diversos tipos.

Anexo 5

Propuesta de contenidos básicos y destrezas a adquirir para la obtención del grado de Licenciado en Matemáticas: Formación generalista + tres perfiles profesionales

CONTENIDOS BÁSICOS Y DESTREZAS A ADQUIRIR EN LOS TRES PRIMEROS CURSOS DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

1. Objetivos y destrezas de carácter general

Objetivos:

Desarrollar las capacidades analíticas y el pensamiento lógico y riguroso de los alumnos a través del estudio de las matemáticas.

Adquirir la capacidad de utilizar los conocimientos teóricos y prácticos aprendidos, en la definición de problemas y en la búsqueda de soluciones en contextos académicos o empresariales.

Preparar para posteriores estudios especializados, tanto en una disciplina matemática como en cualquiera de las ciencias que requieran buenos fundamentos matemáticos

Destrezas:

1. Destrezas teóricas

- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático, en términos de otros ya conocidos, y ser capaz de utilizar este objeto con corrección y exactitud.
- Reconocer razonamientos correctos en demostraciones sobre objetos matemáticos e identificar falacias o errores en razonamientos incorrectos
- Comprender y utilizar con soltura el lenguaje matemático y conocer los distintos tipos de demostración.
- Conocer demostraciones rigurosas de algunos resultados clásicos en distintos campos matemáticos. Poder idear demostraciones nuevas de enunciados que se le proporcionen

2. Resolución de problemas

- Conocer métodos para plantear la resolución de un problema dado, en diversos campos matemáticos para llevarlo a una solución exacta o a una solución numérica aproximada.
- Aplicar métodos de aproximación adecuados al problema y a las herramientas de que se disponga
- Trabajar en la solución de problemas con restricciones de tiempo y recursos.

3. **Modelización**

- Proponer modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan.
- Seleccionar definiciones y objetivos para una modelización
- Interpretar resultados obtenidos a través de un modelo

2. Objetivos, contenidos mínimos y destrezas por materias

(no es necesario identificar *materia* con *asignatura*)

Álgebra Lineal

Objetivos:

Asimilar y manejar con toda fluidez los principales conceptos del Álgebra Lineal, incluyendo en este las Geometrías Afín y Euclídea.

Proporcionar la capacidad de realizar la traducción (y la correspondiente resolución), en términos de matrices, de todos aquellos problemas que surgen en la manipulación de los espacios vectoriales y de las aplicaciones lineales.

Contenidos mínimos:

- Espacios vectoriales y aplicaciones lineales
- Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.
- Autovalores y autovectores. Forma Canónica de Jordan.
- Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas. Diagonalización.
- Espacios afines y euclideos. Transformaciones. Clasificación de cónicas y cuádricas.

Destrezas:

- Operar con vectores, bases, subespacios y aplicaciones lineales.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Decidir si una matriz (o endomorfismo) es o no diagonalizable (sobre **R** o **C**) calculando la forma diagonal.
- Calcular la Forma Canónica de Jordan de una matriz.
- Diagonalizar una forma cuadrática y calcular su signatura (en el caso real).
- Decidir si dos matrices dadas son equivalentes, semejantes o congruentes.
- Uso del método Gram-Schmidt para calcular bases ortonormales,

subespacios ortogonales y proyecciones ortogonales.

- Operar con puntos y vectores en un espacio afín así como con los sistemas de referencia afines, los subespacios afines y sus problemas de intersección y las transformaciones afines siendo capaz de calcular los elementos característicos de las traslaciones, homotecias, simetrías y proyecciones.

- Operar con puntos, vectores, distancias y ángulos en un espacio euclídeo. Efectuar cambios de sistemas de referencia rectangulares.

- Clasificar una isometría del plano o del espacio determinando su tipo y elementos característicos.

- Clasificar cónicas y cuádricas.

Cálculo Diferencial e Integral

Objetivos:

Conocer y saber utilizar los conceptos y los resultados fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral para funciones de un número finito de variables reales, así como del Cálculo Vectorial clásico.

Conocer y comprender demostraciones de algunos de los teoremas más importantes.

Contenidos mínimos:

- Estructura del cuerpo ordenado de los números reales. Topología de $\mathbf{R}^n$.

- Convergencia de sucesiones en $\mathbf{R}$ y en $\mathbf{R}^n$. Series numéricas.

- Continuidad de funciones reales de una variable real y de funciones vectoriales de variable vectorial.

- Diferenciación de funciones reales de una variable. Desarrollos en serie. Extremos de funciones.

- Convergencia de sucesiones de funciones. Series de potencias.

- Funciones elementales.

- Derivadas parciales. Teorema de la función inversa. Teorema de la función implícita. Extremos locales y extremos condicionados.

- La integral definida como área. Teorema Fundamental del Cálculo. Técnicas elementales de integración.

- Integral de Riemann para una función de varias variables.

- Representación paramétrica de curvas y superficies. Longitud y área. Integrales de línea y de superficie. Teoremas de Green-Gauss, de Stokes y de la Divergencia.

Destrezas:

- Manipular desigualdades, analizar y dibujar funciones, deducir propiedades de una función a partir de su gráfica, comprender y trabajar intuitiva, geométrica y formalmente con las nociones de límite, derivada, integral.

- Calcular integrales de una variable utilizando la Regla de Barrow y con ayuda de cambios de variable y de la integración por partes, incluyendo al menos funciones racionales y trigonométricas.

- Utilizar algún programa de cálculo simbólico para obtener (e interpretar) límites, sumas de series, derivadas e integrales.

- Plantear adecuadamente y resolver integrales de varias variables, integrales curvilíneas e integrales de superficie.

- Utilizar correctamente en aplicaciones a otros campos los conceptos asociados a las derivadas parciales, a las integrales de línea y de superficie, y a las integrales de dos o tres variables.

- Conocer y saber utilizar métodos de aproximación numérica en el cálculo de integrales y de aproximación de funciones.

- Resolver problemas que impliquen el planteamiento de integrales.

- Resolver problemas de optimización.

- Conocer definiciones formalmente correctas de los conceptos más importantes (convergencia, continuidad, integrabilidad, etc.)

Matemática Discreta

Objetivos:

Plantear y resolver problemas de optimización lineal.

Conocer y manejar los conceptos y resultados básicos de teoría de grafos y combinatoria enumerativa.

Contenidos mínimos:

- Programación lineal.
- Teoría elemental de grafos.
- Combinatoria y métodos de enumeración.

Destrezas:

- Saber utilizar el método del simplex para resolver problemas de optimización lineal
- Ser capaz de determinar en grafos razonablemente pequeños los diferentes conceptos de teoría de grafos
- Modelar problemas de redes, geometría, etc., en términos de grafos e interpretar el significado de los conceptos de teoría de grafos en dichos contextos.

- Ser capaz de aplicar los principios de doble conteo y de inclusión-exclusión en diversos contextos.
- Identificar objetos que se pueden contar con números binomiales y/o multinomiales.

Informática

Objetivos:

Iniciar al alumno en algún lenguaje de programación científica.

Conocer los conceptos fundamentales de la algorítmica.

Objetivos de carácter instrumental:

Conocer, a nivel de usuario, las herramientas básicas de los ordenadores.

Contenidos mínimos:

- Conceptos básicos sobre ordenadores y sus componentes, sistemas operativos y lenguajes de programación.
- Lenguaje de programación científica.
- Introducción al diseño y análisis de algoritmos.
- Contenidos de carácter instrumental:
  - Herramientas básicas: edición de textos, hojas de cálculo, internet.
  - Edición de textos científicos.

Destrezas:

- Utilizar con soltura algún sistema operativo.
- Conocer los conceptos básicos del hardware y software del ordenador.
- Programar algoritmos para resolver problemas científicos y técnicos.
- Destrezas de carácter instrumental:
  - Manejar las herramientas básicas de comunicaciones.
  - Crear y manipular ficheros de texto y realizar operaciones elementales con hojas de cálculo.
  - Editar textos con fórmulas matemáticas.

Estructuras Algebraicas

Objetivos:

Conocer las propiedades de las estructuras correspondientes a los conjuntos de números enteros, racionales, reales y complejos, de los polinomios en una y varias variables y manejar con soltura todo tipo de expresiones algebraicas.

Manejar con soltura las nociones básicas de la teoría de conjuntos y aplicaciones, las propiedades elementales de las estructuras algebraicas básicas así como de las correspondientes subestructuras y cocientes y conocer ejemplos de todas ellas.

Conocer algunos casos de clasificación de objetos en una misma estructura algebraica mediante el uso de la noción de isomorfismo y la búsqueda de invariantes o características que permitan decidir cuando, por ejemplo, dos grupos no son isomorfos.

Contenidos mínimos:

- Estructuras algebraicas elementales: **Z, Q**, **R, C** y polinomios en una y varias variables
- Conjuntos y aplicaciones.
- Relaciones de equivalencia y orden. Conjuntos cociente.
- Grupos y homomorfismos de grupos
- Subgrupo normal y grupo cociente. Teorema de Lagrange. Teorema de Cayley
- Clasificación de grupos abelianos finitamente generados.
- Anillos e ideales. Homomorfismos de anillos.
- Divisibilidad y factorización.
- Números algebraicos y transcendentes.

Destrezas:

- Manejar con precisión el lenguaje proposicional, siendo capaz de traducir a éste la veracidad o falsedad de cualquier afirmación sobre conjuntos y aplicaciones.
- Utilizar el Algoritmo de Euclides para el cálculo del mcd de números enteros y polinomios así como para determinar los coeficientes en la Identidad de Bézout.
- Determinar la factorización en primos (resp. irreducibles) de números enteros (resp. polinomios) en casos sencillos.
- Descomponer en fracciones simples una fracción algebraica.
- Estudiar la existencia de elementos de orden dado en un grupo simétrico de grado n. Determinar subgrupos cíclicos, diédricos o abelianos sencillos en un grupo simétrico de grado n.
- Determinar si un subgrupo dado es normal o no y, en caso afirmativo, calcular el correspondiente grupo cociente.
- Saber definir homomorfismos sencillos para estudiar sus propiedades y analizar si dos grupos dados son isomorfos, si uno es isomorfo a un subgrupo de otro o para expresar un grupo como cociente de otro.
- Operar de forma correcta en el anillo cociente y cálculo de inversos modulares.
- Operar de forma correcta con los cocientes de anillos de polinomios o en anillos de la forma **Z**[a] con a en **C** algebraico prestando especial atención a los aspectos de factorización.
- Manipular de forma precisa expresiones algebraicas involucrando elementos algebraicos y transcendentes.

Geometría

Objetivos:

Conocer y saber utilizar los conceptos básicos de la Geometría del plano y el espacio euclídeo.

Conocer y saber utilizar los conceptos básicos de la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies.

Desarrollar la capacidad de interpretar geométricamente enunciados y propiedades presentados analíticamente, y, recíprocamente, de formular en términos matemáticos situaciones de índole geométrica.

Contenidos mínimos:

- Geometría del triángulo y la circunferencia. Lugares geométricos.
- Movimientos en el plano y el espacio.
- Polígonos y poliedros regulares.
- Geometría vectorial de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.
- Curvas. Longitud de arco. Triedro de Frenet.
- Curvas notables: hélices, evolutas y evolventes.
- Superficies. La primera y la segunda formas fundamentales. Teorema egregio de Gauss.
- Superficies notables: de revolución, regladas, desarrollables y minimales.

Destrezas:

- Saber resolver problemas geométricos del plano, y saber elegir los métodos sintético y analítico según convenga más en cada caso.
- Saber resolver problemas geométricos en el plano que involucren puntos y rectas.
- Saber formular la ecuación de un lugar geométrico y conocer una buena colección de ellos.
- Conocer las propiedades geométricas de una colección grande de curvas y superficies de $\mathbf{R}^3$.
- Reconocer la naturaleza de los puntos de una superficie de $\mathbf{R}^3$, sabiendo calcular los objetos geométricos asociados al punto (curvatura de Gauss,...)
- Reconocer las propiedades intrínsecas de una superficie.
- Conocer la existencia de las geometrías no euclídeas. Conocer la existencia de los problemas clásicos griegos: cuadratura del círculo, trisección del ángulo, duplicación del cubo.
- Reconocer la geometría subyacente en la Naturaleza y en el Arte.

Probabilidades y Estadística

Objetivos:

Desarrollar la intuición sobre fenómenos aleatorios.

Comprensión y manejo de los principios básicos del Cálculo de Probabilidades.

Conocimiento de los teoremas fundamentales del Cálculo de Probabilidades incluyendo su demostración, al menos en situaciones sencillas.

Comprensión de los principios y conceptos básicos de la Estadística Matemática así como su aplicación para la solución de problemas reales.

Contenidos mínimos:

- Espacios probabilísticos continuos y discretos. Funciones de densidad y de distribución.

- Variables aleatorias y sus distribuciones. Esperanza matemática.
- Independencia. Leyes de los Grandes Números y Teorema Central del Límite.
- Estadística descriptiva y análisis de datos.
- El método estadístico. Estimación puntual y por intervalo.
- Contrastes de hipótesis.
- El modelo lineal.

Destrezas:

- Saber calcular probabilidades en espacios discretos y probabilidades geométricas.
- Manejar variables aleatorias discretas y continuas.
- Comprensión y utilización del concepto de independencia.
- Saber utilizar las aplicaciones estadísticas del teorema central del límite.
- Saber analizar e interpretar un conjunto de datos.
- Conocer las técnicas de generación de números pseudoaleatorios.
- Manejo de los métodos de máxima verosimilitud, de Bayes y de mínimos cuadrados para la construcción de estimadores.
- Comprensión de las propiedades básicas de los estimadores puntuales y de intervalo.
- Saber plantear problemas de contraste de hipótesis en una o dos poblaciones.
- Comprensión del fundamento del modelo lineal incluyendo los modelos más simples del Análisis de la Varianza y de los problemas de regresión y correlación.
- Utilización de software estadístico.

Ecuaciones Diferenciales

Objetivos:

Conocer la relación entre los problemas reales y su modelo matemático en términos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Conocer y saber utilizar los conceptos y los resultados clásicos relacionados con las EDO, con especial énfasis en el caso lineal.

Comprender la imposibilidad de resolver de manera exacta todas las EDO y la necesidad de utilizar métodos numéricos y enfoques cualitativos para su resolución.

Contenidos mínimos:

- Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Problema de Cauchy.

- Métodos elementales de resolución de ecuaciones de primer orden. Aplicaciones.

- EDO lineales de segundo orden. EDO con coeficientes constantes. Método de serie de potencias. Modelos y aplicaciones.

- Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sistemas con coeficientes constantes: exponencial de una matriz.

- Teoremas de existencia y unicidad de solución para problemas de Cauchy.

- Dependencia de condiciones iniciales y parámetros.
- Sistemas autónomos. Plano de fases. Aplicaciones.
- Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales.

Destrezas:

- Distinguir los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.
- Traducir algunos problemas reales en términos de EDO.
- Conocer y aplicar los principales métodos para resolver EDO sencillas.
- Extraer información cualitativa de las soluciones de una EDO, sin necesidad de resolverla (crecimiento, concavidad, …)
- Utilizar algún software para resolver EDO.

Variable compleja

Objetivos:

Conocer los fundamentos de la teoría de funciones de una variable compleja.

Contenidos mínimos:

- El plano complejo.
- Funciones derivables. Series de potencias.
- Fórmula de la Integral de Cauchy.
- Desarrollo de funciones analíticas en serie de potencias.
- Funciones enteras y sus propiedades.
- Propiedades básicas de las funciones analíticas.
- Desarrollos de Laurent y Teorema de Cauchy del Residuo.

Destrezas:

- Identificar las diferencias básicas entre las propiedades de las funciones de variable real y de variable compleja.
- Conocer y saber utilizar las propiedades fundamentales de las funciones analíticas.
- Calcular residuos e integrales reales por este método.

Cálculo Numérico

Objetivos:

Analizar, programar e implantar en ordenador algunos de los algoritmos o métodos constructivos de soluciones de problemas.

Conocer las implicaciones de la presencia de los errores de redondeo y aproximación.

Valorar la importancia del coste operativo y de memoria-ordenador de los métodos y su eficacia así como el equilibrio entre complejidad, precisión y rapidez.

Contenidos mínimos:

- Representación de números en el ordenador y errores en el cálculo numéricos.
- Métodos de resolución de ecuaciones no lineales
- Resolución de sistemas lineales: métodos directos e iterativos.
- Cálculo de autovalores y autovectores
- Interpolación y ajuste: polinomial, splines y trigonométrica.
- Integración aproximada.
- Métodos de cálculo de mínimos de funciones reales.

Destrezas:

- Manejar software de cálculo numérico.
- Analizar la conveniencia de uno u otro método numérico para un problema concreto.
- Programar e implantar en el ordenador los métodos numéricos y aplicarlos de manera efectiva.
- Evaluar los resultados obtenidos y obtener conclusiones después de un proceso de cómputo.
- Conocer y saber aplicar algoritmos para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones lineales de orden medio y alto.
- Localizar y calcular numéricamente raíces de ecuaciones no lineales.
- Localizar y calcular autovalores y autovectores: métodos de la potencia.
- Conocer y saber aplicar los principales algoritmos de interpolación y de ajuste.
- Conocer y saber utilizar fórmulas de cuadratura para integración aproximada sobre intervalos reales y sobre dominios sencillos del plano y del espacio (triángulos, rectángulos, ...).
- Conocer y utilizar algoritmos sencillos de búsqueda de mínimos para resolver numéricamente algunos problemas de optimización.

Perfil aplicado

Objetivos

Que el licenciado sea capaz de plantear modelos matemáticos de cierta complejidad en diversos ámbitos.
Que conozca herramientas informáticas y numéricas de resolución de problemas.
Que conozca técnicas estadísticas y de optimización.

Contenidos mínimos

En este perfil el licenciado debe de cursar al menos 4 de las siguientes materias:

- Ecuaciones en derivadas parciales
- Cálculo científico y programación avanzada.
- Modelos matemáticos
- Matemática discreta
- Probabilidad
- Métodos estadísticos
- Investigación operativa y optimización.

Destrezas

Saber interpretar en términos matemáticos situaciones expresadas en el lenguaje de otras disciplinas.
Saber realizar análisis de datos y extraer conclusiones.
Plantear matemáticamente problemas reales e identificar o idear métodos de aproximación y resolución numérica en ordenador.
Manejar las herramientas básicas del cálculo científico.

Rango profesional

Este perfil de la licenciatura de matemáticas capacita profesionalmente para la inserción de los matemáticos en equipos interdisciplinares de empresas, industrias y consultorías así como en unidades de i+I+D.

Perfil didáctico

Objetivos

Que el licenciado conozca y domine, desde un punto de vista superior, los contenidos de los programas de matemáticas en secundaria
Que sepa planificarlos, estructurarlos y comunicarlos al nivel adecuado
Que conozca las distintas facetas del conocimiento matemático (conexión con otras disciplinas y con el entorno, carácter formativo, aplicaciones...)

Contenidos mínimos

- Fundamentos teóricos de las matemáticas elementales.
- Historia de las matemáticas.
- Teorías del aprendizaje en la educación matemática.
- Diseño curricular en matemáticas
- Metodologías, materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas.
- Prácticas de enseñanza en las aulas de secundaria.

Destrezas

Saber conectar los conceptos matemáticos del currículo de la secundaria con los fenómenos que los originan.
Reconocerlos en situaciones cotidianas y ámbitos multidisciplinarios.
Dominar de técnicas de comunicación y transmisión de conocimientos matemáticos.
Secuenciar y estructurar los puntos centrales de un tema matemático.
Diagnosticar errores y dificultades de aprendizaje.
Capacidad para elaborar instrumentos de seguimiento y evaluación.
Aplicar los nuevos recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza / aprendizaje de las matemáticas en secundaria.
Adquirir autonomía en la utilización de material bibliográfico

Rango profesional

Este perfil de la licenciatura de matemáticas capacita profesionalmente para la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

Perfil académico

Objetivos

Completar la formación matemática general de los licenciados.
Afianzar las destrezas adquiridas en los tres primeros cursos.
Formar licenciados con vocación de incorporarse a un postgrado de estudios avanzados en Matemáticas.

Contenidos mínimos

En este perfil el licenciado debe de cursar al menos 4 de las siguientes materias:

- Análisis Funcional
- Geometría Diferencial
- Ecuaciones en Derivadas Parciales
- Estructuras Algebraicas
- Topología
- Teoría de la medida y probabilidad
- Estadística matemática
- Análisis numérico

Destrezas

- Manipular objetos matemáticos con alto nivel de abstracción y complejidad.
- Profundizar en la capacidad de idear demostraciones.
- Escribir Matemáticas con un nivel de rigor aceptable.
- Adquirir autonomía en la utilización de material bibliográfico

Rango profesional

La obtención del título de Licenciado en Matemáticas con perfil “académico” debe dar acceso directo a cualquier postgrado de estudios avanzados en Matemáticas en cualquier universidad.

Anexo 6

Ejemplos de posibles postgrados (másters)

1. **Máster en “Matemáticas de la Ingeniería”**
2. **Máster en “Matemáticas de las T.I.C”**
3. **Máster en “Matemáticas de la Industria”**
4. **Máster en “Matemáticas de la Economía y la Empresa”**
5. **Máster en “Matemáticas de las Finanzas”**
6. **Máster en “Estadística Aplicada”**
7. **Máster en “Estudios Avanzados de Matemáticas”**

1. MÁSTER EN “MATEMÁTICAS DE LA INGENIERÍA”

Perfil

Se trata de ofrecer una formación especializada en modelización matemática y simulación numérica en ordenador para matemáticos/ingenieros destinados a trabajar en empresas de alta tecnología y equipos interdisciplinares de I+D de las universidades, centros de investigación o industrias de ingeniería civil, químico-farmacéuticas, medioambientales, salud, ... como expertos en los modelos matemáticos y herramientas informáticas que se utilizan en estos sectores.

Objetivos

- Estudio riguroso de los modelos más importantes de la mecánica de medios continuos desde su motivación física y su correcta formulación matemática hasta la resolución numérica con vistas a la simulación en ordenador de dispositivos y procesos de la ingeniería.
- Profundizar en los conocimientos en ecuaciones en derivadas parciales, métodos numéricos e informática que permitan el planteamiento y la búsqueda de soluciones en problemas de contexto industrial.
- Adquirir una formación especializada en cálculo científico y simulación numérica en física e ingeniería que permita la inserción en los equipos de I+D de los sectores industriales mencionados.

Destrezas:

- Conocer a fondo la motivación física y el planteamiento matemático de los modelos más importantes de la mecánica de medios continuos: elasticidad, fluidos, transferencia de calor, electromagnetismo, reacciones químicas.
- Ser capaz de plantear matemáticamente problemas industriales o semi-industriales de cierta complejidad en los campos anteriores, identificar o idear métodos de aproximación y resolución numérica en ordenador.
- Conocer las herramientas informáticas, de programación y de diseño y análisis asistido por ordenador (CAD/CAE) para implantar en ordenador dichos métodos, visualizar gráficamente e interpretar los resultados, validar los modelos y los métodos, obtener conclusiones sobre el modelo y el posible control del proceso que ayude en la toma de decisiones.

Contenidos fundamentales:

- Modelización matemática de problemas industriales o semi-industriales en ingeniería (sólidos, fluidos, térmica, electromagnetismo, reacciones químicas)
- Integración numérica de ecuaciones en derivadas parciales (diferencias finitas, elementos finitos).
- Métodos numéricos avanzados (métodos numéricos en optimización, grandes sistemas lineales con matriz dispersa)
- Ingeniería del software de cálculo científico
- Paquetes comerciales de simulación en ingeniería.
- Proyecto fin de Máster: simulación numérica de un dispositivo o proceso característico en los sectores industriales mencionados.
- ....

Contenidos optativos:

- Bases de datos y redes de comunicación
- Cálculo vectorial y paralelo
- Criptografía y seguridad computacional
- Procesamiento de imágenes
- Sistemas expertos
- Gráficos por ordenador
- Teoria de la señal
- Control óptimo
- ......

2. MÁSTER EN "MATEMÁTICAS DE LAS T.I.C."

Perfil

Se trata de ofrecer una formación especializada en matemáticas e informática para matemáticos/ingenieros/informáticos destinados a trabajar en empresas de alta tecnología y equipos interdisciplinares de I+D en las universidades, centros de investigación o industrias de las tecnologías de la información y comunicación (informática, telecomunicación, electrónica, bases de datos, industrias del *software*, programación, redes transmisión de la señal, ...) como expertos en los métodos matemáticos y herramientas informáticas que se utilizan en estos sectores.

Objetivos

- Estudio avanzado de los modelos y métodos matemáticos propios de las ingenierías y sectores relacionados con las T.I.C.
- Profundizar en los conocimientos de matemáticas (matemática discreta, métodos computacionales del álgebra y la geometría, análisis de Fourier, cálculo numérico, investigación operativa) y programación avanzada que permitan el planteamiento y la búsqueda de soluciones en problemas de contexto industrial en las T.I.C.
- Adquirir una formación práctica especializada que permita la inserción en los equipos de I+D de los sectores industriales y empresariales mencionados .

Destrezas:

- Ser capaz de plantear matemáticamente problemas industriales o semi-industriales de cierta complejidad en el campo de las T.I.C., identificar o idear métodos matemáticos teórico-computacionales para su resolución.
- Conocer las herramientas informáticas, de programación y de diseño y análisis asistido por ordenador (CAD/CAE) para desarrollar dichos métodos, interpretar los resultados, validar los modelos y obtener conclusiones, en situaciones de restricción de tiempo y recursos.

Contenidos fundamentales

- Modelización matemática de sistemas y problemas industriales o semi-industriales en las T.I.C. (redes, teoría de la señal, teoría de colas, cadenas de Markov, redes de Petri, ...).
- Matemática discreta.
- Métodos numéricos avanzados (métodos numéricos en optimización, grandes sistemas lineales con matriz dispersa, ...).
- Programación avanzada (programación orientada a objetos, programación distribuida, ...).
- Bases de datos y redes de comunicación (bases de datos relacionales, introducción a las redes locales y recursos compartidos: www, e-mail, FTP, ...).
- Proyecto: Planteamiento/resolución de un problema o simulación de un proceso característicos de los sectores industriales de las T.I.C.

Contenidos optativos

- Sistemas operativos.
- Métodos computacionales del álgebra y la geometría.
- Teoría y métodos numéricos en ecuaciones diferenciales.
- Cálculo vectorial y paralelo.
- Criptografía y seguridad computacional.
- Tratamiento y procesado de imágenes.
- Sistemas expertos.
- Gráficos por ordenador.
- Inteligencia artificial.
- Grafos y complejidad.
- Transmisión de la información
- Introducción a la economía.
- Visión por ordenador.
- ....

3. MÁSTER EN “MATEMÁTICAS DE LA INDUSTRIA”

Perfil.

Se trata de ofrecer una formación suplementaria en Informática y Matemática Industrial que potencie la inserción de los matemáticos en empresas de alta tecnologia, equipos R+D, consultorias, etc. como expertos en los modelos matemáticos y las herramientas informáticas que se usan en estos sectores industriales y empresariales próximos a las ingenierias.

Prerequisitos

- Ecuaciones en Derivadas Parciales.
- Investigación Operativa.
- Modelización Matemática.
- Análisis de Fourier.

Materias Obligatorias:

- Programación Avanzada (Programación orientada a objetos: Java, C++,...)
- Integración Numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales.
- Bases de datos y redes de comunicación (Bases de datos relacionales, introducción a las redes locales y compartición de recursos: www, e-mail, FTP, news, ...)
- Planificación de la Producción (Introducción a los problemas de planificación y utilización de técnicas experimentales basadas en la simulación digital).
- Introducción a la Economía.
- Proyecto fin de máster

Materias Optativas

- Criptografia y Seguridad Computacional.
- Procesamiento de imágenes (Tratamiento y análisis de imágenes digitales por ordenador. Eliminación del ruido, distorsiones geométricas, etc.)
- Visión por Computador.
- Inteligencia Artificial.
- Grafos y Complejidad (Aplicación de los grafos a problemas de optimización)
- Tratamiento y transmisión de señales (Representación y tratamiento de señales discretas y estudios de filtros).
- Economía y organización industrial.
- Sistemas expertos.
- Gráficos por ordenador (Representación y visualización de gráficos 2D y 3D).
- ….

4. MÁSTER EN
“MATEMÁTICAS DE LA ECONOMÍA Y LA EMPRESA”

Perfil.

Se trata de ofrecer una formación suplementaria en Economía y Empresa que potencie la inserción de los matemáticos en empresas y instituciones como expertos en técnicas y métodos de previsión, organización empresarial y finanzas.

Prerequisitos:

- Modelos lineales.
- Series temporales.
- Investigación operativa.
- Análisis multivariante.

Materias obligatorias :

- Programación avanzada (programación orientada a objetos, programacón distribuida, ...).
- Microeconomía.
- Macroeconomía.
- Econometria.
- Teoria de juegos (teoria de la elección individual, juegos cooperativos y no cooperativos, equilibrio de Nash).
- Teoría y métodos numéricos en ecuaciones diferenciales
- Proyecto fin de máster.

Materias optativas:

- Microeconomía avanzada.
- Macroeconomía avanzada.
- Marketing e investigación comercial (aplicación de las técnicas de análisis multivariante a la investigación de mercados).
- Análisis de mercados financieros y gestión de carteras (estudio de los mercados financieros de títulos primitivos y títulos derivados, estrategias financieras).
- Valoración de productos finacieros derivados
- Organización industrial.
- Control de calidad.

5. MÁSTER EN "MATEMÁTICAS DE LAS FINANZAS"

Perfil.

El objetivo del máster es formar especialistas en matemáticas financieras, básicamente en el ámbito de los productos derivados (valoración de productos derivados, y su cobertura) y de gestión del riesgo (evaluación y control de riesgos), con los conocimientos necesarios de procesos estocásticos, ecuaciones en derivadas parciales, métodos numéricos y simulación, para gestionar los productos financieros existentes y desarrollar otros nuevos según las necesidades del mercado. Dichos especialistas podrían incorporarse en los servicios de valoración de opciones o de gestión del riesgo de las entidades bancarias.

Prerequisitos

- Modelos Lineales.
- Series Temporales.
- Investigación Operativa.
- Ecuaciones en derivadas parciales.
- Métodos numéricos

Materias Obligatorias :

- Conceptos básicos de Finanzas
- Macroeconomía.
- Econometría.
- Series temporales avanzadas
- Medida y control de riesgos
- Modelos estocásticos en Finanzas (valoración de opciones, fórmula de Black-Scholes).
- Ecuaciones en derivadas parciales en Finanzas
- Métodos numéricos y simulación
- Proyecto fin de máster

Materias Optativas:

- Valoración de carteras.
- Técnicas actuariales
- Microeconomía
- Análisis multivariante
- ….

6. MÁSTER EN "ESTADÍSTICA APLICADA"

Perfil

Se trata de ofrecer una formación especializada en el dominio y correcta utilización de los métodos estadísticos, para poder interpretar, valorar y extraer toda la información a los datos procedentes de distintos ámbitos. Este máster está especialmente dirigido a matemáticos interesados en trabajar como expertos en estadística en empresas o equipos interdisciplinares de I+D en los sectores medioambiental, sanitario, financiero, etc.

Objetivos

- Introducir a los alumnos en métodos estadísticos con un enfoque eminentemente aplicado y multidisciplinar.
- Estudio riguroso de la metodología estadística, capacitando a los alumnos para diseñar y analizar modelos teóricos apropiados.
- Conseguir que los alumnos alcancen una madurez superior en los métodos más recientes de Estadística e Investigación Operativa, haciendo posible la futura investigación en dichos campos.
- Adquirir una formación especializada en software estadístico.

Destrezas

- Ser capaz de plantear y analizar modelos estadísticos apropiados en distintos campos científicos.
- Conocer con soltura software estadístico, así como las herramientas informáticas y de programación para implantar en ordenador dichos modelos, visualizar gráficamente e interpretar los resultados.

Contenidos fundamentales

- Modelización estocástica
- Modelos de regresión
- Series de tiempo
- Simulación y métodos de computación
- Técnicas de muestreo
- Estimación no paramétrica de curvas
- Técnicas de estadística espacial
- Modelos de la investigación operativa
- Modelos de análisis multivariante
- Modelos de tipo biosanitario
- Control estadístico de la calidad
- Proyecto fin de máster.

7. MÁSTER DE "ESTUDIOS AVANZADOS EN MATEMÁTICAS"

CONSIDERACIONES PREVIAS

La función del postgrado en estudios avanzados en Matemáticas debe ser proporcionar al alumno los contenidos y herramientas necesarios para que esté en condiciones de elaborar una tesis doctoral en Matemáticas, y dedicarse profesionalmente a la investigación y la docencia universitaria.

Esta función debería cumplirse teniendo en cuenta que las Universidades determinarán autónomamente una parte importante de los contenidos de las Licenciaturas en Matemáticas, y que el acceso al Doctorado en Matemáticas va a estar abierto tanto a personas que hayan obtenido la licenciatura en Matemáticas en otros países, como a licenciados en otras disciplinas. Entendemos que existen una serie de materias que quienes vayan a dedicarse a la investigación en Matemáticas deberían conocer con mayor o menor detalle. Entre ellas, podríamos incluir

1. **Análisis Funcional** (espacios de Hilbert, sistemas ortonormales, bases hilbertianas, espacios de Banach, teoremas fundamentales, dualidad, ...)
2. **Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales** (EDPs de primer orden, ecuaciones elementales de segundo orden, separación de variables, principio del máximo, modelos y aplicaciones)
3. **Introducción a las estructuras algebraicas** (números algebraicos, complementos de teoría de grupos, anillos, ideales y cuerpos, extensiones finitas)
4. **Variedades diferenciales** (Teoría local de curvas planas y alabeadas. Introducción a la teoría de superficies. Primera forma fundamental. Geometría intrínseca y extrínseca de superficies. Teorema fundamental de superficies).
5. **Introducción a la teoría de funciones de variable compleja** (funciones holomorfas, teorema de Cauchy-Riemann, representación conforme, teorema de Cauchy, representación integral de Cauchy, teorema de los residuos)
6. **Introducción a la Optimización** (geometría de los conjuntos poliédricos, programación lineal, convexidad, condiciones de optimalidad en programación no lineal, métodos numéricos en optimización, aplicaciones)
7. **Análisis Numérico de las Ecuaciones Diferenciales** (Métodos elementales de resolución de problemas de Cauchy, método de diferencias finitas para problemas de contorno, implementación, aplicaciones)
8. **Estadística Matemática** (variables aleatorias y modelos, regresión y correlación, distribuciones multidimensionales, convergencias, métodos de estimación puntual paramétrica, regiones de confianza y contraste de hipótesis)

ESTRUCTURA GENERAL Y ACCESO

Para acceder al Máster en Estudios Avanzados se requerirá un título de Licenciado, así como acreditar haber cursado (en grado o postgrado) un cierto número de créditos (a determinar) del total de materias antes mencionadas. Para acceder al Doctorado en Matemáticas se requerirá un título de Máster.

De 90 a 120 créditos ECTS de duración. En él se ofertarían cursos de dos tipos: **Generales** (de carácter introductorio sobre grandes áreas temáticas, por ejemplo, de las anteriormente citadas) y **Específicos** (cursos especializados sobre nuevas áreas de investigación, de tipo instrumental, o cursos encuadrables en programas de Máster de otras materias). Además el alumno deberá realizar un **Proyecto final de máster** consistente en la realización de un trabajo de iniciación a la investigación de un mínimo de 30 créditos ECTS.

Sería recomendable que el alumno visitara (para seguir cursos o bien preparar el trabajo de investigación) durante un semestre otro centro nacional o extranjero, usando los programas de becas basados en acuerdos de movilidad nacionales e internacionales.

Superadas las pruebas pertinentes y defendido el trabajo de investigación, el alumno recibe el título de **Máster de Estudios Avanzados en Matemáticas.**

Informe sobre la investigación matemática en España en el período 1990-1999

Elaborado por iniciativa del
Comité Español para el **Año Mundial** de las **Matemáticas (CEAMM)**

Coordinadores:

Carlos Andradas
y
Enrique Zuazua

PRÓLOGO

La celebración en España del año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas ha supuesto una creciente vertebración y colaboración entre las distintas sociedades matemáticas y ha propiciado que los matemáticos reflexionemos conjuntamente sobre el estado de nuestra ciencia. Con el fin de celebrar adecuadamente el Año Mundial de las Matemáticas, en España se constituyó en 1998 un Comité CEAMM2000 en el que se integraban todas las sociedades matemáticas españolas, además de instituciones tales como el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y el propio Ministerio de Educación y Cultura[1]. Entre las actividades que este Comité acordó figuraba la realización de un informe en el que se presentase una panorámica de la producción matemática española en el ámbito de la investigación.

Tras un año de trabajo nos complace completar la tarea entonces emprendida presentando este informe en el que recogemos los datos más relevantes de la producción científica matemática española en la década de los 90.

La primera constatación es que la investigación matemática española ha experimentado un crecimiento extraordinario en los últimos años tanto en intensidad como en calidad e impacto. Se trata de un cambio espectacular, paralelo al desarrollo general del país, que en Matemáticas ha sido especialmente significativo. España ha pasado de tener pocos matemáticos activos en investigación, a tener una amplia base de investigadores matemáticos, razonablemente financiados, con especialistas en casi todas las áreas de las Matemáticas, incluyendo las más punteras.

Este estudio pretende aportar datos precisos y objetivos que justifiquen las afirmaciones anteriores. Para su realización nos hemos encontrado con diversas dificultades que nos han obligado a hacer opciones, muchas de ellas discutibles, pero necesarias para lograr sacar adelante el informe.

La primera de ellas era delimitar lo que entendemos por producción matemática. Como se trataba de huir en lo posible de concepciones subjetivas, hemos tomado como definición de artículo de matemáticas todo aquel que aparece en la base de datos "MathSciNet" de la AMS (American Mathematical Society). A partir de ella hemos seleccionado la producción española quedándonos con todos los documentos en los que alguno de los firmantes incluía España o alguna institución española en el campo "Institución" de dicha base de datos. Vayan por delante nuestras disculpas a aquellos que han realizado o realizan su actividad investigadora en centros extranjeros. De este modo hemos creado lo que podríamos llamar el espacio muestral del estudio, que contiene un total de 11.813 documentos repartidos a lo largo de toda la década y que han pasado de suponer el 1,7% de la producción matemática mundial en el año 1990 al 3,2% en el 1999. En la memoria se recogen también algunos datos de la distribución de estos trabajos por códigos de la MSC (Mathematics Subject Classification) y el peso relativo de dicho código a nivel mundial que pueden resultar de interés.

[1] Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas, CEAMM2000. http://dulcinea.uc3m.es/ceamm

Para el estudio de calidad, hemos cruzado y filtrado esta base de datos siguiendo el listado de revistas de la clasificación del ISI[2] por índices de impacto, es decir hemos refinado la base anterior quedándonos únicamente con los documentos que aparecen publicados en alguna de las revistas que aparecen en el ISI. Somos conscientes que esto no siempre es un criterio fiable del impacto ni la calidad de un artículo y que excelentes trabajos se publican en ocasiones en revistas que no aparecen en estos listados, pero se trata de un parámetro objetivo de evaluación de calidad cada vez más usado, y en la medida que la producción global es muy significativa, hemos considerado que cumplía el objetivo de indicador de calidad. Finalmente, a la vista del elevado número de artículos que aparecían en áreas fronterizas, especialmente Física, y que distorsionaban extraordinariamente los datos, hemos procedido a un filtrado manual, llevado a cabo por expertos, de los documentos que aparecían en dichas áreas, hasta donde nos ha sido posible. Como resultado de este proceso hemos obtenido una segunda base de datos que podríamos denominar de "documentos de calidad" que consta de 6.220 artículos y que supone el 52,65% de la cuantitativa y que ha sido la base usada para todo el estudio restante del informe. Comparándola con la producción total recogida por el ISI la contribución española ha experimentado una evolución desde un 1,7% en 1990 hasta un 3,9% en el 1999. Esta evolución ha seguido en aumento y según los datos del ISI de este año se encuentra ahora mismo en el 4,18%.

Con el fin de acercar más los datos a la realidad española hemos intentado catalogar los epígrafes de la clasificación AMS en las distintas áreas de conocimiento de la LRU, lo cual no siempre ha sido fácil a causa de las numerosas áreas fronterizas. Esta catalogación ha sido realizada (con las pertinentes consultas) por nosotros, por lo que debe achacársenos la responsabilidad de los errores cometidos y sobre todo tomarse con las reservas de que está basada en nuestros criterios personales. Ocurre también que investigadores que realizan su actividad investigadora en unos campos de la clasificación AMS pueden en realidad estar adscritos a otras áreas de conocimiento, cuestión a tener presente al interpretar las tablas comparativas de producción y personal adscrito a áreas de conocimiento.

Tal y como se constata a través de este informe, la producción matemática española figura en el grupo de los diez países más importantes a nivel mundial. Pero queda pendiente la tarea de conseguir que este hecho sea reconocido adecuadamente en los distintos foros internacionales, si bien en este aspecto la progresión es también claramente positiva. Recientemente hemos conocido que Madrid ha sido propuesta por el Comité Ejecutivo de la UMI como sede para el Congreso Internacional de Matemáticos del año 2006, nominación que deberá aprobarse en la Asamblea General de la UMI en Pekín en Agosto del 2002. Esta propuesta está relacionada, sin duda, con el creciente reconocimiento al que aludimos. Confiamos en que este evento, en el caso de que la candidatura sea finalmente aprobada, supondrá un estímulo adicional a la investigación matemática. Hay otros muchos síntomas de la salud de nuestro tejido investigador. En efecto, aunque de manera aún insuficiente, es cada vez más frecuente encontrar nombres de investigadores españoles como conferenciantes invitados y miembros de Comités Científicos en Congresos y encuentros del máximo nivel, así como en los Comités Editoriales de prestigiosas publicaciones internacionales. A este respecto conviene también señalar que en la actualidad algunas de las revistas españolas

[2] ISI: Institute for Scientific Information. Realiza estudios bibliométricos de la producción científica mundial en todos los campos. Confecciona una lista de revistas con mayor impacto, el SCI: Science Citation Index. Constituye la referencia más objetiva y más usada en ciencia y tecnología en todo el mundo. Página web: http://www.isinet.com/

figuran ya en los listados del ISI (Revista Matemática Iberoamericana, Test) y en posiciones encomiables.

A pesar de todo ello, tal y como ha quedado de manifiesto en numerosos foros y encuentros celebrados en torno al AMM 2000, algunas sombras acechan también a nuestra investigación matemática. En primer lugar las carencias de nuestro sistema educativo tanto a nivel primario como secundario que muchas veces hacen difícil la transmisión del entusiasmo y los conocimientos matemáticos incluso a los alumnos más interesados en ellos. En segundo lugar, somos conscientes de las dificultades que atraviesan las Licenciaturas de Matemáticas, con un decrecimiento del número de alumnos a pesar de la relevancia cada vez mayor del conocimiento matemático en el mundo tecnológico y las buenas perspectivas laborales de que gozan los licenciados en matemáticas. En tercer lugar, la incapacidad de nuestro sistema universitario para acoger a los jóvenes investigadores de los últimos años ha contribuido a un "envejecimiento" de la masa crítica de investigadores que pone en peligro el mantenimiento de la tendencia creciente que este informe muestra y ya hemos comentado anteriormente. Por último, es bien conocido que las estructuras, condiciones y medios que el investigador español encuentra en sus Centros no son siempre las adecuadas para realizar una actividad investigadora intensa y de calidad. Ni que decir tiene, los más jóvenes encuentran dificultades muchas veces insalvables para desarrollar una carrera investigadora en condiciones razonables en un entorno donde el trabajo realizado sea adecuadamente evaluado, valorado y estimulado. Estos temas forman parte de la preocupación de todos los investigadores e incluso están siendo objeto de iniciativas legislativas. Confiemos que, entre todos, consigamos no sólo mantener este nivel de investigación sino mejorarlo dotándonos de las herramientas y estructuras necesarias para ello, de modo que, dentro de diez años, la nueva realidad sea aún más alentadora.

La realización del informe no ha sido fácil y hubiese resultado del todo imposible sin la gran labor realizada por Gema Villacián cuya contratación ha sido posible a través de la Acción Especial APC 1999-0265 "Informe sobre la investigación matemática española en la década de los 90" de la Secretaría de Estado de Educación, Universidades, Investigación y Desarrollo. La colaboración de los firmantes de esta Acción en nombre del CEAMM: Manuel de León, José Luis Fernández y Juan Luis Vázquez, ha resultado decisiva para el diseño final del estudio y para que éste saliera adelante de algunos momentos de estancamiento. Finalmente, debemos agradecer también al CINDOC, al CSIC y a la UCM por facilitar el uso de sus instalaciones y de las bases de datos de MathSciNet y el ISI.

Como decíamos antes, este trabajo no podría haber sido realizado sin la inestimable ayuda de Gema a la que queremos agradecer aquí su extraordinaria labor y dedicación. Por supuesto, la responsabilidad última de las lagunas que este informe pueda presentar sólo es atribuible a nosotros.

Madrid, Mayo del 2001

Carlos Andradas y Enrique Zuazua, Universidad Complutense de Madrid

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La idea inicial de realizar este trabajo surgió con la iniciativa de solicitar el paso de España como miembro de la Unión Matemática Internacional del nivel 3 al 4, para cuya aceptación es preciso "justificar" que la relevancia de nuestra producción matemática está acorde a lo solicitado. Así nació la idea de hacer un estudio de la evolución del número de publicaciones en el pasado reciente. Hay un convencimiento generalizado entre los matemáticos de que la producción matemática española ha mejorado ostensiblemente en los últimos años, pero era preciso contrastar esta creencia con datos concretos. Más aún, tan importante como constatar el crecimiento es analizar si se trata de un crecimiento sostenido a lo largo del tiempo, si se da por igual en todas las áreas matemáticas, detectar las desviaciones que pudieran surgir, examinar la calidad de nuestra producción, los patrones de colaboración, etc.

Pronto nos dimos cuenta de que hacer un estudio que no quedara en un mero análisis cuantitativo de las publicaciones, sino que además hiciera un análisis de la calidad de las mismas y que pudiera ser útil a la hora de dibujar un mapa de la situación de la investigación matemática por Comunidades Autónomas, Universidades, Áreas de Conocimiento, etc., requería una dedicación y una infraestructura específica. Afortunadamente el paraguas del Año Mundial de las Matemáticas hizo posible la petición de una Acción Especial al Ministerio para la realización del informe, cuyo resultado son las páginas que tienen ahora entre sus manos.

El planteamiento general es la siguiente: entresacar de la base de datos MathSciNet de la AMS todos las entradas de la década 90-99 correspondientes a investigadores españoles, para formar una base de datos de la producción matemática española en dicha década. A partir de esta base se construye una subbase con los documentos de aquella que aparecen en la base de datos del ISI (Institut for Science Information) y que constituirá la base de datos para los distintos análisis de calidad, siempre con los parámetros, sin duda discutibles pero cada vez más generalizados, del índice de impacto elaborado por dicho instituto. ¿Por qué el período 1990-1999? En primer lugar porque se trataba de hacer un estudio suficientemente reciente para que revelara información de la situación española actual, es decir tras varios años de incorporación a los foros internacionales de investigación. Al mismo tiempo, el retraso en la publicación de los artículos y su posterior inclusión en la base de datos del MathSci obliga a terminar el estudio en el año 99 para que los datos de este año sean razonablemente fiables. Llamamos la atención sobre el hecho de que si estimamos un período medio de 18 meses desde el envío inicial del trabajo por el autor hasta su publicación en la revista, estamos hablando en realidad de investigación realizada entre 1988 y 1998.

La estructura del presente informe es la siguiente: en el Capítulo 2 se dan las explicaciones técnicas de la metodología seguida: bases de datos utilizadas, estructura de las mismas, campos e indicadores usados, modo de tratamiento de los datos, etc. Se incluye también la clasificación MSC (Mathematics Subject Classification) y su adaptación a nuestras áreas de conocimiento. En el Capítulo 3 se muestran los resultados de la base de datos general de producción matemática española, esto es, los datos del MathSciNet, tanto globales como desglosados por códigos de la MSC y la comparación porcentual del peso de cada una de ellas en la producción total. Creemos que este dato proporciona una primera panorámica global de la distribución de nuestra producción matemática y de las áreas en las que existe tanto una sub como una sobre-representación con respecto a la media mundial. Digamos que, dentro de la base datos del MathSciNet, la producción española ha pasado de ser el 1,7% de la mundial en 1990 al 3,2% en 1999.

En el Capítulo 4 se presenta la base de datos de “calidad”, esto es, la subbase de la anterior consistente en todas los documentos de la misma que han aparecido publicados en revistas incluidas en la relación del ISI para la elaboración del índice de impacto y a las que nos referiremos como revistas ISI. Esta base de datos es la que se usa en el resto del informe. Un primer indicador de calidad es el tamaño relativo de esta subbase con respecto a la inicial: el 62,80%, mientras que a nivel mundial el tamaño de la subbase ISI es sólo del 52,88% de la MathSci. De hecho la aportación española a la base de datos del ISI es del 4,18%, superior por tanto a la aportación a la base total del MathSciNet señalada en el párrafo anterior. Se presentan también datos comparativos de la producción y la situación de las matemáticas en el conjunto de la producción científica nacional y de otros países de nuestro entorno. Es de destacar que las Matemáticas son ahora mismo en España la disciplina científica que ocupa a nivel nacional el tercer lugar en cuanto a su contribución mundial, superada sólamente por Francia, país con una tradición matemática secular.

En el Capítulo 5 se hace un estudio de la producción matemática y su evolución por Comunidades Autónomas, Universidades y Centros de Investigación, Áreas de Conocimiento y códigos de la MSC, relativizando la producción por número de profesores y por cada 10.000 habitantes. A primera vista resulta una ratio de 2 artículos ISI por profesor en toda la década, porcentaje ciertamente superable, teniendo en cuenta además que dentro del colectivo de profesores sólo se han contabilizado los profesores funcionarios, por lo que en la ratio anterior se les atribuye a ellos la producción matemática realizada por los profesores contratados y becarios.

En el Capítulo 6 se presenta un estudio más detallado de la “calidad” de la investigación, mostrando la distribución de la misma por cuartiles dentro de la clasificación de las revistas por índice de impacto. Esta distribución se hace también por Universidades y Áreas de Conocimiento. Asimismo se presentan datos de la revistas matemáticas con mayor volumen de publicaciones españolas con su asignación al cuartil correspondiente. Finalmente en el capítulo 7 se presenta un estudio del patrón de colaboración o coautoría de realización de los trabajos en matemáticas que muestra la generalización progresiva de la tendencia a firmar los trabajos en equipo, posiblemente acentuada por el uso de Internet.

En definitiva, creemos que el Informe contiene gran cantidad de información que puede ser de mucha utilidad a la hora de tener un mapa completo de la distribución de la investigación matemática en España, sus carencias y sus grupos o áreas más fuertes. Por otra parte muestra la buena salud de las Matemáticas dentro del conjunto nacional, lo que debe cargarnos de argumentos a la hora de reivindicar y negociar con nuestras autoridades un mejor tratamiento de las Matemáticas en todos lo niveles educativos. No obstante evidencia también que aun queda mucho camino por recorrer hasta incorporar a todos los profesores universitarios a la actividad investigadora habitual. Finalmente la base de datos elaborada puede ser un instrumento útil para estudios posteriores más pormenorizados.

2. METODOLOGÍA

La primera dificultad a la hora de realizar el estudio consistió en delimitar qué se entiende por artículo de Matemáticas. Se optó por considerar artículos matemáticos todos los que aparecieran en la base de datos MathSci, por lo que se procedió a identificar los documentos firmados por autores de una institución española que hayan sido publicados durante los años 1990-1999. A partir de estos documentos se realizó una segunda selección, obteniendo exclusivamente los documentos que fueron publicados en revistas que durante el periodo 1990-1999 fueron recogidas por las bases de datos SCI o SSCI. Esta segunda selección de documentos se hizo con el objeto de poder trabajar con el indicador bibliométrico "factor de impacto". Una última fase consistió en una depuración manual de la base de datos para eliminar artículos, que aunque cumplen la primera definición, es decir aparecen en la base de datos MathSci, lo hacen en áreas fronterizas (principalmente Física) y quedaban en cuanto a contenido claramente fuera de lo que el colectivo de matemáticos considera matemáticas.

2.1. Fuentes de datos

El estudio se ha realizado utilizando como primera fuente de información la base de datos multidisciplinar MathSci, que recoge recensiones sobre un millón de artículos de revistas de matemáticas y sus aplicaciones y refleja los contenidos de las revistas de referencia "Mathematical Reviews" y "Current Mathematical Publications", publicadas por la AMS. Fundamentalmente comprende matemática clásica (álgebra, geometría, topología, análisis matemático, etc.), estadística, mecánica, informática, teoría cuántica, relatividad, astronomía, astrofísica y geofísica. Los datos proceden de tres discos de la versión en CD-ROM, correspondientes a los periodos 1988-1992, 1993-1997 y 1998-2001 (febrero).

Aunque se han recogido los datos que aparecen en el disco que comprende la producción hasta febrero de 2001, teniendo en cuenta el desfase temporal desde la publicación del artículos hasta su inclusión en la base de datos, es posible que en posteriores discos todavía puedan aparecer artículos correspondientes al período de estudio, especialmente al último año, 1999, lo que podría alterar ligeramente los resultados que aquí presentamos.

A continuación se muestra como ejemplo un registro tipo de la base de MathSci con sus principales campos:

- **Nº Inst:** 1
- **Nº Autores:** 4
- **Título:** On the use of divergence statistics to make inferences about three habitats.
- **Año de publicación:** 1995
- **Revista:** Kybernetes [Kybernetes.-The-International-Journal-of-Systems-and- Cybernetics] 24 (1995), no. 1, 2, 44--54.
- **Tipo de documento:** Journal
- **ISSN:** 0368-492X
- **Autores:** Esteban,-M.-D., (E-MADC)
  Pardo,-J.-A. [Pardo-Llorente,-Julio- Angel], (E-MADC)
  Pardo,-M.-C. [Pardo,-Maria-del-Carmen], (E-MADC)
  Vicente,-M.-L. [Vicente-Hernanz,-Ma.-Lina], (E-MADC)
- **Instituciones:** (E-MADC), Department of Mathematics, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain
- **MSC:** 62B10, 62B, 62

Las bases de datos multidisciplinares Science Citation Index y Social Sciences Citation Index recogen más de 5.000 revistas, mayoritariamente en lengua inglesa. Las revistas recogidas por las bases de datos ISI son las más representativas de la actividad científica internacional. El Science Citation Index recoge 3.500 revistas sobre ciencia y tecnología que cubren más de 150 disciplinas, mientras que el Social Sciences Citation Index recoge 1.700 revistas que cubren más de 50 disciplinas.
Un defecto de las bases de datos ISI es el sesgo lingüístico y geográfico que presentan a favor de las revistas en inglés, por tanto a favor de las publicadas en EEUU y el Reino Unido.

2.2. Estrategia de búsqueda

La producción científica matemática en España se obtuvo seleccionando en la base de datos MathSci todos aquellos documentos en los que apareciese “Spain” en el campo “Institution” y correspondientes a cualquier año comprendido entre 1990 y 1999 en el campo “Publication Year”.

2.3. Tipo de documento

De los cinco tipos de documentos que contempla la base de datos MathSci: “journal”, “journal-translation”, “book”, “book proceedings” y “proceedings-paper”, se han seleccionado exclusivamente los de tipo “journal” que corresponden a los artículos. Esta elección viene motivada además que éste el tipo de documento en la base del ISI.

2.4.Clasificación temática MSC y Áreas de Conocimiento

La clasificación temática utilizada es la proporcionada por la base de datos MathSci en el campo “Primary Classification Codes” correspondiente a la “Mathematics Subject Classification 1991”. A partir del año 2000 existe una actualización de la clasificación MSC que, aunque en principio no debería afectar al presente estudio, ha sido utilizada para clasificar un porcentaje menor del 0.05 % de los documentos. La nueva clasificación no ha supuesto grandes cambios al nivel con el que trabajamos, siendo el más significativo la creación de tres nuevos códigos: los números 37, 74 y 91, que aparecen en cursiva en la siguiente lista.

Para relacionar los artículos con las Áreas de Conocimiento, se ha asignado cada código MSC a una o varias Áreas de Conocimiento. Esta asignación se ha realizado por los encargados del Informe, con las consultas pertinentes en los casos más dudosos. En cualquier caso hemos optado siempre por asignar cada código MSC a todas la Áreas de Conocimiento a las que pudiera pertenecer de modo natural. Esto implica que los documentos de un código MSC son contabilizados en cada una de las Áreas a las que ha sido adscrito, por lo que en las tablas correspondientes a Áreas de Conocimiento se obtienen sumatorios totales superiores al número total real de documentos.

La siguiente tabla muestra la clasificación MSC traducida al castellano, y la asignación a Áreas de Conocimiento. En el Apéndice se incluye la clasificación MSC original (en inglés).

Clasificación MSC por áreas de conocimiento:

00	General	Todas
01	Historia y biografías	Todas
03	Lógica y fundamentos	Álgebra, Cc. de la Computación e IA
04	Teoría de conjuntos	Álgebra
05	Combinatoria	Álgebra, Estadística e IO
06	Retículos, estructuras algebraicas ordenadas	Álgebra
08	Sistemas matemáticos generales	Todas
11	Teoría de números	Álgebra
12	Teoría de cuerpos y polinomios	Álgebra
13	Anillos conmutativos y álgebras	Álgebra
14	Geometría algebraica	Álgebra, Geometría y Topología
15	Álgebra lineal y multilineal, teoría de matrices	Álgebra
16	Anillos y álgebras asociativos	Álgebra
17	Anillos y álgebras no asociativos	Álgebra
18	Teoría de categorías, álgebra homológica	Álgebra
19	K-teoría	Álgebra, Geometría y Topología
20	Teoría de grupos y generalizaciones	Álgebra
22	Grupos topológicos, grupos de Lie	Álgebra, Geometría y Topología
26	Funciones reales	Análisis matemático
28	Medida e integración	Análisis matemático
30	Funciones de una variable compleja	Análisis matemático
31	Teoría de potencial	Análisis matemático, Matemática Aplicada
32	Varias variables complejas y espacios analíticos	Análisis matemático, Geom. y Topología
33	Funciones especiales	Análisis matemático
34	Ecuaciones diferenciales ordinarias	Análisis matemático, Matemática Aplicada
35	Ecuaciones en derivadas parciales	Matemática Aplicada
37	*Sistemas dinámicos y teoría ergódica*	*Mat. Aplicada, Geom. y Topología, Análisis Mat.*
39	Ecuaciones de diferencias finitas y funcionales	Análisis matemático, Matemática Aplicada
40	Sucesiones, series, sumabilidad	Análisis matemático, Matemática Aplicada
41	Aproximaciones y expansiones	Matemática Aplicada
42	Análisis de Fourier	Análisis matemático, Matemática Aplicada
43	Análisis armónico abstracto	Análisis matemático
44	Transformaciones integrales, cálculo operacional	Matemática Aplicada
45	Ecuaciones integrales	Análisis Mat., Mat. Aplicada, Geom. y Topología
46	Análisis funcional	Análisis matemático
47	Teoría de operadores	Análisis matemático, Matemática Aplicada
49	Cálculo de variaciones, optimización	Matemática Aplicada, Geometría y Topología
51	Geometría	Álgebra, Geometría y Topología
52	Geometría convexa y discreta	Álgebra, Geometría y Topología, Mat. Aplicada
53	Geometría diferencial	Geometría y Topología
54	Topología general	Geometría y Topología
55	Topología algebraica	Álgebra, Geometría y Topología
57	Variedades y complejos celulares	Geometría y Topología
58	Análisis global, análisis en variedades	Análisis Mat., Mat. Aplicada, Geom. y Topología
60	Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos	Estadística e IO, Análisis Mat., Mat. Aplicada
62	Estadística	Estadística e IO
65	Análisis numérico	Matemática Aplicada
68	Ciencias de la computación	Cc. de la Computación e IA
70	Mecánica de sistemas y partículas	Geometría y Topología, Matemática Aplicada
73	Mecánica de sólidos	Geometría y Topología, Matemática Aplicada
74	*Mecánico de sólidos deformables*	*Geometría y Topología, Matemática Aplicada*
76	Mecánica de fluidos	Matemática Aplicada
78	Óptica, electromagnetismo	Matemática Aplicada
80	Termodinámica clásica, transmisión del calor	Matemática Aplicada
81	Teoría cuántica	Geometría y Topología, Matemática Aplicada
82	Mecánica estadística, estructura de la materia	Geom. y Top., Mat. Aplicada, Estadística e IO
83	Relatividad y teoría gravitatoria	Geometría y Topología, Matemática Aplicada

85	Astrofísica y astronomía	Geometría y Topología, Matemática Aplicada
86	Geofísica	Matemática Aplicada
90	Economía, investigación operativa, programación, juegos	Estadística e IO
91	*Teoría de juegos, economía, ciencias sociales y del comportamiento*	*Estadística e IO*
92	Biología y otras ciencias naturales, ciencias del comportamiento	Matemática Aplicada
93	Teorías del control y sistema	Matemática Aplicada
94	Información y comunicaciones, circuitos	Matemática Aplicada, Cc. de la Comput. e IA

A la hora de contabilizar el personal investigador, se han utilizado las fuentes del Consejo de Universidades, por lo que sólo se tienen en cuenta los datos referentes a profesores numerarios (titulares y catedráticos universidad y de escuelas universitarias) pertenecientes a las áreas de conocimiento referidas a matemáticas: "Análisis Matemático", "Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial", "Geometría y Topología", "Matemática Aplicada" y "Estadística e Investigación Operativa".
Obviamente, ello supone que no se ha contabilizado los profesores no numerarios, a los que presentamos nuestras disculpas, pero nos resultaba extremadamente complicado tener datos fiables sobre los mismos.

2.5. Instituciones

Para determinar las instituciones que han colaborado en la producción de un documento hemos recurrido al campo "Institution" de la base de datos MathSci, campo que incluye el lugar de trabajo de cada uno de los autores firmantes de un documento. Esta información permite estudiar la productividad de las instituciones y la colaboración matemática entre las mismas.

Hay que señalar que esta información no está normalizada, apareciendo unas veces información relativa a departamentos, otras a facultades y otras a universidades. Dadas las diferencias existentes en la organización de las distintas universidades respecto a facultades y departamentos, en los estudios pormenorizados se ha optado por descender únicamente hasta el nivel de desagregación por Universidades.

Para el estudio de la actividad matemática de las instituciones a un nivel general, los centros se agrupan en los siguientes sectores institucionales: Universidad, Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC), centros mixtos CSIC-Universidad y otros centros. Como sólo aparecen dos centros ajenos a la universidad y al CSIC en la base de datos, se ha optado por dejar que aparezcan los datos referentes a cada uno de ellos.

2.6. Autores

El estudio de los autores firmantes de un documento se ha realizado a través del campo "Author" de la base de datos MathSci, donde se incluye el nombre (generalmente en forma de nombre y un apellido) y el lugar de trabajo de cada uno de los autores del documento.

2.7. Adscripción de documentos

En este estudio se ha utilizado el sistema de recuento total, según el cual se asigna cada documento completo a cada uno de los autores y por consiguiente, a cada una de las instituciones firmantes del mismo. Se ha preferido este método frente al recuento fraccionado de documentos, en el que cada documento escrito por varios autores se divide por el número de ellos, o al recuento por primer autor, ya que en Matemáticas es tradicional que el orden de firma sea generalmente el alfabético. El sistema de recuento completo permite cuantificar la participación de las distintas instituciones en los trabajos, ofrece una visión más completa que el recuento por primer autor, y su fiabilidad ha sido repetidamente comprobada. El inconveniente que presenta este método es la multiplicación de documentos en los recuentos, que hace que los sumatorios alcancen valores superiores al total real de documentos.

2.8. Tratamiento de datos

Los datos procedentes de la base de datos MathSci se descargaron en una base de datos relacional. Esta base de datos consta de una serie de ficheros de datos:

- Documentos
- Instituciones
- Autores
- Clasificación MSC
- Revistas SCI

2.9. Indicadores bibliométricos

a) Factor de impacto (FI)

Como indicador de visibilidad o difusión de los resultados de la investigación se ha utilizado el factor de impacto de las revistas de publicación, tal como aparece en los Journal Citation Reports de los años comprendidos en el periodo 1990-1999. El factor de impacto de una revista representa el número medio de citas recibidas por artículo en un periodo de tiempo. Así, el factor de impacto de 1998 de la revista X se calcula dividiendo las citas que, en 1998, las revistas fuente del SCI, SSCI y A&HCI (Arts and Humanities Citation Index) han hecho a los artículos de la revista X de los años 1996 y 1997, dividido por el total de ítems citables publicados por la revista X en esos dos años.

El factor de impacto de una revista se utiliza como una medida indirecta de su calidad, pero en realidad se limita a valorar su impacto o influencia sobre la comunidad científica. Aunque la validez del factor de impacto como indicador de visibilidad es un hecho ampliamente aceptado, hay que tener en cuenta ciertas limitaciones en su uso. Por ejemplo, en su cálculo solamente se recogen las citas recibidas a muy corto plazo, lo que perjudica especialmente a las áreas de evolución más lenta y a las revistas que no cumplen las fechas de publicación previstas. Por otro lado, no es posible comparar factores de impacto correspondientes a diferentes temas, por depender, entre otras causas, del tamaño de la comunidad científica, de sus hábitos de publicación y del carácter básico o aplicado del campo. Esto obliga a manejar por separado el factor de impacto de cada disciplina.

En el presente estudio se emplea el FI de una revista como “factor de impacto esperado” de todos los documentos publicados en la misma, es decir, se considera que todos los artículos de una revista tienen la misma probabilidad de ser citados.

b) Índice de actividad

El índice de actividad es un indicador del grado de actividad en un determinado tema por parte de un centro o área geográfica, señalando si la actividad es mayor o menor que el promedio nacional.
Se calcula como el cociente entre el porcentaje de la producción de un centro o área geográfica dedicada a un determinado tema y el porcentaje que representa el tema en la producción nacional.

c) Posición normalizada

La imposibilidad de comparar factores de impacto correspondientes a revistas de distintas disciplinas ISI hace necesaria otra medida que sí lo permita. La posición normalizada se calcula como el complemento a 1 del cociente que resulta de dividir la posición de la revista dentro de la disciplina ISI por el número total de revistas dentro de esa disciplina. En este estudio, cuando una revista pertenece a varias disciplinas ISI, se ha optado por tener en cuenta únicamente la posición normalizada más elevada.

d) Colaboración

En el estudio de la colaboración puede distinguirse entre varios tipos: cuando en el campo “Institution” figura una dirección extranjera, la colaboración es considerada *internacional* y cuando figuran más de una institución española, se considera documento en *colaboración nacional*. Dentro de ésta se distinguen dos tipos: colaboración *nacional extramuros*, cuando se da entre distintos centros de investigación nacionales, y colaboración *nacional intramuros*, cuando se da entre diferentes departamentos de un mismo centro. Cuando se trata de universidades, la colaboración extramuros se refiere a la colaboración interfacultativa y la colaboración intramuros a la colaboración interdepartamental. Cuando se trata de centros del CSIC la colaboración extramuros se refiere a la colaboración entre los distintos centros del CSIC, pero no tiene sentido hablar de la colaboración intramuros por no estar disponible en la base de datos esta información.
Cuando se da la colaboración nacional y la internacional en un mismo artículo, este se contabiliza en ambos tipos de colaboración.

e) Índice de coautoría

Es un indicador de la colaboración entre autores y se calcula como el número medio de autores que participan en un documento.

3. BASE DE DATOS MATHSCI

Producción matemática en la base de datos MathSci

En la tabla 3.1 se muestran los artículos que contiene la base de datos MathSci, en las últimas décadas. Los datos referente a España y la Unión Europea no pueden obtenerse hasta la década de los 80. Para la consecución de los datos, al igual que para el resto de resultados de esta sección, se ha utilizado la versión en línea de la base de datos MathSci.

Década	España	UE	Mundial
1940-1949			32595
1950-1959			73863
1960-1969			135347
1970-1979			279882
1980-1989	3334	45922	349463
1990-1999	11504	104231	481105
Total	**14839**	**150190**	**1352255**

Tabla 3.1. Producción matemática por décadas en MathSci

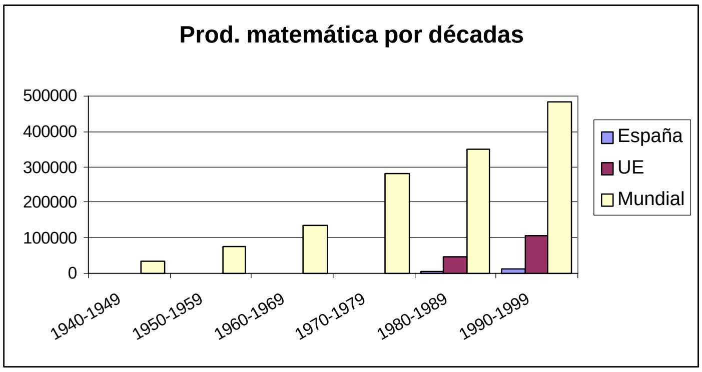


Gráfico 3.1. Producción matemática por décadas en MathSci

Distribución de la producción matemática en el periodo 1990-1999 en la base de datos MathSci

La tabla 3.2 muestra la tipología de la producción matemática correspondiente al período 1990-1999 que aparece en la base de datos MathSci.Tanto en la producción matemática española como en la de la Unión Europea y la mundial, existe un claro predominio del artículo, llamado "journal" en la base de datos, como tipo de documento más utilizado, suponiendo el 78% de la producción española, el 79% de la producción de la UE y el 78% de la producción mundial. Le siguen los proceedings-paper que suponen un 19% de la producción española y de la UE y un 15% de la producción mundial. Las traducciones de artículos y los book-proceedings tienen un peso muy bajo en la producción, al igual que los libros, que suponen un 4% de la producción mundial, un 2% de la producción de la UE y un 1% en la producción española.

La producción matemática española durante la década de los 90 supone el 10,6% de la producción de la Unión Europea y el 2,3% de la producción matemática mundial.

Tipo de documento	España	UE	Mundial	% España respecto UE	% España resp. prod. mundial
Journal	11813	110106	494330	10,7%	2,4%
Proceedings-paper	2862	26978	99341	10,6%	2,9%
Book	118	2532	22701	4,7%	0,5%
Journal-translation	36	365	27032	9,9%	0,1%
Book-proceedings	2	46	9332	4,3%	0,0%
Total	**14831**	**140027**	**652736**	**10,6%**	**2,3%**

Tabla 3.2. Tipología de la producción matemática en 90-99 según MathSci

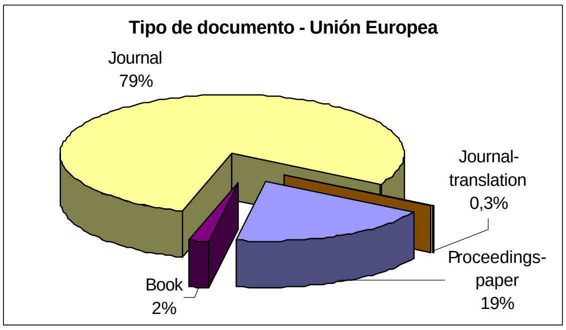


Gráfico 3.2. Tipo de documentos en la UE

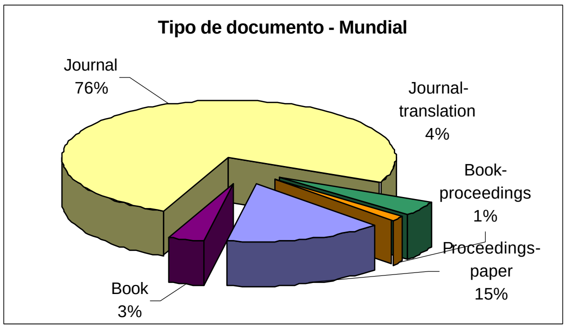


Gráfico 3.3. Tipo de documentos en el mundo

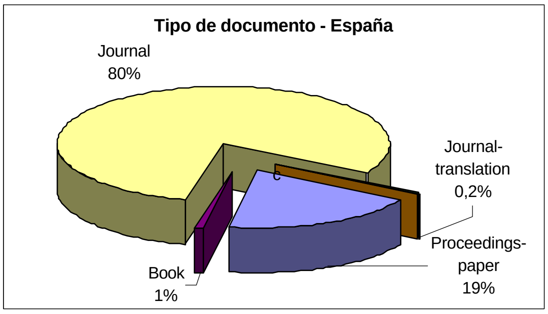


Gráfico 3.4. Tipo de documentos en España

Por ser el artículo el tipo de documento objeto del presente estudio, vamos a comparar su evolución a lo largo de la última década tanto en la base de datos MathSci como, en el próximo capítulo, en la base de datos ISI.

Comparación entre la producción matemática mundial y la española en el periodo 1990-1999 correspondiente a artículos en la base de datos MathSci

En la tabla 3.3 se compara la evolución anual de la producción matemática mundial con la producción española durante el periodo 1990-1999 en la base de datos MathSci. La discrepancia que existe entre los totales que aparecen en esta tabla y en la tabla 3.2 es debida a los artículos que aparecen con una doble fecha de publicación (1992-1993, por ejemplo) en la base de datos MathSci, que aparecen contabilizados doblemente en la tabla 3.3.

Tanto en el mundo como en los ámbitos europeo y español, la década de los 90 se caracteriza por un aumento de la producción matemática recogida en la base de datos MathSci. El incremento real de esta producción matemática desde el año 1990 al año 1999 es de un 27% a nivel mundial, un 58% a nivel europeo y un 133% a nivel español. También en el crecimiento anual se puede observar que la producción española crece a un nivel mayor que la del resto del mundo.

Resultan curiosos los descensos en la producción de los años 1993 y 1998 que se producen tanto a nivel mundial como estatal, y que en parte pueden ser debidos a los altos crecimientos de los años anteriores. No obstante, en nuestro estudio hemos detectado algunas duplicaciones de documentos en la base de datos MathSci, precisamente en los años 1992 y 1997, por lo que el alto crecimiento de estos años puede estar un poco inflado por este fenómeno. Estudiando la serie del porcentaje relativo que la producción española supone respecto a la producción mundial, se observa que ésta ha ido creciendo a lo largo de la década, pasando de ser el 1,7% en el año 1990 al 3,2% en el año 1999. Esto también ocurre si comparamos en el seno de la UE, donde la producción española durante la última década ha pasado de suponer el 8,9% en 1990 a suponer el 13,0% en 1999.

Los datos referidos a los últimos años, sobre todo a los concernientes al año 1999, podrían sufrir alguna pequeña variación por inclusión de información de últimos datos en los próximos discos.

	España		**UE**		**Mundial**		**% relativo**	
Año	**Nº docs**	**Increm**	**Nº docs**	**Increm**	**Nº docs**	**Increm**	**España - Mundo**	**España - UE**
1990	690		7795		40116		**1,7%**	**8,9%**
1991	919	*33,2%*	9954	*27,7%*	47073	*17,3%*	**2,0%**	**9,2%**
1992	1167	*27,0%*	11854	*19,1%*	54078	*14,9%*	**2,2%**	**9,8%**
1993	926	*-20,7%*	8655	*-27,0%*	41576	*-23,1%*	**2,2%**	**10,7%**
1994	901	*-2,7%*	9363	*8,2%*	43620	*4,9%*	**2,1%**	**9,6%**
1995	1097	*21,8%*	10321	*10,2%*	46853	*7,4%*	**2,3%**	**10,6%**
1996	1323	*20,6%*	12585	*21,9%*	56121	*19,8%*	**2,4%**	**10,5%**
1997	1776	*34,2%*	15925	*26,5%*	65653	*17,0%*	**2,7%**	**11,2%**
1998	1428	*-19,6%*	11986	*-24,7%*	50508	*-23,1%*	**2,8%**	**11,9%**
1999	1610	*12,7%*	12344	*3,0%*	50885	*0,7%*	**3,2%**	**13,0%**
Total	**11837**		**110782**		**496483**		**2,4%**	**10,7%**

Nota: Incrementos calculados respecto al año anterior

Tabla 3.3. Comparación de la producción matemática durante 90-99 según MathSci

La siguiente gráfica compara las evoluciones anuales de la producción matemática. Con el fin de homogeneizar los recorridos de valores y poder así compararlas, las gráficas correspondientes a España y la UE se han multiplicado por el cociente entre el total de documentos mundial y el total de documentos respectivos de España y la UE.

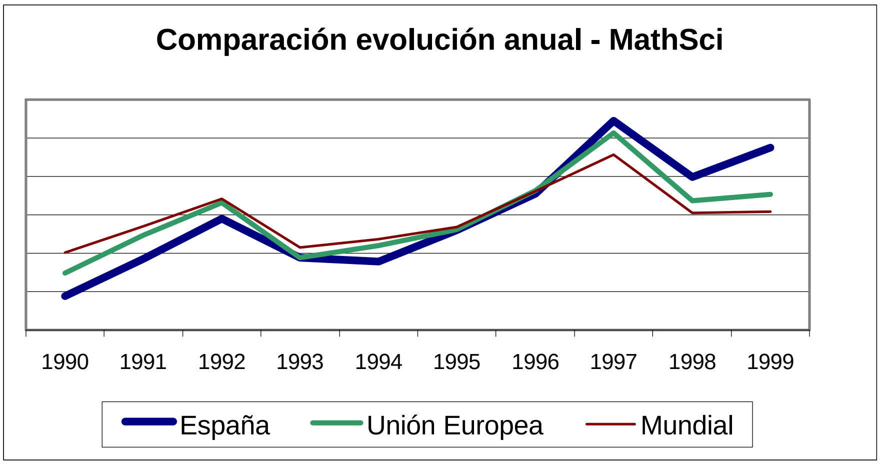


Gráfico 3.5. Evolución del número de documentos en la MathSci

Distribución de la producción de MathSci por clasificación MSC, mostrando el índice de actividad de España

En la tabla 3.4 se presenta la producción española y mundial de la década 1990-1999 clasificada por su código principal MSC, y los porcentajes que el código representa dentro de la producción total. La última columna muestra el índice de actividad de España, calculado como el cociente entre el porcentaje de producción española en el área y el porcentaje mundial en la misma. Un índice de actividad mayor que uno indica una actividad mayor que la media mundial en el área.
Como el lector comprobará trabajamos aquí con el total real de los 11.813 artículos correspondientes a la producción española en la base de datos MathSci durante la década 1990-1999 y los 494.330 artículos correspondientes a la producción mundial, que figuraban en la tabla 3.2. Las pequeñas diferencias con los totales que aparecen en la tabla se deben a que algunos documentos no incluían la información del campo MSC, por lo que no ha podido ser catalogados.
Se observa que los porcentajes de España respecto a la producción total están muy por encima de los mundiales en los códigos:

44: Transformaciones integrales, cálculo operacional
46: Análisis funcional
04: Teoría de conjuntos
53: Geometría diferencial
42: Análisis de Fourier

En todos ellos, el porcentaje que la producción española representa frente a la mundial está muy por encima del porcentaje medio que representa la producción española en la producción mundial de toda la década, que habíamos visto que alcanzaba el 2,4% (tabla 3.3).
Por el contrario, la aportación española resulta mínima en temas como

51: Geometría (general)
11: Teoría de números
05: Combinatoria

Estos datos hay que tomarlos con las cautelas necesarias ya que, por ejemplo, muchas de las publicaciones españolas en Teoría de Números van a parar al área de Geometría Algebraica y, similarmente, las publicaciones de Geometría se suelen encaminar hacia códigos más específicos. Los datos referidos a los nuevos temas de la clasificación MSC no se tienen en cuenta por no resultar representativos.

Código MSC	Publicaciones en el periodo 1990-1999	Porcentaje respecto al total	Publicaciones en España	Porcentaje respecto a la actividad española	Porcentaje respecto al código	Indice de actividad
00	1174	0,2	37	0,3	3,15	**1,32**
01	6915	1,4	129	1,1	1,87	0,78
03	11012	2,2	280	2,4	2,54	**1,06**
04	986	0,2	53	0,4	5,38	**2,24**
05	19418	3,9	128	1,1	0,66	0,28
06	3369	0,7	30	0,3	0,89	0,37
08	982	0,2	9	0,1	0,92	0,38
11	16214	3,3	127	1,1	0,78	0,33
12	1202	0,2	37	0,3	3,08	**1,29**
13	3599	0,7	141	1,2	3,92	**1,64**
14	6732	1,4	228	1,9	3,39	**1,41**
15	4955	1,0	88	0,7	1,78	0,74
16	7490	1,5	237	2,0	3,16	**1,32**
17	4719	1,0	224	1,9	4,75	**1,98**
18	1332	0,3	53	0,4	3,98	**1,66**
19	603	0,1	7	0,1	1,16	0,48
20	11812	2,4	249	2,1	2,11	0,88
22	3060	0,6	29	0,2	0,95	0,40
26	3747	0,8	37	0,3	0,99	0,41
28	3430	0,7	104	0,9	3,03	**1,27**
30	7554	1,5	138	1,2	1,83	0,76
31	1292	0,3	21	0,2	1,63	0,68
32	5600	1,1	135	1,1	2,41	**1,01**
33	3441	0,7	120	1,0	3,49	**1,46**
34	15826	3,2	326	2,8	2,06	0,86
35	25191	5,1	587	5,0	2,33	0,97
37*	*1525*	*0,3*	*82*	*0,7*	*5,38*	*2,25*
39	2797	0,6	63	0,5	2,25	0,94
41	5236	1,1	140	1,2	2,67	**1,12**
42	4926	1,0	249	2,1	5,05	**2,11**
43	1114	0,2	9	0,1	0,81	0,34
44	931	0,2	90	0,8	9,67	**4,04**
45	1693	0,3	23	0,2	1,36	0,57
46	12639	2,6	1082	9,2	8,56	**3,57**
47	11758	2,4	262	2,2	2,23	0,93
49	6382	1,3	88	0,7	1,38	0,58
51	3322	0,7	10	0,1	0,30	0,13
52	3618	0,7	45	0,4	1,24	0,52
53	10330	2,1	529	4,5	5,12	**2,14**
54	8583	1,7	228	1,9	2,66	**1,11**
55	2575	0,5	119	1,0	4,62	**1,93**
57	5427	1,1	96	0,8	1,77	0,74
58	18537	3,8	583	4,9	3,15	**1,31**
60	19036	3,9	273	2,3	1,43	0,60
62	27034	5,5	644	5,5	2,38	0,99
65	23848	4,8	499	4,2	2,09	0,87
68	18825	3,8	259	2,2	1,38	0,57
70	3552	0,7	152	1,3	4,28	**1,79**
73	8401	1,7	133	1,1	1,58	0,66
74*	*1043*	*0,2*	*23*	*0,2*	*2,21*	*0,92*
76	12985	2,6	189	1,6	1,46	0,61
78	2494	0,5	38	0,3	1,52	0,64
80	1312	0,3	18	0,2	1,37	0,57
81	29527	6,0	840	7,1	2,84	**1,19**
82	9999	2,0	160	1,4	1,60	0,67

83	11605	2,4	378	3,2	3,26	**1,36**
85	416	0,1	9	0,1	2,16	0,90
86	1133	0,2	12	0,1	1,06	0,44
90	21311	4,3	499	4,2	2,34	0,98
91*	*1037*	*0,2*	*67*	*0,6*	*6,46*	*2,70*
92	4372	0,9	64	0,5	1,46	0,61
93	17166	3,5	233	2,0	1,36	0,57
94	5065	1,0	69	0,6	1,36	0,57
Total	**493209**		**11811**			

* Proceden de MSC 2000

Tabla 3.4. Distribución de la producción MathSci según la MSC

4. BASE DE DATOS ISI

En este capítulo presentamos los datos de la producción matemática española de la década que aparecen en la base de datos del ISI. Para ello se ha utilizado como fuente de datos el SCISearch, versión en línea de la base de datos SCI.

4.1 Comparación entre la producción matemática mundial y la española en el periodo 1990-1999 correspondiente a artículos en la base de datos ISI

En la tabla 4.1 se compara la evolución anual de la producción matemática mundial con la producción española durante el periodo 1990-1999 en la base de datos ISI. Se han tenido en consideración los documentos que recoge la base de datos ISI durante los años 1990-1999 correspondientes a las disciplinas matemáticas ISI: “mathematical methods, biology & medicine”, “mathematical methods, physical science”, “mathematical methods, social sciences”, “mathematics”, “mathematics and statistics”, “applied mathematics”, “general mathematics”, “miscellaneous mathematics”, “pure mathematics”, “mathematics, statistics & probability”, “mathematical physics”, “mathematical psychology”, “social sciences, mathematical methods” y “statistics & probability”. Se estima que puede faltar por contabilizar un 10% de los documentos correspondientes al último año, debido a la demora respecto a su fecha de publicación con que se recogen los datos.

Un primer análisis de esta tabla reafirma la conclusión obtenida en el capítulo anterior de que la producción matemática española ha crecido durante la última década muy por encima de lo que lo ha hecho la producción matemática mundial. Mientras que la producción mundial ha ido presentando un ligero aumento durante toda la década, la producción española ha ido siempre creciendo a un ritmo mucho más rápido (con excepción de los años 1994 y 1996, en los que, de nuevo, haya que tener en cuenta el efecto del gran aumento que se había dado en años anteriores).

La aportación española en la base de datos ISI ha pasado de representar el 1,7% de la producción mundial en 1990 al 3,9% en 1999, y ha continuado creciendo hasta situarse en el 4,18% según los últimos datos del ISI del 2001.

	España		**Mundial**		**% relativo**
Año	**Nº docs**	**Incremento**	**Nº docs**	**Incremento**	**España - Mundial**
1990	339		20500		1,7%
1991	374	*10,3%*	21386	*4,3%*	1,7%
1992	459	*22,7%*	22081	*3,2%*	2,1%
1993	606	*32,0%*	23651	*7,1%*	2,6%
1994	627	*3,5%*	25126	*6,2%*	2,5%
1995	785	*25,2%*	26917	*7,1%*	2,9%
1996	835	*6,4%*	28133	*4,5%*	3,0%
1997	1010	*21,0%*	30278	*7,6%*	3,3%
1998	1128	*11,7%*	31457	*3,9%*	3,6%
1999	1256	*11,3%*	31883	*1,4%*	3,9%
Total	**7419**		**261412**		**2,8%**

Nota: Incrementos calculados respecto al año anterior

Tabla 4.1. Comparación de la producción matemática durante 90-99 según ISI

La siguiente gráfica compara las evoluciones anuales de la producción matemática. Como antes, al efecto de poder compararlas, la gráfica correspondiente a España se ha multiplicado por el cociente entre el total de documentos mundial y el total de documentos de España.

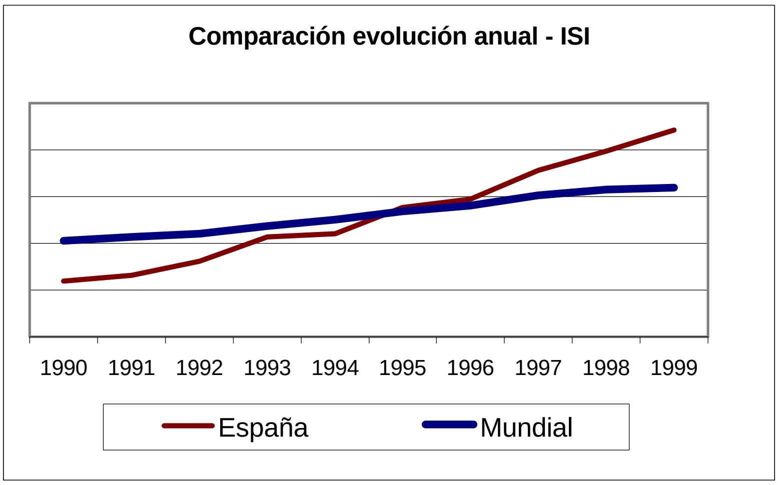


Gráfico 4.1. Evolución del número de documentos en el ISI

4.2. Selección de artículos para el estudio y su distribución en el período 1990-1999

Para hacer estudios más finos de la producción cualitativa española hemos seleccionado de los 11.813 trabajos de la base española MathSci, aquellos publicados en revistas que aparecen en la base de datos ISI. Posteriormente hemos descartado una serie de trabajos que aparecían publicados en epígrafes no propiamente matemáticos dentro de la clasificación usada por el ISI y cuyo contenido fue considerado claramente no matemático por los expertos consultados. Esta filtración ha afectado especialmente a artículos de Física que aparecían en la base de datos MathSci y por consiguiente estaban recogidos entre las 11.813 extraídas de dicha base.

Los documentos finalmente seleccionados y con los que va a realizarse el presente estudio son los 6.220 que se reparten en la década de la siguiente manera:

Año	Nº art.	Incremento
1990	330	
1991	388	17,6%
1992	448	15,5%
1993	520	16,1%
1994	524	0,8%
1995	644	22,9%
1996	672	4,3%
1997	828	23,2%
1998	883	6,6%
1999	983	11,3%
Total	**6220**	

Nota: Incrementos calculados respecto al año anterior

Tabla 4.2. Producción matemática española 90-99

No obstante en la sección 6.5 se ofrecen también algunos datos de la base ISI sin el filtrado posterior, que efectivamente abundan en la idea de la necesidad del mismo.

Hay que tener en cuenta que la base de datos del ISI incluye muy pocas revistas españolas, por lo que trabajamos casi exclusivamente con la producción matemática española publicada en revistas extranjeras. Durante la década 1990-1999, ninguna revista española de Física y tan sólo dos de matemáticas aparecen en el ISI: la *Revista Matemática Iberoamericana* que se incorporó al mismo en 1998, y la revista *Test* en 1999. En el 2000 se ha incorporado *Publicacions Matematiques*, editada en la UAB, y es probable que alguna más se incorpore en el 2001. Todo ello es síntoma también de una mejora en la competitividad de nuestra publicaciones, aunque es sabido que al ser el ISI un organismo privado también hay otros factores (entre ellos la posible rentabilidad) que inciden en la inclusión o no de una revista en dicha base.

4.3. Distribución de la producción matemática en el periodo 1990-1999

El gráfico 4.2 recoge la evolución de la producción española durante la década 1990-1999. La producción matemática ha experimentado un crecimiento continuado y elevado a partir del año 1990. No obstante se observa a partir de 1993, que dicho aumento no es lineal, sino que ofrece un cierto patrón a bienal, siendo muy inferior en los años 94, 96 y 98, y superior en el 95, 97 y 99.

Simplificando, cabe decir que la producción española se ha incrementado en un 300%, mientras que la producción mundial lo ha hecho en menos de la mitad.

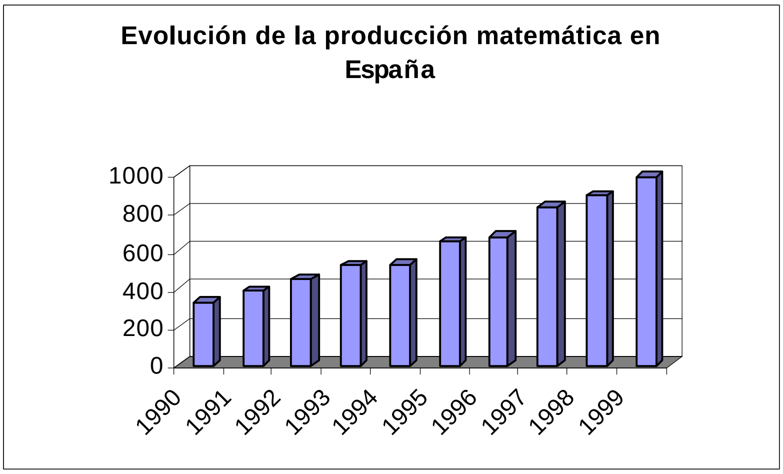


Gráfico 4.2. Evolución de la producción matemática en España

4.4. La investigación matemática en el seno de la investigación nacional

Por último, para tener un panorama de lo que supone la investigación matemática dentro de toda la investigación del país, así como para poder compararla con los países circundantes, hemos recogido en la tabla 4.3, los siguientes tres datos:

a) el porcentaje que la producción matemática española supone respecto a la producción mundial matemática del ISI,
b) el orden en el que el porcentaje anterior sitúa a las matemáticas dentro dentro de los 21 campos científicos que se relacionan a continuación, y
c) el impacto relativo, esto es, la desviación (en tanto por ciento) respecto al número medio de citas por artículo a nivel mundial. Por ejemplo, que España

aparezca con un –16 en esta columna significa que la media de citas que reciben los artículos españoles es un 16% inferior a la media mundial, esto es, que si, digamos, la media de citas de un artículo a nivel mundial es de 10 veces, los artículos españoles son citados un promedio de 8,4 veces.

El tercer lugar de las Matemáticas en España significa que sólo hay dos disciplinas (Astrofísica y Ciencias Agrarias) cuya producción científica nacional tiene un peso en la producción mundial superior al 4,18% que tiene ahora mismo la producción matemática. Los 21 campos considerados por el ISI son: ciencias del espacio, ciencias agrarias, matemáticas, microbiología, química, ciencias de las plantas y animales, ecología y medio ambiente, farmacología, física, biología y bioquímica, inmunología, ciencias materiales, neurociencia, biología molecular, medicina clínica, ciencias geológicas, económicas y empresariales, ingeniería, informática, psicología y psiquiatría y ciencias sociales.

Los datos de España, Japón, Francia y Estados Unidos están referidos al quinquenio 1996-2000, mientras que el resto lo son al 1995-1999 y han sido extraídos de la página web del Institute for Scientific Information de Filadelfia, ISI.

Como se ve, en España, la investigación matemática ocupa el tercer lugar de toda la producción científica nacional (a pesar de que los recursos dedicados a ella no pueden compararse con los dedicados a otras disciplinas), aunque la media de citas por artículo está por debajo de la media mundial. Sólo en Francia la investigación matemática ocupa un lugar más importante dentro de la producción nacional, ya que se encuentra en primer lugar, pero no debemos olvidar la extraordinaria tradición matemática de Francia. Tras España, son Alemania e Italia los países que siguen, quedando los demás países con órdenes muy inferiores. Los países de tamaño menor: Dinamarca, Bélgica y Noruega son los países cuya producción tiene un mayor impacto relativo: el número medio de citas por artículo está muy por encima de la media mundial.

País	**%**	**Orden**	**Impacto relativo**
España	4,18%	3º	-16
Alemania	9,88%	4º	2
Australia	2,78%	12º	15
Bélgica	1,24%	11º	46
Dinamarca	0,79%	15º	52
Estados Unidos	35,43%	15º	29
Francia	12,25%	1º	2
Holanda	1,79%	21º	14
Italia	4,80%	6º	-2
Japón	5,26%	16º	-21
Noruega	0,49%	16º	35
Reino Unido	6,72%	21º	26
Suecia	1,30%	20º	-2
Suiza	1,25%	16º	31

Tabla 4.3. Comparación mundial de la investigación matemática

.

5. ESTUDIO DE LA PRODUCCIÓN MATEMÁTICA

Todos los resultados con los que se presentan a continuación son el resultado de analizar los 6.220 artículos finalmente seleccionados.

5.1. Datos generales por Comunidades Autónomas

Distribución de la producción matemática de España por Comunidades Autónomas

El análisis de la producción matemática española por Comunidades Autónomas que recoge la tabla 5.1 por cifras absolutas pone de manifiesto la gran concentración de la investigación existente en Madrid y Cataluña. Son seguidas por Andalucía y, a cierta distancia, por la Comunidad Valenciana, acaparando entre estas cuatro comunidades autónomas casi el 70% de la producción matemática española.
Evidentemente, esto se debe a la gran concentración de universidades y profesores en estas comunidades, sobre todo Madrid y Cataluña, por lo que el dato de la proporción de artículos por profesor resulta importante. Así Aragón, que ocupa el quinto lugar por número de artículos, pasa a ser la comunidad autónoma con un mayor ratio de artículos por profesor seguida por Cantabria, mientras que las cuatro comunidades con mayor producción pasan a ocupar puestos más bajos, siendo Cataluña la comunidad que mejor mantiene su posición, pasando de ser la segunda con mayor producción a ser la tercera en cuanto a número de artículos por profesor.

La UNED se mantiene separada por no ser posible adscribir su producción a ninguna comunidad autónoma.

No hay que olvidar al utilizar estos datos, que sólo se ha tenido en cuenta el profesorado numerario, obtenido de la base de datos del año 2000 del Consejo de Universidades. Así, las Comunidades con mayor índice de "funcionarización" pueden verse perjudicadas en cuanto a la ratio, frente a las que mantienen un mayor número de profesores asociados y ayudantes que realicen investigación. Hay que recordar también, sobre todo a la hora de analizar los datos de Comunidades cuyas Universidades son de reciente creación, que las publicaciones pueden llevar un retraso bastante grande hasta su aparición final, y que la atribución del trabajo a una Comunidad Autónoma se hace por la dirección consignada en el artículo, que en la mayoría de los casos es la del momento del envío y no de su aparición.

Otro factor a considerar es la heterogeneidad de las CCAA en cuanto al número de universidades que comprenden. Madrid, Cataluña y Andalucía agrupan un gran número de universidades con comportamientos muy hetereogéneos, por lo que unas Universidades pueden "penalizar" a otras al promediarse los datos globales de la CCAA, mientras que, por ejemplo, Cantabria o La Rioja tienen una única universidad y por lo tanto los datos de la CCAA coinciden con los de ésta. La tabla 5.2 muestra las universidades por Comunidad Autónoma presentes en el estudio.

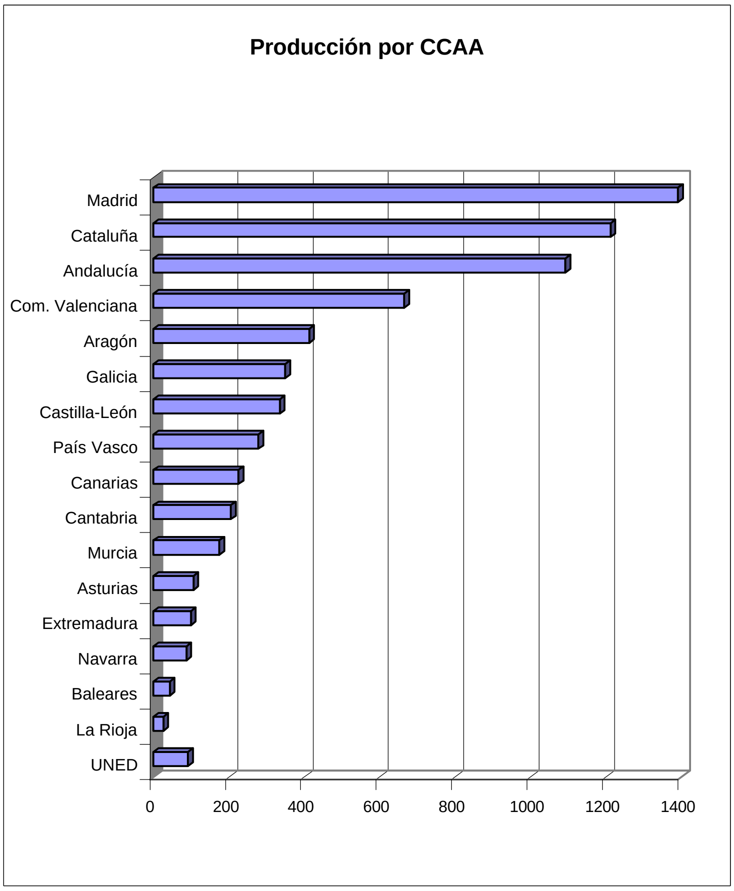


Gráfico 5.1. Producción por Comunidades Autónomas

CCAA	Nº art.	%	Nº art./profesor
Aragón	413	6,6%	3,82
Cantabria	205	3,3%	3,66
Cataluña	1212	19,5%	3,16
Extremadura	99	1,6%	2,75
Murcia	174	2,8%	2,49
Navarra	87	1,4%	2,42
Madrid	1391	22,4%	2,39
Valencia	665	10,7%	2,25
País Vasco	278	4,5%	2,09
Andalucía	1092	17,6%	1,92
Castilla-León	335	5,4%	1,84
Canarias	225	3,6%	1,73
Galicia	349	5,6%	1,65
La Rioja	26	0,4%	1,18
Asturias	106	1,7%	1,05
Baleares	43	0,7%	1,05
Total real	**6220**		**2,22**

Tabla 5.1. Producción matemática por comunidades autónomas

Tabla 5.2. Universidades por CCAA:

- Andalucía
  - Universidad de Almería
  - Universidad de Cádiz
  - Universidad de Córdoba
  - Universidad de Granada
  - Universidad de Jaén
  - Universidad de Málaga
  - Universidad de Sevilla
- Aragón
  - Universidad de Zaragoza
- Asturias
  - Universidad de Oviedo
- Baleares
  - Universidad de las Islas Baleares
- Canarias
  - Universidad de La Laguna
  - Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
- Cantabria
  - Universidad de Cantabria
- Castilla-León
  - Universidad de Burgos
  - Universidad de Salamanca
  - Universidad de Valladolid
- Castilla la Mancha
  - Universidad de Castilla la Mancha
- Cataluña
  - Universidad Autónoma de Barcelona
  - Universidad de Barcelona
  - Universidad de Lleida
  - Universidad Jaume I
  - Universidad Politécnica de Cataluña
  - Universidad Pompeu Fabra
- Comunidad Valenciana
  - Universidad de Alicante
  - Universidad de Valencia
  - Universidad Politécnica de Valencia
- Extremadura
  - Universidad de Extremadura
- Galicia
  - Universidad de La Coruña
  - Universidad de Santiago de Compostela
  - Universidad de Vigo
- La Rioja
  - Universidad de La Rioja
- Madrid
  - Universidad Autónoma de Madrid
  - Universidad Carlos III de Madrid
  - Universidad Complutense de Madrid
  - Universidad de Alcalá de Henares
  - Universidad Politécnica de Madrid
- Murcia
  - Universidad de Murcia
- Navarra
  - Universidad de Navarra
  - Universidad Pública de Navarra
- País Vasco
  - Universidad del País Vasco

Evolución de la producción matemática por Comunidades Autónomas y año

En la tabla 5.3 se muestra la evolución de la producción por CCAA y el incremento experimentado, tomando como base el primer bienio estudiado, o en su defecto, el primer bienio en que la Comunidad Autónoma tuvo alguna publicación.

Las Comunidades con una mayor producción matemática, sobre todo Madrid y Cataluña, experimentan un crecimiento por debajo del incremento medio. Se observa, pues, una tendencia hacia la descentralización de la investigación. Asturias y Murcia son las comunidades con mayor crecimiento en su producción matemática, seguidas por Andalucía, Navarra y Canarias. El enorme incremento de La Rioja no resulta representativo por ser en un único bienio y contar con un único artículo en su primer año de producción matemática. Aún así, es destacable su rápido crecimiento. El País Vasco es la comunidad con un menor incremento en su producción.

	90-91	**92-93**	**94-95**	**96-97**	**98-99**	**Total**	**Incr**
Madrid	166	242	268	337	378	1391	128%
Cataluña	159	187	233	287	346	1212	118%
Andalucía	93	134	196	276	393	1092	323%
Com. Valenciana	83	99	132	154	197	665	137%
Aragón	56	80	91	85	101	413	80%
Galicia	36	49	56	84	124	349	244%
Castilla-León	49	54	59	72	101	335	106%
País Vasco	50	43	50	58	77	278	54%
Canarias	16	24	44	70	71	225	344%
Cantabria	23	38	38	55	51	205	122%
Murcia	19	23	35	37	60	174	216%
Asturias	5	12	21	33	35	106	600%
Extremadura	11	19	18	21	30	99	173%
Navarra		10	16	27	34	87	240%
Baleares	4	9	5	14	11	43	175%
La Rioja				1	25	26	2400%
UNED	*8*	*12*	*19*	*34*	*19*	*92*	*138%*
Total real	718	968	1168	1500	1866	6220	198%

Tabla 5.3. Evolución de la producción matemática por comunidades autónomas

En el siguiente gráfico se estudia la evolución de las cinco Comunidades Autónomas con mayor producción en la década, aquellas que con más de 400 artículos.

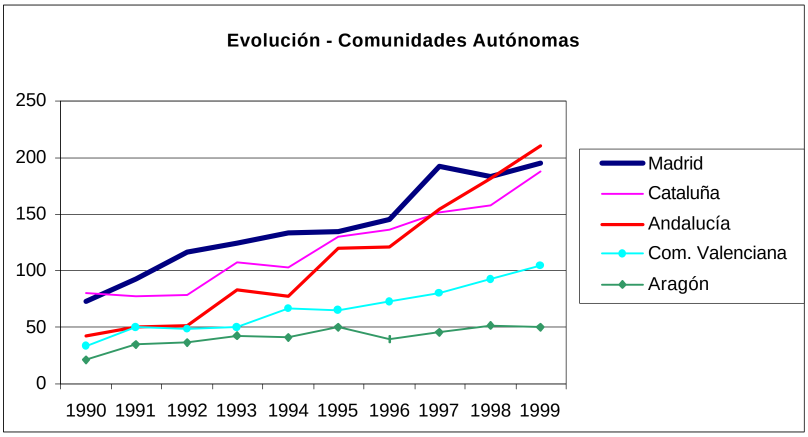


Gráfico 5.2. Evolución de la producción por CCAA

5.2. Datos generales por Sectores Institucionales

Distribución de la producción matemática de España por sectores institucionales

En la tabla 5.4 se estudia la producción matemática por sectores institucionales. Los porcentajes se refieren a la participación de los distintos sectores en la producción matemática. Al producirse colaboraciones de distintos sectores institucionales en un mismo trabajo, por ejemplo la Universidad y el CSIC, dicho trabajo figura en ambos sectores. Ello hace que las sumas totales superen los 6.220 documentos reales y la suma de porcentajes sea superior a 100.

La Universidad es el sector más productivo y participa en casi la totalidad de la producción española, el 98,6% de los documentos, mientras que el CSIC lo hace en el 2,3%. Un 0.1% de la producción es aportado por centros mixtos universidad-CSIC. Tan sólo dos centros más aparecen como participantes en producción matemática en España: el Instituto de Estudios Catalanes (IEC) y el Banco de España, esté último con tan sólo dos documentos en la década. Cabe llamar la atención sobre la ausencia total del sector privado en la producción matemática española, lo que pone de manifiesto la falta de incorporación de matemáticos al ámbito empresarial en labores de I+D, y el poco a nulo interés de la empresa privada en la investigación.

Sector	Nº art.	%
Universidad	6133	98,6%
CSIC	144	2,3%
IEC *	19	0,3%
Mixto CSIC-Univ	4	0,1%
Banco España	2	0,0%
Total real	6220	

IEC * : Instituto de Estudios Catalanes

Tabla 5.4. Producción por sectores

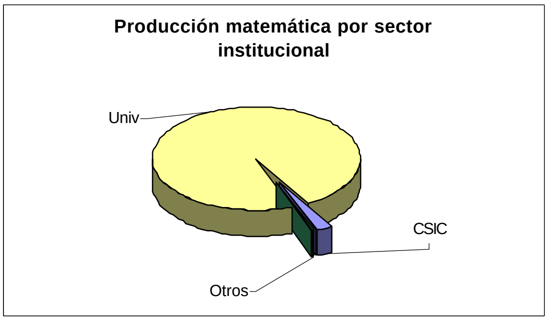


Gráfico 5.3. Producción por sector institucional

Evolución anual de la producción matemática de España por sectores institucionales

La tabla 5.5 nos muestra la evolución de la producción científica en los dos sectores más productivos: la Universidad y el CSIC, y el incremento que ha experimentado esta producción.

Tanto el CSIC como la Universidad experimentan una tendencia ascendente en su producción, aunque es más acusada en el caso del CSIC por la poca producción a principios de la década.

	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99	Total	Incr
Universidad	714	950	1154	1474	1841	6133	158%
CSIC	5	21	25	48	45	144	800%

Nota: Incrementos calculados respecto al primer bienio o, en su defecto, respecto al primer bienio con publicación

Tabla 5.5. Evolución de la producción matemática en la Universidad y el CSIC

En el siguiente gráfico se muestra la evolución de los dos sectores institucionales más productivos. Como antes, la gráfica del CSIC se ha multiplicado por 6133/144 con el fin de poder compararla entre sí.

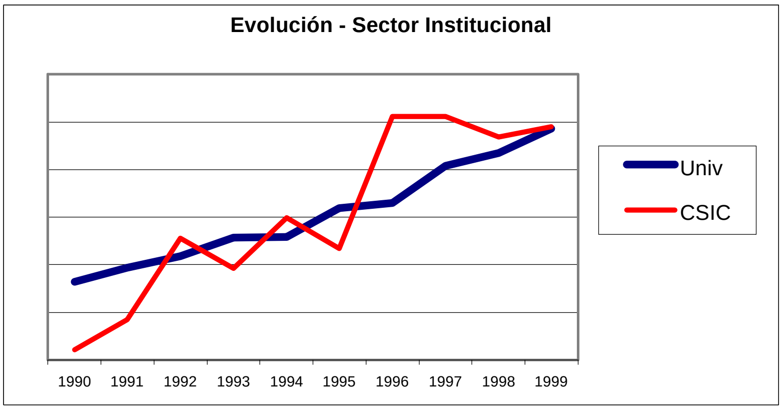


Gráfico 5.4. Evolución de la producción por sector institucional

5.3. Datos generales por Centro de Investigación

Se presenta a continuación la producción por centros de los dos sectores institucionales más importantes: Universidad y CSIC, y de los centros mixtos universidad-CSIC.
Se considera centro universitario a cada una de las universidades españolas.

Distribución de la producción matemática de España por universidades

La tabla 5.6 recoge la distribución de la producción matemática en las distintas universidades españolas, que ya hemos visto que constituyen el principal sector de investigación matemática en nuestro país. En la tabla sólo aparecen las universidades con producción matemática durante el periodo a estudio. Los porcentajes que aparecen en la tabla se refieren al porcentaje que la producción de la universidad representa respecto al total de documentos estudiados.

El análisis de la producción matemática por Universidad permite observar importantes diferencias entre ellas. La Universidad Complutense de Madrid es la que realiza una mayor aportación a la investigación matemática (el 11,4% de la producción total), seguida a una cierta distancia por las Universidades de Granada y Politécnica de Cataluña (8,8% y 7,1% respectivamente). Las Universidades de Burgos, Navarra, Las Palmas, Jaén y Lleida son las universidades de menor producción matemática, con un porcentaje sobre el total menor del 0,15%.

En la tabla se relativiza la producción de cada centro universitario por el número de profesores que hay en ellas y se calcula la ratio de documentos por profesor en los diez años que abarca el estudio. Destacan por su alta proporción de número de documentos por profesor la Universidad de Barcelona y la Universidad Autónoma de Madrid. La Universidad de Barcelona, que ocupa el cuarto puesto en cuanto a número absoluto de documentos, está a la cabeza de la producción por ratio de número de documentos por profesor. La Universidad Complutense de Madrid, que está a la cabeza en cuanto a número absoluto de documentos, pasa al quinto puesto en cuanto a documentos por profesor.

Universidad	Nº art.	%	Nº prof	Nº art./prof
Univ. Barcelona	425	6,8%	78	5,45
Univ. Autónoma de Madrid	299	4,8%	56	5,34
Univ. Autónoma de Barcelona	381	6,1%	78	4,88
Univ. La Laguna	220	3,5%	56	3,93
Univ. Complutense de Madrid	709	11,4%	184	3,85
Univ. Zaragoza	413	6,6%	108	3,82
Univ. Cantabria	205	3,3%	56	3,66
Univ. Valencia (Estudi General)	313	5,0%	89	3,52
Univ. Pompeu Fabra	14	0,2%	4	3,50
Univ. Granada	549	8,8%	160	3,43
Univ. Santiago de Compostela	286	4,6%	92	3,11
Univ. Extremadura	99	1,6%	36	2,75
Univ. Murcia	174	2,8%	70	2,49
Univ. Carlos III de Madrid	93	1,5%	38	2,45
Univ. Publica de Navarra	86	1,4%	36	2,39
UNED	92	1,5%	41	2,24
Univ. Málaga	153	2,5%	70	2,19
Univ. Alicante	107	1,7%	49	2,18
Univ. Politécnica de Cataluña	442	7,1%	211	2,09
Univ. Politécnica de Valencia	253	4,1%	121	2,09
Univ. País Vasco	278	4,5%	133	2,09
Univ. Valladolid	254	4,1%	123	2,07
Univ. Salamanca	81	1,3%	42	1,93
Univ. Sevilla	335	5,4%	178	1,88
Univ. Almería	47	0,8%	32	1,47
Univ. Jaume I de Castellón	46	0,7%	36	1,28
Univ. La Rioja	26	0,4%	22	1,18
Univ. Vigo	67	1,1%	57	1,18
Univ. Oviedo	106	1,7%	101	1,05
Univ. Islas Baleares	43	0,7%	41	1,05
Univ. Politécnica de Madrid	274	4,4%	279	0,98
Univ. Lleida	9	0,1%	12	0,75
Univ. Córdoba	33	0,5%	47	0,70
Univ. Alcalá de Henares	18	0,3%	26	0,69
Univ. A Coruña	25	0,4%	63	0,40
Univ. Cádiz	18	0,3%	59	0,31
Univ. Jaén	7	0,1%	24	0,29
Univ. Las Palmas de Gran Canaria	5	0,1%	74	0,07
Univ. Burgos	1	0,0%	17	0,06
Univ. de Navarra	1	0,0%		
Total real	6133		3124	

Tabla 5.6. Producción matemática por universidades

Evolución de la producción matemática de España por universidad española y por año.

La tabla 5.7 muestra la evolución y el crecimiento de la producción matemática en las universidades a lo largo de la década. Con el fin de facilitar su lectura, los datos se han agrupado en bienios.

Resulta curioso que las universidades con mayor ratio de artículos por profesor están entre las que menos incrementan su producción. Posiblemente esto pueda deberse a dos factores: en primer lugar a que en estos centros ha existido desde el comienzo de la década un planteamiento “moderno” de actividad investigadora y publicaciones, mientras que en el resto de los centros se ha producido una incorporación progresiva a la actividad investigadora y la dinámica de publicaciones a lo largo de los años. En segundo lugar a que las plantillas de estos centros hayan sufrido pocas variaciones por lo que el número de investigadores “reales” en los mismo se haya mantenido constante a lo largo de la década.

Los altos incrementos en algunas Universidades de reciente creación son un indicador del esfuerzo que se está realizando en las Universidades más nuevas y de menor tamaño por llevar a cabo una buena producción matemática. Las Universidades de Córdoba, Jaume I y la Autónoma de Madrid son las que menor incremento han experimentado.

Centro	**90-91**	**92-93**	**94-95**	**96-97**	**98-99**	**Total**
U. Complutense de Madrid	82	128	144	163	192	709
U. de Granada	51	67	116	140	175	549
U. Politécnica de Cataluña	41	65	74	125	137	442
U. de Barcelona	70	80	94	83	98	425
U. de Zaragoza	56	80	91	85	101	413
U. Autónoma de Barcelona	54	62	84	86	95	381
U. de Sevilla	32	42	48	92	121	335
U. de Valencia	38	58	70	78	69	313
U. Autónoma de Madrid	53	57	64	66	59	299
U. de Santiago de Compostela	36	49	56	63	82	286
U. del País Vasco	50	43	50	58	77	278
U. Politécnica de Madrid	28	57	57	62	70	274
U. de Valladolid	34	41	48	53	78	254
U. Politécnica de Valencia	44	44	50	49	66	253
U. de La Laguna	16	24	44	68	68	220
U. de Cantabria	23	38	38	55	51	205
U. de Murcia	19	23	35	37	60	174
U. de Málaga	8	22	30	36	57	153
U. de Alicante	4	4	18	32	49	107
U. de Oviedo	5	12	21	33	35	106
U. de Extremadura	11	19	18	21	30	99
U. Carlos III de Madrid			1	32	60	93
UNED	8	12	19	34	19	92
U. Pública de Navarra		10	16	27	33	86
U. de Salamanca	15	13	11	18	24	81
U. de Vigo				20	47	67
U. de Almería				8	39	47
U. Jaume I				15	31	46
U. de las Islas Baleares	4	9	5	14	11	43
U. de Córdoba	4	6	5	8	10	33
U. de La Rioja				1	25	26
U. de La Coruña				7	18	25
U. de Alcalá de Henares	2	4	0	4	8	18
U. de Cádiz	1	1	0	7	9	18
U. Pompeu Fabra				1	13	14
U. de Lleida					9	9
U. de Jaén				1	6	7
U. de Las Palmas de G.C.				2	3	5
U. de Burgos				1	0	1
U. de Navarra					1	1
Total	714	950	1154	1474	1841	6133

Nota: Incrementos calculados respecto al primer bienio o, en su defecto, respecto al primer bienio con publicación

Tabla 5.7. Evolución de la producción matemática por universidades

En el siguiente gráfico se muestra la evolución de los cinco centros universitarios con mayor producción en la década.

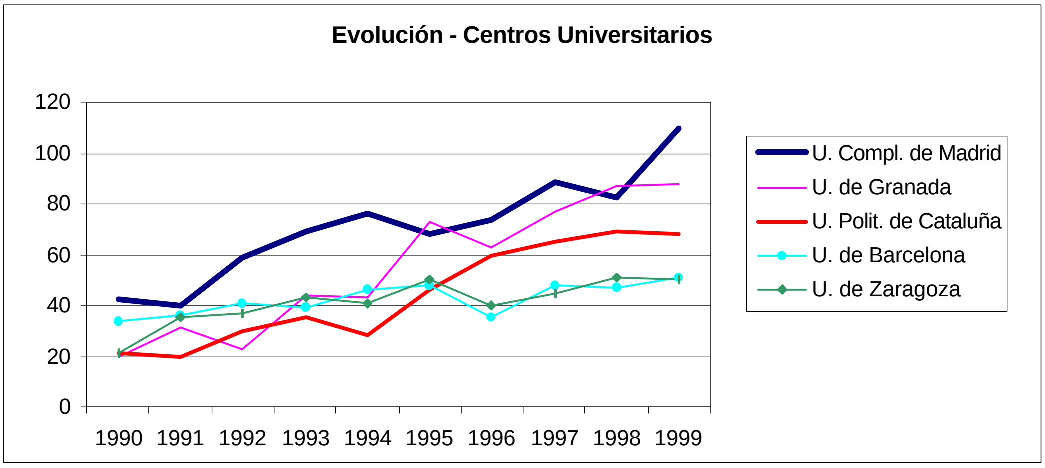


Gráfico 5.5. Evolución de la producción por centros universitarios

Distribución de la producción matemática de España por centros del CSIC y centros mixtos CSIC-Universidad

La tabla 5.8 recoge la distribución de la producción matemática en los distintos centros del CSIC y los centros mixtos Universidad-CSIC (con asterisco en la tabla), con los porcentajes que su producción representa respecto al total de documentos a estudio.

Centro	**Nº art.**	**% resp prod. total**
Centro de Física Miguel A. Catalán (CFMAC)	93	1,5%
Centro de Tecnologías Físicas L. Torres Quevedo (CETEF)	21	0,3%
Instituto de Análisis Económico (IAE)	17	0,3%
Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid (ICMM)	7	0,1%
Instituto Investigación en Inteligencia Artificial (IIIA)	6	0,1%
Instituto de Astrofísica de Andalucía (IAA)	1	0,0%
Instituto Andaluz de Ciencias de la Tierra (IACT) (*)	2	0,0%
Instituto de Estudios Espaciales de Cataluña (IEEC) (*)	1	0,0%
Instituto de Robótica e Informática (IRII) (*)	1	0,0%
Total	148	

Tabla 5.8. Producción matemática por centros del CSIC y centros mixtos

El centro de mayor producción matemática del CSIC es el Centro de Física Miguel A. Catalán, que está integrado por tres institutos: el Instituto de Estructura de la Materia, el Instituto de Matemática y Física Fundamental y el Instituto de Óptica Daza de Valdés. Por consiguiente el peso de la investigación matemática en el CSIC descansa en el Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, que cuenta con un reducido pero muy activo grupo de matemáticos (tres investigadores) y cuya producción supone el 80% de la producción matemática del CSIC. Hay también un investigador matemático en el Instituto de Física Aplicada del Centro de Tecnologías Físicas L. Torres Quevedo.

Los tres últimos centros de la tabla son Centros Mixtos ninguno de los cuales es propiamente de matemáticas. El Instituto Andaluz de Ciencias de la Tierra ha cambiado de nombre durante la década siendo anteriormente el Instituto Andaluz Mediterráneo.

La tabla y gráfico siguientes muestran la evolución del Centro de Física Miguel A. Catalán:

Centro	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99	Total	Incr
C. Física M. Catalán	3	16	16	36	22	93	200%

Tabla 5.9. Evolución de la producción matemática del Centro de Física Miguel A. Catalán

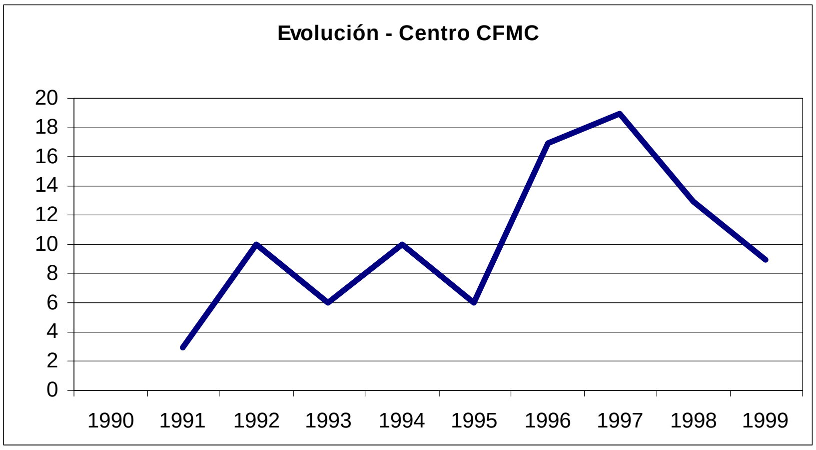


Gráfico 5.6. Evolución de la producción del Centro de Física M.A. Catalán

5.4. Datos generales por Clasificación MSC

En la tabla 5.10 se recoge la distribución de la producción según la clasificación MSC 1991 con la inclusión de los tres nuevos temas de la MSC 2000 ordenada por el número de documentos de cada tema en orden descendente, señalando además el porcentaje de producción.

Más del 50% de la investigación española se centra en nueve de los 61 temas que recoge la clasificación MSC'91, mientras que casi el 90% se centra en 35 de ellos. Como se muestra en la tabla, el tema más productivo en la investigación matemática en cuanto a número absoluto de documentos es el de *Análisis Funcional* (no. 46), seguido del *Ecuaciones en derivadas parciales* (no. 35) y *Análisis numérico* (no. 65).

MSC	MSC 1991	Nº art.	%	% acum
46	Análisis funcional	561	9,0%	9,0%
35	Ecuaciones en derivadas parciales	377	6,1%	15,1%
65	Análisis numérico	377	6,1%	21,1%
62	Estadística	357	5,7%	26,9%
90	Economía, investigación operativa, programación, juegos	317	5,1%	32,0%
58	Análisis global, análisis en variedades	312	5,0%	37,0%
53	Geometría diferencial	274	4,4%	41,4%
34	Ecuaciones diferenciales ordinarias	182	2,9%	44,3%
68	Ciencias de la computación	181	2,9%	47,2%
20	Teoría de grupos y generalizaciones	180	2,9%	50,1%
14	Geometría algebraica	167	2,7%	52,8%
16	Anillos y álgebras asociativos	167	2,7%	55,5%
42	Análisis de Fourier	158	2,5%	58,0%

60	Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos	156	2,5%	60,5%
93	Teorías del control y sistema	155	2,5%	63,0%
76	Mecánica de fluidos	141	2,3%	65,3%
17	Anillos y álgebras no asociativos	135	2,2%	67,5%
47	Teoría de operadores	121	1,9%	69,4%
54	Topología general	107	1,7%	71,1%
13	Anillos conmutativos y álgebras	103	1,7%	72,8%
32	Varias variables complejas y espacios analíticos	94	1,5%	74,3%
73	Mecánica de sólidos	94	1,5%	75,8%
70	Mecánica de sistemas y partículas	92	1,5%	77,3%
03	Lógica y fundamentos	88	1,4%	78,7%
05	Combinatoria	88	1,4%	80,1%
30	Funciones de una variable compleja	82	1,3%	81,4%
81	Teoría cuántica	82	1,3%	82,8%
41	Aproximaciones y expansiones	81	1,3%	84,1%
55	Topología algebraica	73	1,2%	85,2%
11	Teoría de números	71	1,1%	86,4%
82	Mecánica estadística, estructura de la materia	68	1,1%	87,5%
33	Funciones especiales	61	1,0%	88,5%
15	Álgebra lineal y multilineal, teoría de matrices	60	1,0%	89,4%
28	Medida e integración	48	0,8%	90,2%
49	Cálculo de variaciones, optimización	46	0,7%	90,9%
94	Información y comunicaciones, circuitos	45	0,7%	91,7%
57	Variedades y complejos celulares	44	0,7%	92,4%
92	Biología y otras ciencias naturales, ciencias del comportamiento	41	0,7%	93,0%
83	Relatividad y teoría gravitatoria	38	0,6%	93,6%
04	Teoría de conjuntos	36	0,6%	94,2%
37*	Sistemas dinámicos y teoría ergódica	34	0,5%	94,8%
91*	Teoría de juegos, economía, ciencias sociales y del comportamiento	32	0,5%	95,3%
18	Teoría de categorías, álgebra homológica	31	0,5%	95,8%
52	Geometría convexa y discreta	28	0,5%	96,2%
12	Teoría de cuerpos y polinomios	25	0,4%	96,6%
26	Funciones reales	23	0,4%	97,0%
78	Óptica, electromagnetismo	23	0,4%	97,4%
01	Historia y biografías	21	0,3%	97,7%
22	Grupos topológicos, grupos de Lie	17	0,3%	98,0%
39	Ecuaciones de diferencias finitas y funcionales	17	0,3%	98,2%
44	Transformaciones integrales, cálculo operacional	17	0,3%	98,5%
74*	Mecánica de sólidos deformables	14	0,2%	98,7%
06	Retículos, estructuras algebraicas ordenadas	13	0,2%	99,0%
31	Teoría del potencial	13	0,2%	99,2%
45	Ecuaciones integrables	13	0,2%	99,4%
80	Termodinámica clásica, transmisión del calor	10	0,2%	99,5%
86	Geofísica	8	0,1%	99,7%
43	Análisis armónico abstracto	6	0,1%	99,8%
19	K-teoría	5	0,1%	99,8%
85	Astrofísica y astronomía	4	0,1%	99,9%
51	Geometría	3	0,0%	100,0%
08	Sistemas matemáticos generales	2	0,0%	100,0%
00	General	1	0,0%	100,0%
	Total	6220		

* Proceden de MSC 2000

Tabla 5.10. Producción matemática por clasificación MSC

Evolución de la producción matemática de España por clasificación MSC y por año.

La tabla 5.11 muestra la evolución de la producción matemática por clasificación MSC y los incrementos experimentados a lo largo de la década por cada tema.

Considerando los códigos MSC con más de 100 artículos en la década, resultan destacables los incrementos en la publicación de temas referentes a Estadística (no. 62), Análisis Numérico (no. 65), Geometría Diferencial (no. 53) y Ciencias de la Computación (no. 68).

MSC	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99	Total	Incr
46	80	97	117	119	148	561	85%
35	48	81	75	93	80	377	67%
65	40	53	67	81	136	377	240%
62	30	41	64	96	126	357	320%
90	33	41	64	81	98	317	197%
58	34	65	69	88	56	312	65%
53	27	33	48	75	91	274	237%
34	21	19	23	53	66	182	214%
68	18	30	27	47	59	181	228%
20	29	28	40	37	46	180	59%
14	25	20	28	43	51	167	104%
16	24	29	33	35	46	167	92%
42	16	32	30	31	49	158	206%
60	19	25	28	39	45	156	137%
93	16	23	33	36	47	155	194%
76	11	12	39	33	46	141	318%
17	14	27	33	30	31	135	121%
47	17	21	12	29	42	121	147%
54	14	18	9	29	37	107	164%
13	12	16	27	24	24	103	100%
32	9	14	20	28	23	94	156%
73	10	13	26	21	24	94	140%
70	12	12	21	23	24	92	100%
03	7	20	13	18	30	88	329%
05	7	9	10	30	32	88	357%
30	11	14	21	21	15	82	36%
81	16	13	15	17	21	82	31%
41	4	12	12	30	23	81	475%
55	9	15	11	17	21	73	133%
11	13	13	13	9	23	71	77%
82	15	10	14	10	19	68	27%
33	5	3	9	16	28	61	460%
15	10	9	12	14	15	60	50%
28	3	9	12	13	11	48	267%
49	6	14	8	10	8	46	33%
94	3	12	7	8	15	45	400%
57	5	10	11	8	10	44	100%
92	8	1	5	13	14	41	75%
83	5	10	5	7	11	38	120%
04	5	9	7	12	3	36	-40%
37*				1	33	34	3200%
91*					32	32	
18	3	2	9	4	13	31	333%
52	2	2	3	11	10	28	400%
12	6	4	6	4	5	25	-17%
26	1	1	4	8	9	23	800%
78			4	8	11	23	175%
01	3	6	2	5	5	21	67%

22	1	2	3	4	7	17	600%
39	3	2	3	4	5	17	67%
44	1	3	1	8	4	17	300%
74*					14	14	
06	1	0	0	3	9	13	800%
31		3	2	4	4	13	33%
45	2	2	3	3	3	13	50%
80		4	3	2	1	10	-75%
86		2	1	2	3	8	50%
43	1	0	2	2	1	6	0%
19		1	1	3	0	5	-100%
85	3	0	0	0	1	4	-67%
51			2	0	1	3	-50%
08			1	0	1	2	0%
00		1	0	0	0	1	-100%
Total	718	968	1168	1500	1866	6220	

Notas: Incrementos calculados respecto al primer bienio o, en su defecto, respecto al primer bienio con publicación

* Proceden de MSC 2000

Tabla 5.11. Evolución de la producción matemática por MSC

En el siguiente gráfico se muestra la evolución anual (90-99) de los cinco temas MSC con mayor producción en la década. Es de destacar el crecimiento continuado y de rápida pendiente del código Análisis Numérico (no. 65).

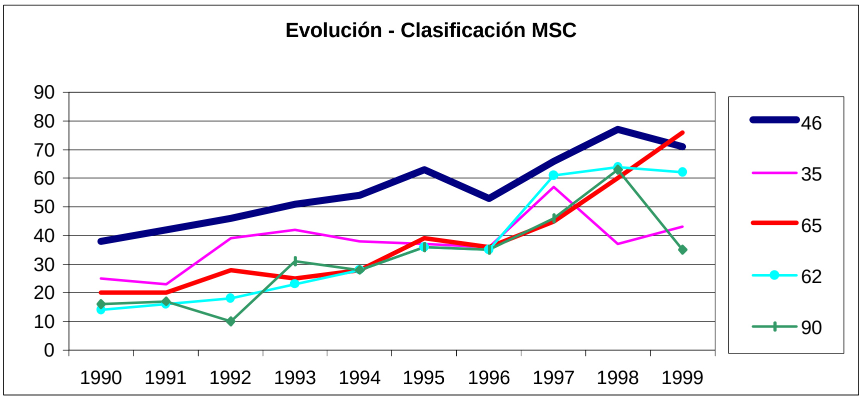


Gráfico 5.7. Evolución de la producción por clasificación MSC

Centros más productivos en los temas MSC con mayor producción

La tabla 5.12 muestra los centros que más han trabajado en cada uno de los cinco códigos MSC con una mayor producción durante la década 1990-1999. La última columna indica el porcentaje del total de documentos en el código que corresponde al centro en cuestión. Así, se tiene que la Universidad Complutense de Madrid es la autora del 35% de todos los artículos españoles de la década en el código "Ecuaciones en derivadas parciales".

Centro	Nº art.	%
46 - Análisis funcional		
Universidad Complutense de Madrid	84	13,1%
Universidad de Granada	78	12,1%
Universidad Politécnica de Valencia	72	11,2%
Universidad de Sevilla	69	10,7%
Universidad de Valencia	59	9,2%
35 – Ecuaciones en derivadas parciales		
Universidad Complutense de Madrid	146	35,0%
Universidad Autónoma de Madrid	91	21,8%
Universidad del País Vasco	35	8,4%
Universidad de Granada	23	5,5%
Universidad Politécnica de Madrid	18	4,3%
65 - Análisis numérico		
Universidad de Zaragoza	81	19,6%
Universidad de Valladolid	73	17,7%
Universidad Politécnica de Valencia	42	10,2%
Universidad de Málaga	28	6,8%
Universidad de Alicante	23	5,6%
62 – Estadística		
Universidad Complutense de Madrid	80	18,1%
Universidad de Barcelona	39	8,8%
Universidad de Granada	36	8,1%
Universidad Politécnica de Madrid	36	8,1%
Universidad de Cantabria	34	7,7%
90 – Economía, investigación operativa, programación, juegos		
Universidad de Alicante	52	14,4%
Universidad Autónoma de Barcelona	45	12,5%
Universidad de Sevilla	27	7,5%
Universidad Complutense de Madrid	21	5,8%
Universidad de Zaragoza	21	5,8%

Tabla 5.12. Centros más productivos en los temas con mayor producción

Temas MSC más estudiados en los cinco centros con mayor producción

La tabla 5.13 muestra los códigos por MSC que más han investigado los cinco centros españoles con una mayor producción. La última columna indica el porcentaje que representa el código en la producción total del centro. Así, el 20,6% de la producción matemática de la Universidad Complutense se centra en las ecuaciones en derivadas parciales.

Aunque por su menor producción no aparece en la siguiente tabla, cabe señalar que la producción del CSIC, que es en realidad la del Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, se centra en dos temas de la clasificación MSC: un 36,6% se clasifica en "Geometría diferencial" (no. 53) y un 34,4% en "Análisis global, análisis en variedades", (no. 58).

Tema MSC	Nº art.	%
Universidad Complutense de Madrid		
Ecuaciones en derivadas parciales	146	20,6%
Análisis funcional	84	11,8%
Estadística	80	11,3%
Geometría algebraica	43	6,1%
Análisis global, análisis en variedades	37	5,2%
Universidad de Granada		
Geometría diferencial	108	19,7%
Análisis funcional	78	14,2%
Estadística	36	6,6%
Ecuaciones diferenciales ordinarias	27	4,9%
Anillos y álgebras asociativos	26	4,7%
Universidad Politécnica de Cataluña		
Ciencias de la computación	81	18,3%
Combinatoria	74	16,7%
Análisis global, análisis en variedades	35	7,9%
Mecánica de fluidos	25	5,7%
Mecánica de sólidos	25	5,7%
Universidad de Barcelona		
Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos	57	13,4%
Análisis global, análisis en variedades	49	11,5%
Geometría algebraica	48	11,3%
Estadística	39	9,2%
Anillos conmutativos y álgebras	29	6,8%
Universidad de Zaragoza		
Análisis numérico	81	19,6%
Anillos y álgebras no asociativos	60	14,5%
Análisis global, análisis en variedades	26	6,3%
Aproximaciones y expansiones	25	6,1%
Teoría de grupos y generalizaciones	23	5,6%

Tabla 5.13. Temas con mayor producción en los centros más productivos

5.5. Datos generales por Áreas de Conocimiento

Distribución de la producción matemática por Áreas de conocimiento

La tabla 5.14 recoge la distribución de la producción matemática por las Áreas de Conocimiento en las que se pueden clasificar los artículos del presente estudio. El área con mayor número de publicaciones es la de “Matemática Aplicada” que constituye el 43,8% de la producción total. También es el área que contiene mayor número de profesores adscritos a la misma, por lo que presentamos una relativización de la producción por número de profesores numerarios en el área. Teniendo en cuenta la ratio de nº de artículos por profesor, Geometría y Topología es el área más productiva, siendo seguida a cierta distancia por Álgebra. Una vez más recordamos que la mayoría de los códigos de la MSC están adscritos a varias áreas de conocimiento, por lo que la suma total de artículos supera los 6.220 documentos reales de la base de datos, y la suma de los porcentajes supera 100.

Area de conocimiento	Nº art.	%	Nº profesores	Nº art/prof
Geometría y Topología	1585	25,5%	169	9,38
Algebra	1314	21,1%	205	6,41
Análisis Matemático	1871	30,1%	322	5,81
Matemática Aplicada	2723	43,8%	1334	2,04
Estadística e IO	1010	16,2%	705	1,43
Ciencia de la Computación e IA	338	5,4%	389	0,87
Total real	6220			

Tabla 5.14. Producción matemática por Áreas de Conocimiento

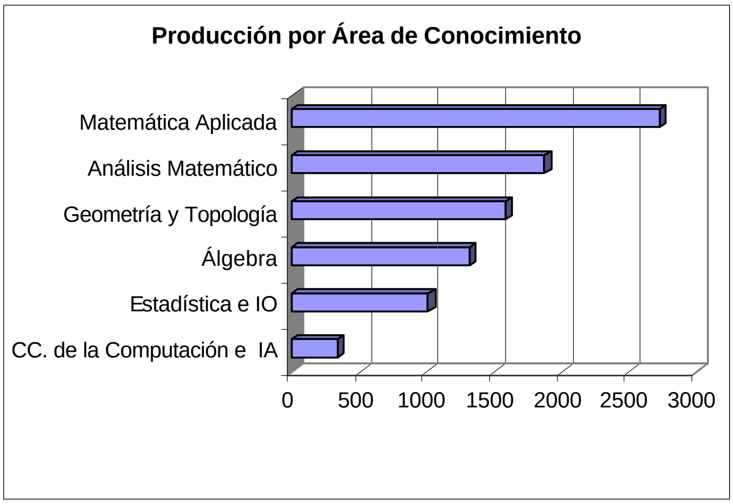


Gráfico 5.8. Producción por Áreas de Conocimiento

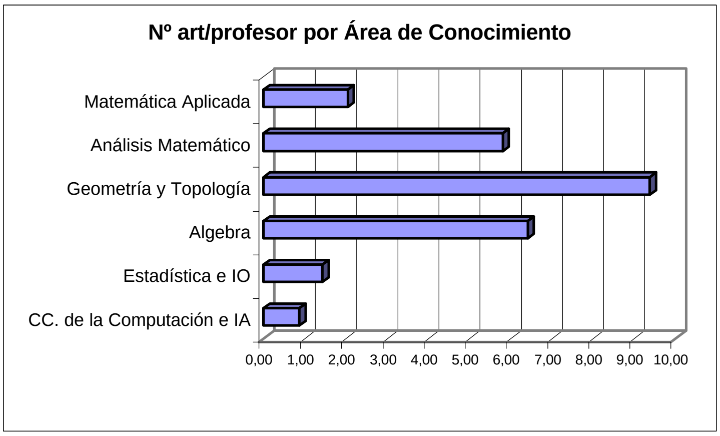


Gráfico 5.9. Ratio nº de artículos por profesor

Evolución de la producción matemática por Áreas de Conocimiento

La tabla 5.15 muestra la evolución y el crecimiento de la producción matemática por las áreas de conocimiento. El gráfico 5.10 muestra la evolución anual de la producción en las distintas áreas de conocimiento.

	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99	Total	Incr
Matemática Aplicada	315	453	512	669	774	2723	146%
Análisis Matemático	225	314	358	463	511	1871	127%
Geometría y Topología	198	261	300	402	424	1585	114%
Álgebra	171	213	254	303	373	1314	118%
Estadística e IO	107	133	183	261	326	1010	205%
CC. de la Computación e IA	31	69	50	78	110	338	255%
Total real	718	968	1168	1500	1866	6220	

Nota: Incrementos calculados respecto al primer bienio o, en su defecto, respecto al primer bienio con publicación

Tabla 5.15. Evolución de la producción por Áreas de Conocimiento

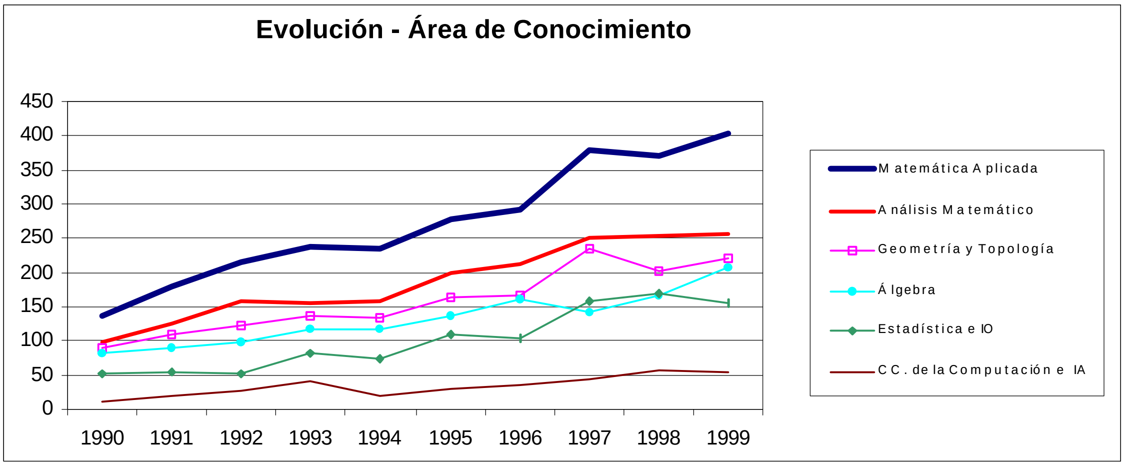


Gráfico 5.10. Evolución de la producción por Áreas de Conocimiento

5.6. Relativización de la producción matemática

Relativización de la producción matemática de las CCAA por número de habitantes

En la tabla 5.16 se relativiza la producción matemática española por el número de habitantes de las comunidades autónomas. Los datos referentes a la población son a fecha del 1-1-1998 y se han obtenido de la página web del Instituto Nacional de Estadística. En la última columna de la tabla se muestra la ratio por CCAA de la producción matemática por población, obteniéndose el número de documentos en la década por cada 10.000 habitantes. La tabla se ha ordenado de forma descendente por este dato.

En la presentación de los resultados generales de la producción matemática por Comunidades Autónomas, se ha visto como Madrid y Cataluña son las que acaparan la mayoría de la producción pero que, sin embargo, son Aragón y Cantabria las Comunidades con una mayor proporción de artículos por profesor. Si tenemos en cuenta la tabla 5.16 se observa que precisamente son estas comunidades las que muestran también una mayor proporción de artículos por cada 10.000 habitantes.

Las comunidades de Madrid y Cataluña, responsables de más del 40% de la producción matemática en España, pasan a ocupar un tercer y cuarto puesto respectivamente si tenemos en cuenta el número de documentos producidos por cada 10.000 habitantes, mientras que las comunidades más productivas en cuanto a capacidad por habitante pasan a ser las de Aragón y Cantabria. Navarra, que aparecía como una de las comunidades menos productivas, pasa a ser la sexta comunidad con mayor producción por habitante. También resulta destacable el caso de Andalucía, que aunque ocupaba el tercer puesto en cuanto a número de documentos publicados, teniendo en cuenta la producción respecto al número de habitantes, resulta ser una comunidad no muy productiva.

CCAA	**Nº art.**	**%**	**Nº art./10000 hab**
Cantabria	205	3,3%	3,89
Aragón	413	6,6%	3,49
Madrid	1391	22,4%	2,73
Cataluña	1212	19,5%	1,97
Valencia	665	10,7%	1,65
Navarra	87	1,4%	1,64
Murcia	174	2,8%	1,56
Andalucía	1092	17,6%	1,51
Canarias	225	3,6%	1,38
Castilla-León	335	5,4%	1,35
País Vasco	278	4,5%	1,32
Galicia	349	5,6%	1,28
La Rioja	26	0,4%	0,99
Asturias	106	1,7%	0,98
Extremadura	99	1,6%	0,93
Baleares	43	0,7%	0,54
Total real	6220		

Tabla 5.16. Producción matemática en las CCAA por nº de habitantes

Profesorado Universitario de Matemáticas por cada 10.000 habitantes y CCAA.

La tabla 5.17 muestra el ratio de profesores por cada 10.000 habitantes y se observa que son Madrid y Cantabria las comunidades con mayor proporción. Se observan diferencias significativas entre unas Comunidades y otras en la tasa de profesores por 10.000 habitantes, que seguramente obedecen a razones históricas.

CCAA	**Nº Prof (2000)**	**Población**	**Prof/10000 hab**
Madrid	583	5.091.336	1,15
Cantabria	56	527.137	1,06
Asturias	101	1.081.834	0,93
Aragón	108	1.183.234	0,91
La Rioja	22	263.644	0,83
Canarias	130	1.630.015	0,80
Andalucía	570	7.236.459	0,79
Galicia	212	2.724.544	0,78
Valencia	295	4.023.441	0,73
Castilla-León	182	2.484.603	0,73
Navarra	36	530.819	0,68
País Vasco	133	2.098.628	0,63
Murcia	70	1.115.068	0,63
Cataluña	383	6.147.610	0,62
Baleares	41	796.483	0,51
Extremadura	36	1.069.419	0,34

Tabla 5.17. Proporción nº de profesores de matemáticas por 10.000 hab.

6. ESTUDIO DE LA CALIDAD EN LA INVESTIGACIÓN

A la hora de valorar la calidad de la investigación, además del análisis cuantitativo realizado, es necesario utilizar indicadores bibliométricos de impacto basados en el número de citas que obtienen los trabajos, con el fin de permitir las comparaciones. Al valorar los resultados que proporcionan lo indicado es bibliométricos hay que tener en cuenta las limitaciones que presentan y que han sido comentadas en la sección “Metodología” del presente estudio.

6.1. Distribución de la producción por cuartiles

La base de datos ISI clasifica las revistas por disciplinas en función de su temática, y dentro de cada disciplina ordena las revistas en función de su factor de impacto. Este orden permite clasificar las revistas por cuartiles. En la tabla 6.1 se muestra la distribución de la producción matemática por los cuartiles en que se clasifican las revistas en las que ha habido algún artículo español, según la última versión del Journal Citation Reports (JCR 1999).

Cuartil	Nº revistas	Nº artículos
1	107	16%
2	105	23%
3	110	36%
4	91	26%

Tabla 6.1. Distribución de la producción española por cuartiles

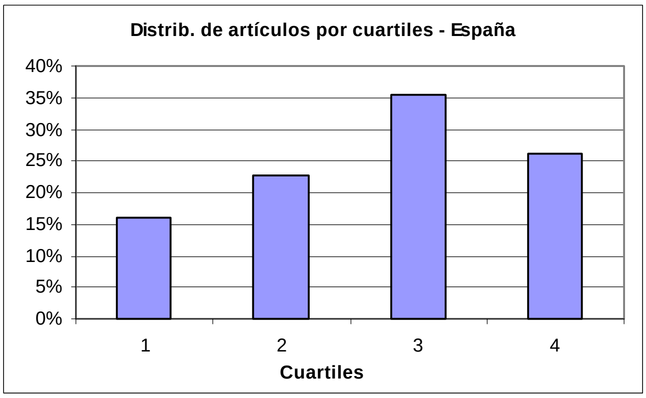


Gráfico 6.1. Distribución por cuartiles de la producción española

Para comparar la distribución por cuartiles de la producción española con la distribución mundial, se ha obtenido la distribución de los artículos que recoge la base MathSci durante la última década, aparecidos dentro de las revistas de los respectivos cuartiles del ISI. La distribución resultante de la producción matemática se muestra en la tabla 6.2.

Se puede observar que la distribución española está desplazada hacia el tercer cuartil de modo mucho más acusado que la distribución mundial, en detrimento del número de trabajos colocados en el primer cuartil. Los porcentajes en el segundo y cuarto cuartil son similares en España y el resto del mundo. Aproximadamente el 39% de los artículos se publican en revistas con un factor de impacto por encima de la media. A nivel mundial este porcentaje alcanza el 44%.

Cuartil	Nº revistas	Nº artículos
1	107	22%
2	105	22%
3	110	29%
4	91	27%

Tabla 6.2. Distribución de la producción mundial por cuartiles

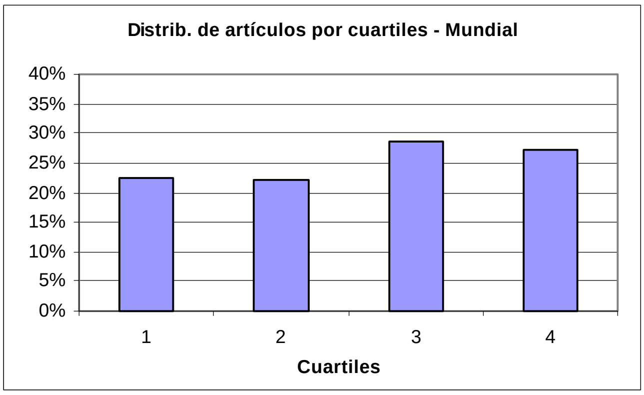


Gráfico 6.2. Distribución por cuartiles de la producción mundial

Evolución de la distribución por cuartiles

La tabla 6.3 muestra la evolución de la distribución por cuartiles de la producción matemática. Se puede observar que la distribución no ha variado significativamente durante la última década, aunque en valores absolutos el número de publicaciones en revistas de calidad sí que ha aumentado, como se ha puesto de manifiesto anteriormente.

	90-91	92-93	94-95	96-97	98-99
Cuartil 1	17%	16%	16%	16%	15%
Cuartil 2	22%	23%	25%	23%	21%
Cuartil 3	34%	37%	35%	34%	37%
Cuartil 4	27%	24%	25%	27%	26%

Tabla 6.3. Evolución de la distribución por cuartiles

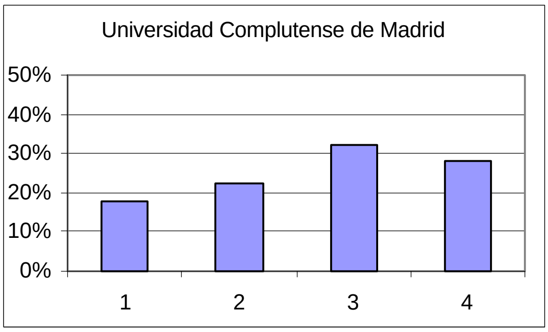
Distribución por cuartiles de la producción de los centros universitarios y del CSIC

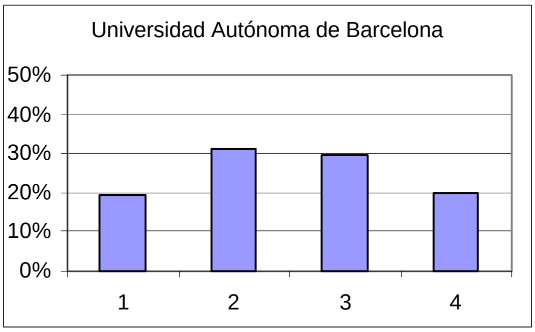
La tabla 6.4 muestra la distribución de la producción de cada centro universitario y el Instituto Miguel Catalán por los cuartiles en los que se encuentran las revistas donde se han publicado. La tabla se ha ordenado de forma descendente por la producción de cada centro. Se resaltan en negrilla los porcentajes de los centros cuya producción en el primer cuartil es superior a la media nacional. Asímismo se muestran los gráficos de los centros de mayor producción.

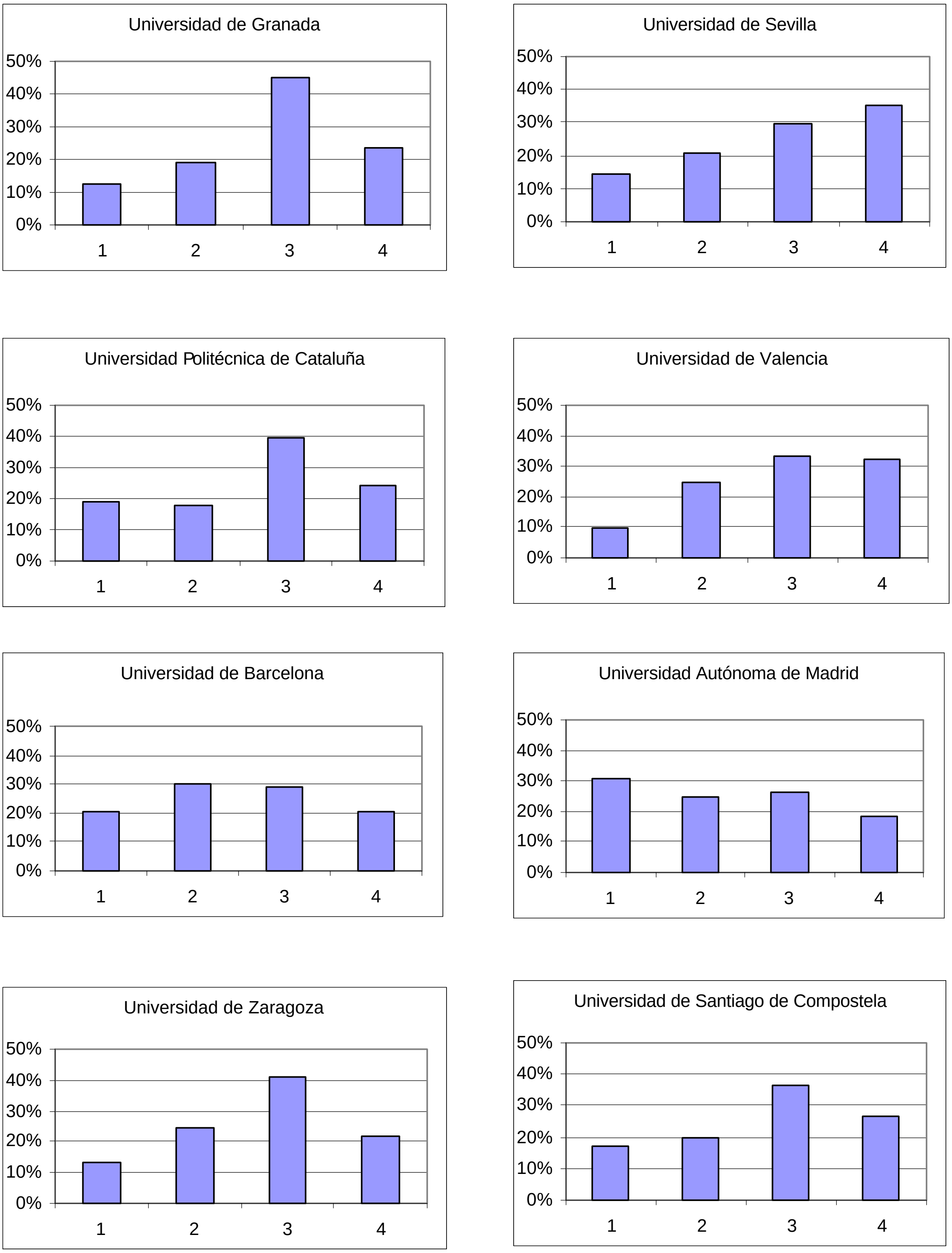
Las universidades con una mayor calidad en su producción (sin olvidar las límitaciones señaladas al concepto de calidad en base al índice de impacto), son la Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad de Valladolid y la Universidad de Salamanca.

Centro	Cuartil 1	Cuartil 2	Cuartil 3	Cuartil 4
Universidad Complutense de Madrid	**18%**	22%	32%	28%
Universidad de Granada	13%	19%	45%	24%
Universidad Politécnica de Cataluña	**19%**	18%	40%	24%
Universidad de Barcelona	**21%**	30%	29%	20%
Universidad de Zaragoza	13%	25%	41%	22%
Universidad Autónoma de Barcelona	**19%**	31%	30%	20%
Universidad de Sevilla	14%	21%	30%	35%
Universidad de Valencia	10%	25%	33%	32%
Universidad Autónoma de Madrid	**31%**	25%	26%	18%
Universidad de Santiago de Compostela	**17%**	20%	37%	27%
Universidad del País Vasco	**18%**	24%	36%	21%
Universidad Politécnica de Madrid	12%	24%	36%	28%
Universidad de Valladolid	**29%**	21%	34%	17%
Universidad Politécnica de Valencia	6%	8%	33%	53%
Universidad de La Laguna	12%	14%	47%	27%
Universidad de Cantabria	15%	20%	36%	29%
Universidad de Murcia	7%	24%	44%	26%
Universidad de Málaga	7%	22%	39%	32%
Universidad de Alicante	**21%**	15%	31%	33%
Universidad de Oviedo	11%	28%	36%	25%
Universidad de Extremadura	7%	34%	21%	37%
Universidad Carlos III de Madrid	**17%**	29%	41%	12%
Centro de Física Miguel A. Catalán	10%	30%	39%	22%
UNED	9%	27%	41%	23%
Universidad Pública de Navarra	5%	19%	56%	21%
Universidad de Salamanca	**28%**	30%	25%	18%
Universidad de Vigo	9%	13%	60%	18%
Universidad de Almería	9%	15%	64%	13%
Universidad Jaume I	9%	24%	20%	48%
Universidad de las Islas Baleares	**26%**	23%	42%	9%
Universidad de Córdoba	6%	9%	42%	42%
Universidad de La Rioja	8%	23%	19%	50%
Universidad de La Coruña	12%	16%	40%	32%
Universidad de Alcalá de Henares	0%	33%	33%	33%
Universidad de Cádiz	**22%**	44%	22%	11%
Universidad Pompeu Fabra	**29%**	36%	29%	7%
Universidad de Lleida	11%	0%	44%	44%
Universidad de Jaén	14%	14%	43%	29%
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria	20%	0%	20%	60%
Universidad de Navarra	0%	0%	0%	100%
Universidad de Burgos	0%	0%	0%	100%
España	**16%**	**23%**	**36%**	**26%**

Tabla 6.4. Distribución por cuartiles de la producción universitaria







Gráficos 6.3.-6.12. Distribución por cuartiles de la producción universitaria

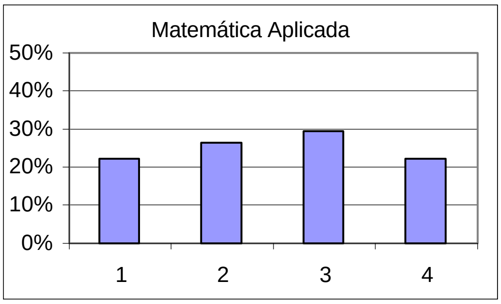
Distribución por cuartiles de la producción por áreas de conocimiento

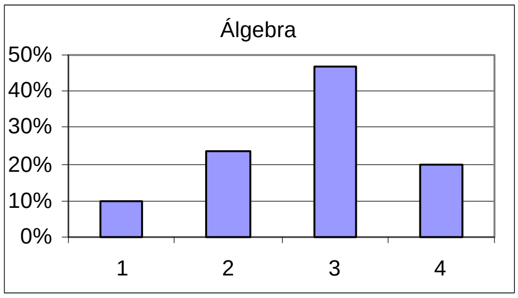
La tabla 6.5 muestra la distribución de la producción de áreas de conocimiento por los cuartiles en los que se encuentran las revistas donde se han publicado. La tabla se ha ordenado de forma descendente por la producción de cada área. Se resaltan los porcentajes de las áreas cuya producción en el primer cuartil es superior a la media nacional y se muestran los gráficos de la distribución por cuartiles de cada una de ellas.

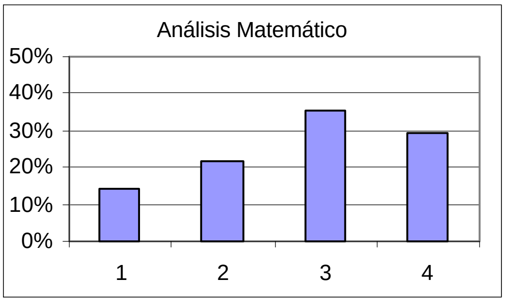
Las áreas de conocimiento que publican en revistas con índices de impacto superiores, son las de Matemática Aplicada y Geometría y Topología.

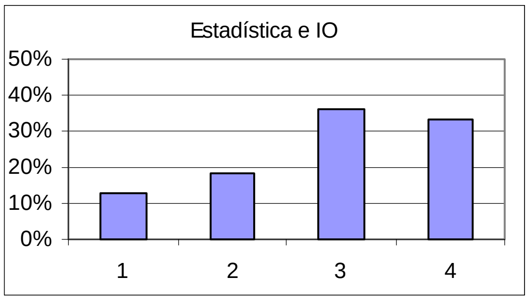
Centro	Cuartil 1	Cuartil 2	Cuartil 3	Cuartil 4
Matemática Aplicada	**22%**	26%	30%	22%
Análisis Matemático	14%	22%	35%	29%
Geometría y Topología	**21%**	26%	28%	25%
Álgebra	10%	24%	47%	20%
Estadística e IO	13%	18%	36%	33%
CC. de la Computación e IA	15%	10%	47%	28%
España	**16%**	**23%**	**36%**	**26%**

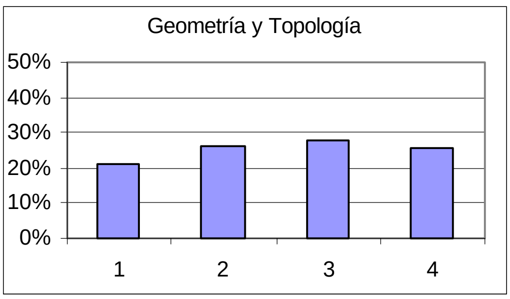
Tabla 6.5. Distribución por cuartiles de la producción por áreas de conocimiento

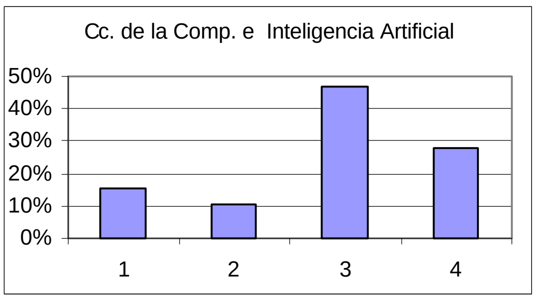












Gráficos 6.13.-6.18. Distribución por cuartiles de la producción por área de conocimiento

De nuevo, hay que tomar ciertas cautelas a la hora de interpretar los resultados de estas tablas. Por ejemplo, la tabla 6.6 pone de manifiesto que una buena cantidad de las publicaciones de Álgebra se realizan en las revistas Communications in Algebra, y Journal of Pure and Applied Algebra que, al tratarse de revistas especializadas, y ser el colectivo de algebristas relativamente bajo, se sitúan en el cuartil 3 dentro del epígrafe de Mathematics, pese a tratarse de revistas de calidad dentro de su área.

6.3. Revistas ISI con un mayor número de documentos publicados en ellas, su factor de impacto medio y cuartil

En las siguientes tablas se muestran las distintas categorías ISI a las que pertenecen las cincuenta revistas de la tabla anterior, junto con el factor de impacto medio de los últimos diez años de la revista. Junto a estos datos aparece el cuartil que ocupa la revista dentro de su epígrafe. Hemos elaborado datos de la distribución por cuartiles de los artículos para los epígrafes de Matemáticas, Matemática Aplicada y Estadística. Llama la atención que la distribución por cuartiles de estas dos últimas áreas no coincide con la presentada en la sección anterior, seguramente por la publicación de artículos de ellas en revistas de otros epígrafes, principalmente el de Matemáticas.

Mathematics

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Proceedings of the American Mathematical Society	206	0,280	4
Communications in Algebra	199	0,283	3
Comptes Rendus de l'Academie des Sciences I. Mathematique	186	0,325	3
Journal of Mathematical Analysis and Applications	178	0,325	3
Journal of Algebra	158	0,422	2
Archiv der Mathematik	111	0,238	4
Nonlinear Analysis	108	0,330	3
Journal of Pure and Applied Algebra	94	0,378	3
Studia Mathematica	82	0,314	3
Journal of Differential Equations	76	0,687	1
Transactions of the American Mathematical Society	68	0,545	1
Manuscripta Mathematica	62	0,278	4
Bulletin of the Australian Mathematical Society	58	0,194	4
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	54	0,402	2
Journal of Approximation Theory	52	0,392	1
Mathematische Nachrichten	51	0,250	3
Acta Mathematica Hungarica	50	0,141	4
Israel Journal of Mathematics	49	0,352	2
The Journal of the London Mathematical Society	49	0,404	2
Pacific Journal of Mathematics	44	0,371	2
The Rocky Mountain Journal of Mathematics	42	0,174	4
Mathematische Zeitschrift	41	0,432	2
Discrete Mathematics	40	0,224	3
Topology and its Applications	40	0,252	4
Journal of Functional Analysis	39	0,785	1
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A. Mathematics	38	0,410	3
Glasgow Mathematical Journal	34	0,258	3
Mathematische Annalen	34	0,574	1
Universitatis Debreceniensis	32	0,088	4
Geometriae Dedicata	30	0,272	3

Tabla 6.6. "Matemáticas"

Cuartil	Nº artículos
1	16%
2	23%
3	36%
4	26%

Tabla 6.7. Distribución por cuartiles: Matemática

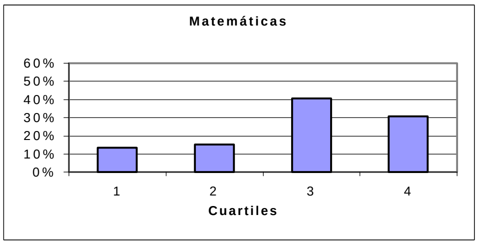


Gráfico 6.19. Distribución por cuartiles

Mathematics, applied

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Proceedings of the American Mathematical Society	206	0,280	4
Journal of Mathematical Analysis and Applications	178	0,325	3
Journal of Computational and Applied Mathematics	139	0,373	3
Nonlinear Analysis	108	0,330	4
Linear Algebra and its Applications	104	0,372	3
Fuzzy Sets and Systems	102	0,489	3
Journal of Pure and Applied Algebra	94	0,378	3
Applied Mathematics and Computation	62	0,241	4
Computers and Mathematics with Applications	51	0,296	4
Applied Mathematics Letters	47	0,338	3
Topology and its Applications	40	0,252	4
Internat. J. of Bifurcation and Chaos in Applied Sci. and Engineering	38	0,794	2
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A. Mathematics	38	0,410	3
Applied Numerical Mathematics	37	0,493	2
Numerical Algorithms	33	0,454	3
SIAM Journal on Mathematical Analysis	30	0,701	1

Tabla 6.8. "Matemática aplicada"

Cuartil	Nº artículos
1	2%
2	6%
3	56%
4	36%

Tabla 6.9. Distribución por cuartiles: Matemática Aplicada

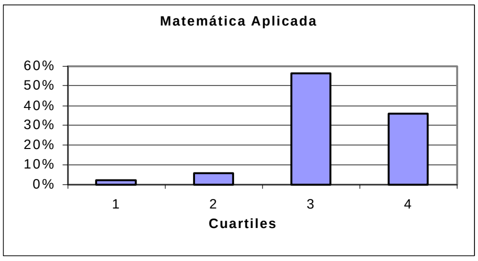


Gráfico 6.20. Distribución por cuartiles

Statistics & Probability

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Fuzzy Sets and Systems	102	0,489	3
Communications in Statistics. Theory and Methods	61	0,158	4
Statistics and Probability Letters	60	0,253	3
Journal of Statistical Planning and Inference	36	0,278	3

Tabla 6.10. "Estadística y probabilidad"

Cuartil	Nº artículos
1	0%
2	0%
3	76%
4	24%

Tabla 6.11 Distribución por cuartiles: Estadística y probablidad

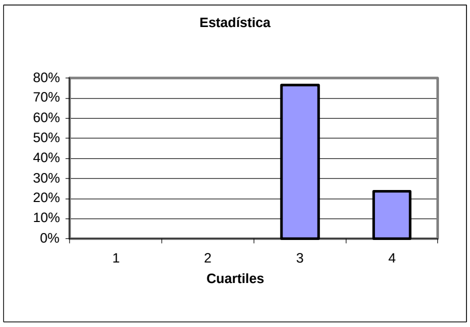


Gráfico 6.21: Distribución por cuartiles.

Astronomy & Astrophysics

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy	41	0,420	4

Tabla 6.12. "Astronomía y Astrofísica"

Physics

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Journal of Physics A. Mathematical and General	61	1,799	2

Tabla 6.13. "Física"

Physics, mathematical

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Journal of Physics A. Mathematical and General	61	1,799	2
Journal of Mathematical Physics	41	0,947	3

Tabla 6.14. "Física matemática"

Computer Science, Theory & Methods

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Fuzzy Sets and Systems	102	0,489	3
Theoretical Computer Science	30	0,394	3

Tabla 6.15. "Ciencias de la Computación, teoría y métodos"

Computer Science, Interdisciplinary Applications

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Computers and Mathematics with Applications	51	0,296	4
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	30	0,864	1

Tabla 6.16."Ciencias de la Computación, aplicaciones interdisciplinares"

Computer Science, Information Systems

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Information Processing Letters	32	0,269	4

Tabla 6.17. "Ciencias de la Computación, Sistemas de Información"

Mathematics, miscellaneous

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Mathematical Social Sciences	30	0,328	4

Tabla 6.18. “Matemáticas, miscelánea”

Engineering, mechanical

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	30	0,864	1

Tabla 6.19. “Ingeniería mecánica”

Mechanics

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	30	0,864	1

Tabla 6.20. “Mecánica”

Multidisciplinary Sciences

Revista	Nº art.	FI	Cuartil
International J. of Bifurcation and Chaos in Applied Scie. and Engineering	38	0,794	2

Tabla 6.21. “Ciencias multidisciplinares”

6.4 Revistas con mejor posición normalizada y número de documentos publicados en ellas

En la tabla 6.22 se muestran las cincuenta revistas con mayor número de documentos ordenadas por su posición normalizada e indicando el número de documentos publicados en cada una de ellas. En el apéndice se incluye una tabla similar de las cincuenta revistas con mejor posición normalizada independiente del número de documentos publicadas en ellas. Como era de esperar esta segunda tabla no contiene casi ninguna revista de las que figuran en 6.24 ya que el número de documentos españoles publicados en ellas es pequeño. Todo ello incide en el comentario ya hecho de que aún queda mucho por avanzar en cuanto al incremento de calidad de la producción española o al menos en cuanto a publicar en las revistas más prestigiosas.

Recordemos que la posición normalizada de las revistas nos permite comparar revistas de distintas disciplinas ISI, algo que el factor de impacto por sí sólo, no nos permite hacer.

Revista	Pos. Norm.	Nº art.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	0,91	30
Journal of Functional Analysis	0,88	39
Journal of Differential Equations	0,86	76
Journal of Physics. A. Mathematical and General	0,80	61
Transactions of the American Mathematical Society	0,79	68
Journal of Approximation Theory	0,78	52
Fuzzy Sets and Systems	0,77	102
Mathematische Annalen	0,77	34
Applied Numerical Mathematics	0,74	37
SIAM Journal on Mathematical Analysis	0,73	30
Mathematische Zeitschrift	0,71	41
Int. Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering	0,70	38
Israel Journal of Mathematics	0,68	49
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	0,67	54
Journal of Algebra	0,66	158
Journal of Pure and Applied Algebra	0,66	94
Journal of Mathematical Analysis and Applications	0,59	178
The Journal of the London Mathematical Society. Second Series	0,58	49
Pacific Journal of Mathematics	0,50	44
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics	0,50	38
Glasgow Mathematical Journal	0,47	34
Discrete Mathematics	0,45	40
Proceedings of the American Mathematical Society	0,43	206
Applied Mathematics Letters. An International Journal of Rapid Publication	0,43	47
Numerical Algorithms	0,41	33
Geometriae Dedicata	0,41	30
Journal of Mathematical Physics	0,40	41
Mathematische Nachrichten	0,39	51
Studia Mathematica	0,39	82
Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Serie I. Mathematique	0,37	186
Linear Algebra and its Applications	0,36	104
Communications in Algebra	0,35	199
Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications	0,34	108
Computers and Mathematics with Applications. An International Journal	0,34	51
Journal of Computational and Applied Mathematics	0,33	139
Topology and its Applications	0,32	40
Theoretical Computer Science	0,32	30
Journal of Statistical Planning and Inference	0,30	36
Statistics and Probability Letters	0,28	60
Information Processing Letters	0,23	32
Manuscripta Mathematica	0,22	62
Archiv der Mathematik. Archives of Mathematics. Archives Mathematiques	0,21	111
Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy	0,19	41
Applied Mathematics and Computation	0,18	62
Acta Mathematica Hungarica	0,17	50
Bulletin of the Australian Mathematical Society	0,16	58
The Rocky Mountain Journal of Mathematics	0,12	42
Mathematical Social Sciences	0,10	30
Universitatis Debreceniensis. Publicationes Mathematicae	0,10	32
Communications in Statistics. Theory and Methods	0,09	61

Tabla 6.22. Posición normalizada

6.5. Revistas con un mayor número de documentos publicados en ellas y su disciplina ISI, sin filtrado de áreas fronterizas

Tanto en la introducción del presente informe como en el apartado referente a la metodología, se explica que para obtener la base de datos en la que se ha basado el presente estudio se realizó un filtrado manual para eliminar artículos que se clasifican en áreas fronterizas de las matemáticas, que aunque la AMS las considera de producción matemática, muchos de sus artículos no se considerarían como tal por el colectivo matemático.

Estas áreas de difícil clasificación son: Física, Física Matemática, Física Nuclear, Física de Partículas, las relativas a Informática, Mecánica, Ingeniería Mecánica, y Astronomía y Astrofísica.

No obstante, con el fin de presentar los datos que resultarían sin haber procedido a dicho filtro, la tabla 6.23 muestra las cincuenta revistas donde habría mayor producción, la cantidad de artículos que contendrían y la disciplina ISI donde se clasificarían. Recordemos que la base de datos teniendo en cuenta todos estos artículos pertenecientes a áreas fronterizas con las matemáticas constaría de 7.419 artículos.

Revista	Nº art.	Disciplina
Journal of Physics A. Mathematical and General	263	Physics. Physics, mathematical
Proceedings of the American Mathematical Society	206	Mathematics. Mathematics, applied
Communications in Algebra	199	Mathematics
Comptes Rendus Acad. Sciences I. Mathematique	186	Mathematics
Physics Letters B	179	Physics
Journal of Mathematical Analysis and Applications	178	Mathematics. Mathematics, applied
Journal of Mathematical Physics	175	Physics, mathematical
Nuclear Physics B	160	Physics, nuclear. Physics, particles & fields
Journal of Algebra	158	Mathematics
Journal of Computational and Applied Mathematics	137	Mathematics, applied
Classical and Quantum Gravity	119	Physics
Physical Review D	115	Physics, particles & fields
Archiv der Mathematik	111	Mathematics
Nonlinear Analysis.Theory, Methods and Applications	107	Mathematics. Mathematics, applied
Physics Letters A	106	Physics
Linear Algebra and its Applications	104	Mathematics, applied
Fuzzy Sets and Systems	103	Computer Science, Theory & Methods. Mathematics, Applied. Statistics & Probability
Journal of Pure and Applied Algebra	93	Mathematics. Mathematics, applied
Studia Mathematica	81	Mathematics
Journal of Differential Equations	76	Mathematics
Transactions of the American Mathematical Society	68	Mathematics
Applied Mathematics and Computation	62	Mathematics, applied
Manuscripta Mathematica	62	Mathematics
Communications in Statistics. Theory and Methods	61	Statistics & probability
Statistics and Probability Letters	60	Statistics & probability
Bulletin of the Australian Mathematical Society	58	Mathematics
Computers and Mathematics with Applications	54	Computer Science, Interdisciplinary Applications. Mathematics, applied
Math. Proceed. of the Cambridge Philosoph. Society	54	Mathematics
International J. of Modern Physics A. Particles and Fields. Gravitation. Cosmology. Nuclear Physics	52	Physics, nuclear. Physics, particles & fields
Journal of Approximation Theory	52	Mathematics

Mathematische Nachrichten	51	Mathematics
Acta Mathematica Hungarica	50	Mathematics
The Journal of the London Mathematical Society	49	Mathematics
Israel Journal of Mathematics	47	Mathematics
Modern Physics Letters A. Particles and Fields, Gravitation, Cosmology, Nuclear Physics	47	Physics, mathematical. Physics, nuclear. Physics, particles & fields
Pacific Journal of Mathematics	44	Mathematics
International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering	42	Mathematics, applied. Multidisciplinary Sciences
Journal of Geometry and Physics	42	Mathematics, applied. Physics, mathematical
The Rocky Mountain Journal of Mathematics	42	Mathematics
Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy	41	Astronomy & Astrophysics
Mathematische Zeitschrift	41	Mathematics
Discrete Mathematics	40	Mathematics
Topology and its Applications	40	Mathematics. Mathematics, applied
Applied Mathematics Letters	39	Mathematics, applied
Journal of Functional Analysis	39	Mathematics
Applied Numerical Mathematics	37	Mathematics, applied
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A. Mathematics	37	Mathematics. Mathematics, applied
Journal of Statistical Planning and Inference	36	Statistics & probability
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	35	Computer Science, interdisciplinary applications. Engineering, mechanical. Mechanics
General Relativity and Gravitation	35	Physics

Tabla 6.23. Revistas con mayor producción y disciplina ISI

Como se observa, aparecen una gran cantidad de artículos en el área de Física. Precisamente, la constatación de este fenómeno y de que la gran mayoría de sus autores pertenecían a Departamentos de Física y no Matemáticas, fue lo que nos motivó a realizar el filtrado manual que se ha explicado en la introducción.

7. COLABORACIÓN EN LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

De nuevo, los datos que se ofrecen en este capítulo están basados en la base de 6.220 artículos de la base ISI española.

Colaboraciones entre autores – Índice de autoría

Índice de coautoría

El índice de coautoría es el número medio de autores que participan en un documento. Dicho índice, así como el número medio de autores españoles que participan en el documento, se muestran en la tabla 7.1. Observamos que como media, de los 2,16 autores que firman un artículo, 1,70 son españoles.

Nº medio de autores por artículo	2,16
Nº medio de autores españoles por artículo	1,70

Tabla 7.1. Índice de coautoría

Evolución del índice de coautoría

En la tabla 7.2 se muestra la evolución del índice de coautoría en la producción española durante la última década. Podemos apreciar un ligero pero continuado aumento de la colaboración en la investigación matemática. El número medio de autores por artículo ha crecido un 18,2% en los últimos diez años, pasando de 1,91 a 2,25 autores por documento.
Entre autores españoles exclusivamente, el aumento es algo menor, pero también se observa una tendencia creciente, habiendo pasado de 1,59 autores españoles por artículo en 1990 a 1,8 en 1999. Este incremento sostenido en la colaboración seguramente se debe a una mayor incorporación de nuestros investigadores a los foros internacionales y a la generalización del uso de Internet. Podemos afirmar que se está cambiando el modo de hacer matemáticas pasando de una individualización a un trabajo cada más de equipo.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	Incr
Nº medio autores por artículo	1,91	2,02	2,04	2,06	2,06	2,21	2,17	2,21	2,27	2,25	18,2%
Nº medio autores españoles /art	1,59	1,59	1,55	1,60	1,61	1,71	1,69	1,73	1,81	1,79	12,7%

Tabla 7.2. Evolución del índice de coautoría

Documentos con un único autor y su evolución

De los 6.220 artículos con los que se realiza el presente estudio, 1.506 de ellos han sido firmados por un único autor. En la tabla 7.3 aparece la evolución de este tipo de artículos.

Aunque el número absoluto de documentos realizados en solitario ha crecido en términos absolutos, pasando de 115 documentos en 1990 a 196 en 1999, teniendo en cuenta el aumento de la producción, el porcentaje de documentos realizados por un único autor ha disminuido a lo largo de la década, pasando de significar el 35% de la producción en 1990 a ser sólo el 20% en 1999.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	Incr
Nº art. con un único autor	115	110	128	144	138	132	152	204	187	196	70,4%

Tabla 7.3. Evolución en la producción con un único autor

Colaboraciones entre instituciones – Nº medio por artículo

Nº medio de instituciones por artículo

En la tabla 7.4 se muestra el número medio de instituciones que participan en un documento. De la media de 1,55 instituciones por artículo, 1,19 son españolas.

Nº medio de instituciones por artículo	1,55
Nº medio de instituciones españoles por artículo	1,19

Tabla 7.4. Nº medio de instituciones por artículo

Evolución del número medio de instituciones por artículo

En la tabla 7.5 se muestra la evolución del número medio de instituciones que participan en un documento durante la última década.
Vuelve a observarse un continuado aumento de la colaboración en la investigación matemática. El número medio de instituciones por artículo ha crecido un 15,7% en los últimos diez años, pasando de ser 1,36 en 1990 a 1,58 en 1999.
Igualmente, la colaboración entre instituciones españolas ha crecido durante la década.

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	Incr
Nº medio instituciones / artículo	1,36	1,52	1,50	1,53	1,54	1,54	1,54	1,61	1,58	1,58	15,7%
Nº medio instituciones esp /art	1,11	1,15	1,13	1,18	1,18	1,18	1,18	1,22	1,22	1,22	10,3%

Tabla 7.5. Evolución del nº medio de instituciones por artículo

Tasas de colaboración entre instituciones

Tasas de colaboración nacional e internacional en la producción matemática de España

La tabla 7.6 recoge los datos referentes a la colaboración entre las instituciones. Podemos observar que la mayoría de la investigación matemática, exactamente un 55,9%, se realiza sin colaboración entre distintas instituciones.
No debemos olvidar que los documentos firmados por varios autores con la misma dirección no son considerados como colaboración institucional. Así, si un artículo está escrito por dos profesores del mismo Departamento, no se considera como colaboración.

	Nº art.	%
Sin colaboración	3480	55,9%
Colaboración nacional	1064	17,1%
Colaboración nacional intramuros	*235*	*3,8%*
Colaboración nacional extramuros	*875*	*14,1%*
Colaboración internacional	1862	29,9%
Total real	6220	

Tabla 7.6. Tasas de colaboración

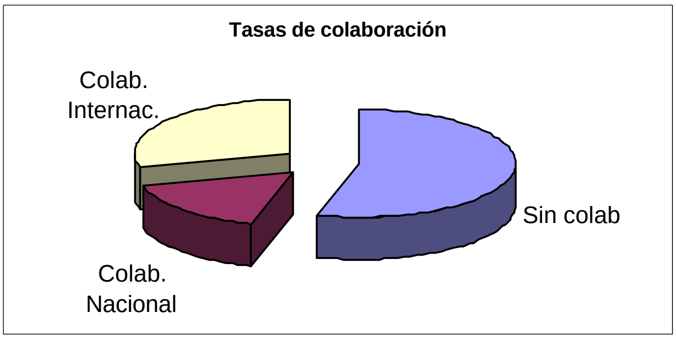


Gráfico 7.1. Tipos de colaboración

Evolución anual de la colaboración matemática

La tabla 7.7 muestra la evolución anual de la colaboración en la última década y los incrementos que han experimentado los distintos tipos de colaboración.

Se observa una tendencia a aumentar la colaboración, habiéndose incrementado las tasas de colaboración tanto nacional como internacional muy por encima de la tasa de los trabajos sin colaboración.

	90-91	**92-93**	**94-95**	**96-97**	**98-99**	**Total**	**Incr**
Sin colab.	443	567	651	814	1005	3480	127%
Colab. nacional	91	136	195	269	373	1064	310%
Col. intramuros	*17*	*25*	*43*	*63*	*87*	*235*	*412%*
Col. extramuros	*75*	*118*	*159*	*222*	*301*	*875*	*301%*
Colab. intern.	196	292	358	456	560	1862	186%
Total real	718	968	1168	1500	1866	6220	

Nota: Incrementos calculados respecto al primer bienio o, en su defecto, respecto al primer bienio con publicación

Tabla 7.7. Evolución de la colaboración matemática

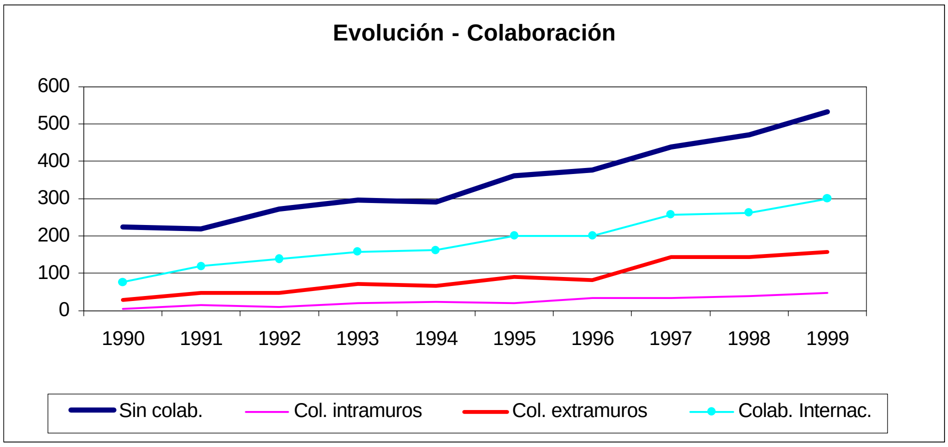


Gráfico 7.2. Evolución de la colaboración matemática

Colaboración entre Comunidades Autónomas

En la tabla 7.8 se muestra la colaboración entre las distintas comunidades autónomas. Cada fila corresponde a una Comunidad y contiene los porcentajes (redondeados) que la

colaboración con la CCAA de la columna correspondiente supone respecto del total de la colaboración de la comunidad de la fila. Por consiguiente, la tabla no es simétrica sino que hay que leerla por filas.
En general, la tabla indica que el patrón geográfico juega un papel importante en la colaboración. Más que por facilidad para la comunicación esto se debe seguramente a que los equipos investigadores de una Comunidad se han formado a partir de un equipo "madre" en una Comunidad vecina. Por ejemplo, se puede observar que las mayores proporciones de colaboración se dan entre Baleares y Cataluña, La Rioja y Aragón, y Navarra y Aragón. La comunidad de Madrid es la colabora con mayor número de CCAA.

	And	Arag	Ast	Bale	Can	Cant	CL	Cat	Val	Ext	Gal	Rioj	Mad	Mur	Nav	PV
Andalucía		6	1		1		2	5	10	6	9		39	16		6
Aragón	6		9		6	1	2	3	5		2	6	16		31	13
Asturias	3	27				27	3	19			14		8			
Baleares								78	22							
Canarias	2	11				8	6	2	2			2	62			8
Cantabria		1	14		7		29		7	4			26		7	3
Cast-León	3	3	2		7	33		3	15	5			25			5
Cataluña	6	3	7	7	1		2		3		10		54	2	1	6
Valencia	16	9		3	1	7	13	4		3	3		13	6	17	4
Extremad.	35					15	15		10				15	10		
Galicia	13	3	7					13	3				40	16	1	4
La Rioja		64			9								9		18	
Madrid	16	6	1		14	6	5	20	3	1	11	0		2	0	14
Murcia	39							4	9	4	26		11			7
Navarra		60				9		2	21	0	2	3	2			2
País Vasco	8	16			6	2	3	7	3	0	3		45	3	1	

Tabla 7.8. Colaboración entre comunidades autónomas (porcentajes)

Colaboración internacional

Producción matemática española en colaboración internacional por países colaboradores

Los patrones de colaboración internacional en grandes áreas geográficas se muestran en la tabla 7.9 Los porcentajes se refieren al total de colaboración internacional.

La comparación de los ejes de colaboración permite observar que los investigadores españoles colaboran sobre todo con la Unión Europea, un 16,1% del total de documentos se ha escrito en colaboración con la UE, y un 9% con EE.UU. y Canadá. Con los países europeos no pertenecientes a la UE es con quien menos se colabora en la investigación matemática.

	Nº art.	**%**
Unión Europea	1003	53,9%
Resto de Europa	207	11,1%
EE.UU. y Canadá	562	30,2%
Latinoamérica	184	9,9%
Otros países	262	14,1%
Total real	1862	

Tabla 7.9. Colaboración internacional

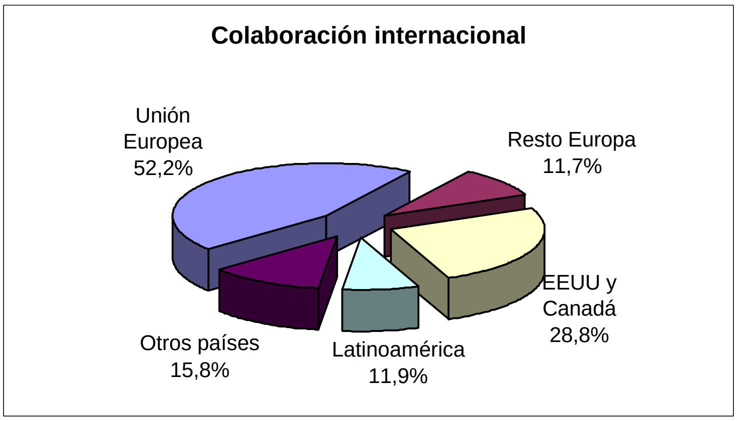


Gráfico 7.3. Colaboración internacional

En las tablas 7.10, 7.11, 7.12, 7.13 y 7.14 se estudian las colaboraciones internacionales. Dentro de la colaboración con la Unión Europea, el país con el que más se colabora es Francia (un 27,8% de la colaboración con la UE), seguido de Gran Bretaña (14,3%) y de Italia (13,9%). Es destacable la colaboración con Estados Unidos, que alcanza el 8% del total de documentos. Entre los países latinoamericanos, Brasil es el país con el que más colaboraciones realiza España (58 documentos), seguido por Argentina (42 documentos), y México (38 documentos). La colaboración con los países del sudeste asiático es escasa.

Países de la Unión Europea	**Nº art.**
Francia	279
Gran Bretaña	143
Italia	139
Alemania	135
Bélgica	115
Holanda	61
Portugal	31
Suecia	27
Finlandia	25
Austria	20
Irlanda	13
Grecia	9
Dinamarca	6
Total	1003

Tabla 7.10. Colaboración con la UE

EEUU y Canadá	**Nº art.**
EEUU	507
Canadá	55
Total	562

Tabla 7.11. Colaboración con EEUU y Canadá

Resto de Europa	**Nº art.**
Polonia	61
Rumania	33
Noruega	30
Croacia	19
Bulgaria	16
República Checa	16
Hungría	10
Ucrania	7
Eslovaquia	4
Suiza	4
Uzbekistan	3
Bielorusia	2
Estonia	1
Yugoslavia	1
Total	207

Tabla 7.12. Colaboración con resto de Europa

Latinoamérica	**Nº art.**
Brasil	58
Argentina	42
México	38
Venezuela	15
Chile	13
Uruguay	10
Cuba	5
Costa Rica	3
Total	184

Tabla 7.13. Colaboración con Latinoamérica

Otros países	**Nº art.**
Rusia	73
Israel	36
República Popular China	33
Australia	23
Japón	17
Nueva Zelanda	12
Vietnam	11
Turquía	10
Marruecos	8
India	7
República de Corea	7
Sudáfrica	7
Georgia	4
Armenia	2
Líbano	2
Singapur	2
Taiwan	2
USSR	2
Zimbawue	2
Egipto	1
Irak	1
Total	262

Tabla 7.14. Colaboración con resto del mundo

Patrón de colaboración por centro de investigación

La tabla 7.15 estudia los patrones de colaboración en las universidades y en el Centro de Física Miguel A. Catalán (que en realidad corresponde a los matemáticos del Instituto de Matemáticas y Física Fundamental), ordenados de mayor a menor producción de artículos de matemáticas. Se marcan en negrita porcentajes mayores que el porcentaje medio de la categoría.

La Universidades de Málaga, Extremadura y Sevilla son las universidades con una mayor tasa de “no colaboración”, ambas muy por encima de la tasa nacional, seguidas por la Universidad de La Rioja y Granada. La Universidad de Burgos no resulta representativa por tener un único documento. A su vez, las universidades con menor tasa de “no colaboración” son las de Alcalá de Henares y La Coruña. La Universidad de Navarra no resulta representativa por tener un único documento.

Destacan por sus altas tasas de colaboración intramuros (colaboración interdepartamental) la Universidad Politécnica de Cataluña, la Universidad de Valladolid y la Universidad de Cantabria. Por otra parte, las universidades de Las Palmas, Córdoba, Lleida y Alcalá de Henares, son las que presentan una mayor tasa de colaboración extramuros (interfacultativa). Casi todas estas universidades son de escasa producción. Entre las de mayor producción, tienen mayor tasa de colaboración extramuros la Universidad Politécnica de Madrid y la Universidad de Cantabria.

En la colaboración internacional, destacan por sus altas tasas la Universidad Autónoma de Madrid, la Universidad Autónoma de Barcelona, la Universidad Carlos III de Madrid y la Universidad de las Islas Baleares. Las universidades de Pompeu Fabra y de Lleida tienen unas altas tasas de colaboración internacional a pesar de su escasa producción. La Universidad Complutense de Madrid que es la universidad con una mayor producción, presenta tasas por debajo de la media nacional tanto en “no colaboración” como en los dos tipos de colaboración nacional, pero sí que presenta un alto nivel de colaboración internacional.

Centro	**Sin colab.**	**Intramuros**	**Extramuros**	**Internacional**
Universidad Complutense de Madrid	43,0%	2,5%	9,9%	**36,1%**
Universidad de Granada	**63,9%**	**4,9%**	6,6%	19,3%
Universidad Politécnica de Cataluña	51,4%	**7,0%**	10,2%	27,1%
Universidad de Zaragoza	50,4%	**5,1%**	**17,2%**	25,4%
Universidad de Barcelona	45,4%	0,5%	10,4%	35,3%
Universidad Autónoma de Barcelona	40,7%	0,5%	**15,0%**	**39,9%**
Universidad de Sevilla	**66,3%**	5,7%	6,6%	18,8%
Universidad de Valencia	52,7%	1,0%	13,4%	26,2%
Universidad Autónoma de Madrid	43,8%	0,0%	7,4%	**44,1%**
Universidad de Santiago de Compostela	50,3%	**5,2%**	11,5%	27,3%
Universidad del País Vasco	50,0%	3,2%	**15,1%**	23,4%
Universidad Politécnica de Madrid	31,0%	**4,7%**	**26,6%**	28,5%
Universidad Politécnica de Valencia	55,5%	**5,5%**	11,8%	23,6%
Universidad de Valladolid	**56,1%**	**5,9%**	6,7%	25,3%
Universidad de La Laguna	46,8%	**4,1%**	12,7%	**30,0%**
Universidad de Cantabria	37,1%	**5,9%**	**22,0%**	**30,7%**
Universidad de Murcia	52,9%	1,1%	9,8%	27,0%
Universidad de Málaga	**69,3%**	**3,9%**	6,5%	14,4%
Universidad de Alicante	53,3%	3,7%	6,5%	29,0%
Universidad de Extremadura	**66,7%**	2,0%	13,1%	16,2%
Universidad de Oviedo	52,8%	0,0%	**15,1%**	22,6%

Universidad Carlos III de Madrid	31,2%	1,1%	**20,4%**	**39,8%**
Universidad de Salamanca	43,2%	3,7%	13,6%	**35,8%**
UNED	39,1%	0,0%	**18,5%**	26,1%
Universidad de Vigo	31,3%	**4,5%**	**38,8%**	23,9%
Universidad Pública de Navarra	33,7%	3,5%	12,8%	18,6%
Universidad de Almería	38,3%	0,0%	**25,5%**	**36,2%**
Universidad de las Islas Baleares	44,2%	0,0%	14,0%	**39,5%**
Universidad Jaume I	45,7%	0,0%	**17,4%**	23,9%
Universidad de Córdoba	36,4%	3,0%	**36,4%**	15,2%
Universidad de La Rioja	**65,4%**	0,0%	**19,2%**	3,8%
Universidad de La Coruña	20,0%	0,0%	**24,0%**	**32,0%**
Universidad de Alcalá de Henares	16,7%	0,0%	**33,3%**	27,8%
Universidad Pompeu Fabra	28,6%	0,0%	**21,4%**	**50,0%**
Universidad de Cádiz	44,4%	0,0%	**16,7%**	5,6%
Universidad de Lleida	33,3%	0,0%	**33,3%**	**44,4%**
Universidad de Jaén	28,6%	0,0%	**42,9%**	0,0%
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria	40,0%	0,0%	**60,0%**	0,0%
Universidad de Burgos	100,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Universidad de Navarra	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
Centro de Física Miguel A. Catalán	18,3%		**43,0%**	32,3%
España	**55,9%**	**3,8%**	**14,1%**	**29,9%**

Tabla 7.15. Patrón de colaboración por centro de investigación

<u>Patrón de colaboración por clasificación MSC</u>

Patrón de colaboración en los 20 temas MSC con mayor producción

La tabla 7.16 estudia los patrones de colaboración de los veinte temas de la clasificación MSC con una mayor producción durante la última década. Resaltamos en negrita los porcentajes mayores que la media.

Destacan las altas tasas de colaboración internacional que muestran los temas “16: Anillos y álgebras asociativos” y “35: Ecuaciones en derivadas parciales”.
Por el contrario los temas “13: Anillos conmutativos y álgebras”, “65: Análisis numérico” y “93: Teorías del control y sistema” son los que presentan una mayor tasa de “no colaboración”, todas por encima del 60%.
“93: Teorías del control y sistema” también presenta una alta colaboración intramuros, al igual que lo hace la “76: Mecánica de fluidos”.
Por último, “53: Geometría diferencial”, “58: Análisis global, análisis en variedades” y “54: Topología general” son los que más se trabajan en colaboración extramuros.

MSC	Tema	Sin colab.	Intramuros	Extramuros	Internacional
46	Análisis funcional	**57,0%**	1,4%	13,3%	28,3%
65	Análisis numérico	**66,1%**	3,3%	9,3%	21,3%
35	Ecuaciones en derivadas parciales	49,9%	0,8%	9,4%	**39,9%**
62	Estadística	**56,2%**	2,6%	**19,3%**	21,9%
58	Análisis global, análisis en variedades	37,8%	3,6%	**24,8%**	**33,8%**
90	Economía, investigación operativa, programación, juegos	54,0%	**4,3%**	12,8%	29,0%
53	Geometría diferencial	52,9%	2,4%	**25,3%**	19,4%
68	Ciencias de la computación	46,6%	3,1%	12,4%	**37,8%**
34	Ecuaciones diferenciales ordinarias	**59,8%**	**4,8%**	**14,8%**	20,6%
20	Teoría de grupos y generalizaciones	**60,9%**	0,5%	**16,3%**	22,3%
16	Anillos y álgebras asociativos	45,9%	2,9%	9,4%	**41,8%**

14	Geometría algebraica	**58,6%**	3,0%	6,5%	**32,0%**
42	Análisis de Fourier	44,4%	**4,3%**	**19,1%**	**32,1%**
93	Teorías del control y sistema	**62,1%**	**9,3%**	6,2%	22,4%
60	Teoría de la probabilidad y procesos estocásticos	48,1%	2,5%	12,0%	**37,3%**
76	Mecánica de fluidos	50,7%	**7,6%**	4,9%	**36,8%**
17	Anillos y álgebras no asociativos	**56,8%**	1,4%	11,5%	**30,2%**
47	Teoría de operadores	**60,3%**	1,7%	**14,9%**	23,1%
54	Topología general	42,9%	**4,5%**	**24,1%**	28,6%
13	Anillos conmutativos y álgebras	**68,9%**	**4,9%**	2,9%	23,3%
	España	**55,9%**	**3,8%**	**14,1%**	**29,9%**

Tabla 7.16. Patrón de colaboración en los temas con mayor producción

8. CONCLUSIONES

- Tanto en el mundo como en los ámbitos europeo y español, la década de los 90 se caracteriza por un aumento de la producción matemática recogida en la base de datos MathSci. La producción española crece a un ritmo mayor que la del resto del mundo, habiendo pasado de ser el 1,7% de la mundial en el año 1990 al 3,2% en el año 1999. Esto también ocurre si comparamos en el seno de la UE, donde la producción española durante la última década ha pasado de suponer el 8,9% en 1990 al 13,0% en 1999 (cf. pag. 20).

- Los códigos "Trasformaciones integrales, cálculo operacional" (no. 44), "Análisis funcional" (no. 46), Teoría de conjuntos (no. 04), "Geometría diferencial" (no. 53) y "Análisis de Fourier" (no. 42), tienen en España un porcentaje de producción respecto a la producción total española muy por encima de la mundial (cf. pag. 21).

- También en la producción ISI la producción española ha crecido a un ritmo mucho más rápido que la producción mundial. La aportación española en esta base de datos ha pasado de representar el 1,7% de la producción mundial en 1990 (con 330 artículos) al 3,9% en 1999 (con 983 artículos), y ha continuado creciendo hasta situarse en el 4,18% según los últimos datos del ISI del 2001. Simplificando, cabe decir que la producción española se ha incrementado en un 300%, mientras que la producción mundial lo ha hecho en menos de la mitad (pags. 24 y ss).

- Comparando con otras disciplinas científicas, las Matemáticas ocupan en España el tercer lugar en cuanto a lo que supone su aportación dentro de la producción mundial (el 4,18%), por detrás de Astrofísica y Ciencias Agrarias. Sin embargo la media de citas por artículo está un 16% por debajo de la media mundial (pag. 27).

- Las Comunidades Autónomas con mayores cifras absolutas de producción matemática son Madrid, Cataluña y Andalucía superando todas ellas el millar de documentos ISI en la década y sumando entre las tres el 60% de la producción total española. Esto pone de manifiesto la gran concentración de la investigación existente en Madrid y Cataluña. Sin embargo, relativizando la producción por el número de profesores, las Comunidades con mejor ratio de artículos por profesor resultan ser Aragón, Cantabria y Cataluña, por este orden, (pag. 29).

- La media de artículos ISI por profesor está en 2,22, y contando la totalidad de documentos MathSci resulta una productividad de 3,78 artículos por profesor en la década. Haciendo una pequeña prospección de estos datos podemos aventurar que a lo sumo 2/5 del total de 3.124 profesores universitarios de Matemáticas están activos en lo que respecta a publicar asiduamente (cf. pag. 29).

- Por sectores institucionales la Universidad es el sector más productivo participando en el 98,6% de los documentos, mientras que el CSIC lo hace en el 2,3%. Por su parte el sector privado está totalmente ausente de la producción matemática española, lo que pone de manifiesto el poco a nulo interés de la empresa privada en la investigación y la inexistencia de matemáticos en labores de I+D en el ámbito empresarial (pag. 32).

- Por universidades, la Universidad Complutense de Madrid es la que realiza una mayor aportación a la investigación matemática (el 11,4% de la producción total), seguida a una cierta distancia por las Universidades de Granada y Politécnica de Cataluña (8,8% y 7,1% respectivamente). Las Universidades de Burgos, Navarra, Las Palmas, Jaén y Lleida son las Universidades de menor producción matemática, con un porcentaje sobre el total menor del 0,15%. Relativizando la producción por el número de profesores en cada Universidad, las universidades con mayor ratio de documentos por profesor son la Universidad de Barcelona, la Universidad Autónoma de Madrid y la Autónoma de Barcelona (pag. 34).

- En el CSIC, el 80% de toda la producción matemática está concentrada en el Centro de Física Miguel A. Catalán (CFMAC), integrado sólo por tres investigadores. Llama la atención la carencia de un instituto propio de Matemáticas en el CSIC, situación sin paralelo en los paises de la UE (cf. pag. 36).

- Más del 50% de la investigación española se centra en nueve de los códigos de la MSC, mientras que casi el 90% se centra en 35 de ellos. Los tres códigos más productivos en en cuanto a número absoluto de documentos son Análisis Funcional (no. 46), Ecuaciones en derivadas parciales (no. 35) y Análisis numérico (no. 65). Los incrementos mayores en producción a lo largo de la década se han dado en Estadística (no. 62), Análisis Numérico (no. 65), Geometría Diferencial (no. 53) y Ciencias de la Computación (no. 68) (cf. pag. 38).

- Asignando los códigos MSC a Áreas de Conocimiento "Matemática Aplicada" resulta ser el área más productiva, con el 43,8% de la producción total. También es el área que con mayor número de profesores adscritos a la misma, por lo que teniendo en cuenta la ratio de nº de artículos por profesor, Geometría y Topología resulta ser el área más productiva, seguida a cierta distancia por Álgebra (pag. 43).

- Analizando la distribución de la investigación española por cuartiles dentro de la clasificación del ISI por factor de impacto se observa que está desplazada hacia el tercer cuartil de modo mucho más acusado que la distribución mundial, en detrimento del número de trabajos colocados en el primer cuartil. Los porcentajes en el segundo y cuarto cuartil son similares en España y el resto del mundo. Aproximadamente el 39% de los artículos se publican en revistas con un factor de impacto por encima de la media. A nivel mundial este porcentaje alcanza el 44% (pags. 46 y ss.). Además la distribución por cuartiles no ha variado sensiblemente a lo largo de la década (cf. pags. 46 y ss.). Sería conveniente, pues, orientar las publicaciones hacia revistas más valoradas internacionalmente, aunque ello suponga someterse a procesos de valoración más rigurosos.

- Este mismo escoramiento hacia el tercer cuartil se aprecia en la mayoría de los centros, aunque en diferente medida. Destacan por la calidad de su investigación (porcentaje de trabajos en el primer cuartil) la Universidad Autónoma de Madrid, las Universidades de Valladolid, Salamanca y Barcelona (cf. pags. 48 y 49).

- Por Áreas de Conocimiento, Matemática Aplicada y Geometría y Topología son las que tienen un tanto por ciento mayor de publicaciones en los cuartiles superiores, mientras que Álgebra y Cc. de la Computación e Inteligencia Artificial están muy escoradas hacia el tercer cuartil (cf. pags. 50 y ss.).

- En lo que respecta a los patrones de colaboración podemos decir que cada vez es mayor la proporción de trabajos firmados por más de un autor. Parece razonable suponer que la comunicación electrónica ha influido sensiblemente en este fenómeno que está transformando las formas de colaboración en la escritura de trabajos de Matemáticas. No obstante todavía se aprecia una fuerte incidencia del patrón geográfico en la colaboración entre las distintas CCAA. Por lo que respecta a colaboración internacional destaca la colaboración con Estados Unidos y con la Unión Europea, siendo dentro de ésta Francia el país con mayor índice de cooperación (cf. pags. 58 y ss.).

9. APÉNDICE

<u>Clasificación MSC 2000</u>

00	General
01	History
03	Mathematical logic and foundations
04	Set theory
05	Combinatorics
06	Order, lattices, ordered algebraic structures
08	General mathematical systems
11	Number theory
12	Field theory and polynomials
13	Commutative rings and algebras
14	Algebraic geometry
15	Linear and multilinear algebra; matrix theory
16	Associative rings and algebras
17	Nonassociative rings and algebras
18	Category theory, homological algebra
19	K-theory
20	Group theory and generalizations
22	Topological groups, Lie algebras
26	Real functions
28	Measure and integration
30	Functions of a complex variable
31	Potential theory
32	Several complex variables and analytic spaces
33	Special functions
34	Ordinary differential equations
35	Partial differential equations
37 *	*Dynamical systems and ergodic theory*
39	Finite differences and functional equations
40	Sequences, series, summability
41	Approximation and expansion
42	Fourier analysis
43	Abstract harmonic analysis
44	Integral transforms, operational calculus
45	Integral equations
46	Functional analysis
47	Operator theory
49	Calculus of variations and optimal control; optimization
51	Geometry
52	Convex sets and related geometric topics
53	Differential geometry
54	General topology
55	Algebraic topology
57	Manifolds and cell complexes
58	Global analysis, analysis on manifolds
60	Probability theory and stochastic processes
62	Statistics
65	Numerical analysis
68	Computer science
70	Mechanics of particles and systems
73	Mechanics of solids
74 *	*Mechanics of deformable solids*
76	Fluid mechanics
78	Optics, electromagnetic theory
80	Classical thermodynamics, heat transfer
81	Quantum theory
82	Statistical mechanics, structure of matter
83	Relativity and gravitational theory
85	Astronomy and astrophysics
86	Geophysics
90	Economics, operations research, programming, games
91 *	*Game theory, economics, social and behavioral sciences*
92	Biology and behavioral sciences
93	Systems theory, control
94	Information and communication, circuits

* Proceden de MSC 2000

<u>Revistas con un mayor número de documentos publicados en ellas y su disciplina ISI</u>

En la tabla aparecen las cincuenta revistas donde más han publicado los autores españoles y el número de documentos publicados en cada una de ellas. Junto a estos datos aparece la disciplina o disciplinas ISI en la que se clasifica la revista.

Revista	Nº art.	Disciplina
Proceedings of the American Mathematical Society	**206**	Mathematics. Mathematics, applied
Communications in Algebra	**199**	Mathematics
C. R. Academie des Sciences I. Mathematique	**186**	Mathematics
Journal of Mathematical Analysis and Applications	**178**	Mathematics. Mathematics, applied
Journal of Algebra	**158**	Mathematics
Journal of Computational and Applied Mathematics	**139**	Mathematics, applied
Archiv der Mathematik	**111**	Mathematics
Nonlinear Analysis	**108**	Mathematics. Mathematics, applied
Linear Algebra and its Applications	**104**	Mathematics, applied
Fuzzy Sets and Systems	**102**	Computer Science, Theory & Methods. Mathematics, applied. Statistics & Probability
Journal of Pure and Applied Algebra	**94**	Mathematics. Mathematics, applied
Studia Mathematica	**82**	Mathematics
Journal of Differential Equations	**76**	Mathematics
Transactions of the American Mathematical Society	**68**	Mathematics
Applied Mathematics and Computation	**62**	Mathematics, applied
Manuscripta Mathematica	**62**	Mathematics
Communications in Statistics. Theory and Methods	**61**	Statistics & Probability
Journal of Physics. A. Mathematical and General	**61**	Physics. Physics, mathematical
Statistics and Probability Letters	**60**	Statistics & Probability
Bulletin of the Australian Mathematical Society	**58**	Mathematics
Math. Proceed.. Cambridge Philosophical Society	**54**	Mathematics
Journal of Approximation Theory	**52**	Mathematics
Computers and Mathematics with Applications	**51**	Computer Science, Interdisciplinary Applications. Mathematics, applied
Mathematische Nachrichten	**51**	Mathematics
Acta Mathematica Hungarica	**50**	Mathematics
Israel Journal of Mathematics	**49**	Mathematics
The Journal of the London Mathematical Society.	**49**	Mathematics
Applied Mathematics Letters	**47**	Mathematics, applied
Pacific Journal of Mathematics	**44**	Mathematics
The Rocky Mountain Journal of Mathematics	**42**	Mathematics
Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy	**41**	Astronomy & Astrophysics
Journal of Mathematical Physics	**41**	Physics, mathematical
Mathematische Zeitschrift	**41**	Mathematics
Discrete Mathematics	**40**	Mathematics
Topology and its Applications	**40**	Mathematics. Mathematics, applied
Journal of Functional Analysis	**39**	Mathematics
Inter. J. of Bifurcat. and Chaos in App. Sci. and Engin	**38**	Mathematics, applied. Multidisciplinary Sciences
Proc. Royal Soc. of Edinburgh. Sect. A. Mathematics	**38**	Mathematics. Mathematics, applied
Applied Numerical Mathematics	**37**	Mathematics, applied
Journal of Statistical Planning and Inference	**36**	Statistics & Probability
Glasgow Mathematical Journal	**34**	Mathematics
Mathematische Annalen	**34**	Mathematics
Numerical Algorithms	**33**	Mathematics, applied
Information Processing Letters	**32**	Computer Science, Information Systems
Universitatis Debreceniensis	**32**	Mathematics
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.	**30**	Computer Science, Interdisciplinary Applications. Engineering, Mechanical. Mechanics
Geometriae Dedicata	**30**	Mathematics
Mathematical Social Sciences	**30**	Mathematics, miscellaneous
SIAM Journal on Mathematical Analysis	**30**	Mathematics, applied
Theoretical Computer Science	**30**	Computer Science, Theory & Methods

Revistas con mejor posición normalizada y nº de documentos publicados en ellas

En la tabla se muestran las cincuenta revistas con mejor posición normalizada, indicando los documentos publicados en cada una de ellas. La posición normalizada de las revistas nos permite comparar revistas de distintas disciplinas ISI, algo que el factor de impacto no nos permite hacer.

Revista	Pos. Norm.	Nº art.
Annals of Mathematics. Second Series	0,99	3
Chaos. An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science	0,99	4
Memoirs of the American Mathematical Society	0,99	2
SIAM Journal on Optimization	0,99	4
IEEE Transactions on Image Processing	0,99	2
Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Methodological	0,98	6
Operations Research	0,98	2
Acta Mathematica	0,98	3
Communications on Pure and Applied Mathematics	0,97	7
Journal of the American Mathematical Society	0,97	3
Econometrica. Journal of the Econometric Society	0,96	6
Mathematical Programming	0,96	7
American Mathematical Society. Bulletin. New Series	0,96	1
Biometrics. Journal of the International Biometric Society	0,96	1
Inventiones Mathematicae	0,95	8
Journal of the ACM	0,95	2
IEEE. Transactions on Information Theory	0,95	10
Constructive Approximation	0,94	11
International Journal for Numerical Methods in Engineering	0,94	19
Journal of Nonlinear Science	0,94	5
Mathematics of Operations Research	0,94	4
Numerical Linear Algebra with Applications	0,94	4
Journal of the American Statistical Association	0,94	14
SIAM Journal on Control and Optimization	0,94	15
Journal of Algebraic Combinatorics. An International Journal	0,93	1
Biometrika	0,93	7
Geometric and Functional Analysis	0,92	1
Artificial Intelligence	0,92	4
Advances in Mathematics	0,92	5
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering	0,91	30
Naval Research Logistics. An International Journal	0,91	6
The Annals of Statistics	0,91	15
SIAM Journal on Scientific Computing	0,91	12
Duke Mathematical Journal	0,90	19
Applied and Computational Harmonic Analysis	0,90	1
Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. Neuvieme Serie	0,90	20
IEEE. Transactions on Software Engineering	0,90	1
Computer Physics Communications	0,89	6
Computational Geometry. Theory and Applications	0,89	4
SIAM Journal on Numerical Analysis	0,88	28
Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. Quatrieme Serie	0,88	7
Journal of Global Optimization	0,88	1
Inverse Problems	0,88	11
Archive for Rational Mechanics and Analysis	0,88	20
Journal of Functional Analysis	0,88	39
SIAM Review	0,87	8
Journal of Differential Geometry	0,87	6
Journal of Computational Physics	0,87	19
Journal of Differential Equations	0,86	76
Commentarii Mathematici Helvetici	0,86	14

The Importance of Mathematics in the development of Science and Technology

by Juan Luis Vázquez
Departamento de Matemáticas
Univ. Autónoma de Madrid

Do not worry too much about what is Mathematics
Before you try your luck with them. Then you'll see.

Abstract

Mathematicians often say that the essence of Mathematics lies in the beauty of numbers, figures and relations, and there is truth in that. But the driving force of mathematical innovation in the last centuries has been the desire to understand how Nature works. This aspect often goes unmentioned.

Together with the experimental method, Mathematics forms the conceptual scheme on which modern science is based and which supports technology, with close interactions among them. Upon these bases the Industrial Society was born some centuries ago, and the new Information Society is built in the present along the same lines.

In the article we give a brief outline of this scientific connection and how it came to work and the heroes that made it what it is, a view to the future, and a short comment on Mathematics in Spain.

1 Introduction. Essence and role of Mathematics

Mathematics is an autonomous intellectual discipline, one of the clearest exponents of the creative power of the human mind. On the other hand, it plays a fundamental role in modern Science, has a strong influence on it and it has been influenced by it in an essential way. Here are, briefly presented, two conceptions that symbolize different ways of seeing the great edifice that is present-day Mathematics. These options are reflected in the denominations of Pure and Applied Mathematics. But then, are there two different Mathematics? and, if this true, can they healthily co-exist and interact, or do they actually exist separated from, even hostile to each other? In the present article we will see that, today as in the past, both views of Mathematics are faces of the same coin, looking at times so different, at times so similar.

A first dimension of Mathematics is in fact the **pure** aspect, Mathematics as an art in its own right, a game that is played in our minds. Indeed, Mathematics is an art that expresses beauty in the form of axioms, theorems and logical or numerical relations; it attracts the researcher precisely because of its logical perfection, by being one of the most compelling examples of the human capacity for reasoning and analysis, by imposing order and harmony where formerly we only saw disorder and chaos. This is the dimension which lies closest to the researcher and, as every pure form of art, it has a fascination that explains why professionals devote an enormous and quite exclusive part of their lives to it. It is natural for professional mathematicians to tend to see their science from the point of view of the art in itself, with its concepts, conjectures, results and methods of proof, with its time-honored areas: arithmetic, algebra, geometry and analysis, and the new sprouts: statistics, calculus of probabilities, mathematical logic, computation,... and above all, with its perfect logical deductions. Great scholars, from Pythagoras and Plato to Gauss, have even seen in Mathematics a world of order, more perfect that the everyday physical world. In fact, few professional mathematicians have missed the feeling that the true Mathematics inhabits somewhere beyond, in an ideal world, waiting to be discovered by the artist. Some could go very far in these ideal directions: thus, Carl G. J. Jacobi sustained that Mathematics exists only "for the honour of the human mind". Hence, the popular conception, at the same time romantic and misleading, of the mathematician as a distracted *savant* with little or no practical mind.

Is this the whole picture of Mathematics? Indeed, Mathematics is much more, there is whole new way of looking at them, and doing them: next to the experimental method, it is the basis upon which modern Science has been built and, as a consequence, the modern technological development rests. It permeates today all aspects of contemporary society from engineering to information, management business and finance, not forgetting the movement of the social disciplines toward the status of sciences, which amounts, in other words and with the proper nuances, to the use in these disciplines of the mathematical and experimental methods in combination.

Now, the practical importance of Mathematics in Science is indisputable, and it is not under discussion to a certain level, since the overwhelming majority of scientists are well aware of the *instrumental value* of some Mathematics. Thus, a quantitatively very important part of the Mathematics that is taught at universities all over the world is devoted to the education of engineers, physicists, chemists, computer scientists, economists and professionals of several other disciplines. However, the "applied" role of Mathematics goes far beyond this description, is more *essential*. In fact:

(i) Mathematics has played a fundamental role in the formulation of modern Science since the very beginning; a scientific theory is a theory that has an adequate mathematical model;

(ii) the Mathematics that can be applied today covers all the fields of the mathematical science and not only some special topics; it concerns Mathematics of all levels of difficulty and not only simple results and arguments;

(iii) the sciences continue to require today new results from ongoing research and present multiple new directions of inquiry to the researchers, but the rhythm of the contemporary society makes the time lapse substantially shorter and the request more urgent;

(iv) the capabilities of scientific computation have made *numerical simulation* an indispensable tool in the design and control of industrial processes.

In this article we will deal with this aspect whereby *Mathematics is the language* in which the pages of Science are written. thanks to it there has been a development of the combination Science-Technology that has changed the life of the citizen of technologically advanced societies in the last four centuries in a more radical way than the Neolithic revolution had done in the ninety previous centuries, and the change has been more dramatic in the last decades than in whole centuries before. Indeed, the daily practice of the physical sciences and engineering hides huge amounts of higher mathematics. Moreover, the very concepts on which their theories are based are essentially *mathematical concepts*. In the last decades we have seen the trend towards mathematization reach other disciplines, like Economics, particularly the financial market, branches of Chemistry, Biology and Medicine, and even the social sciences. It is true that the mathematical machinery, imposing or not, is most often carefully concealed from the public eye.

In the hands of the scientist, *Mathematics should permit to assimilate the data and to understand the phenomena*. In the hands of the engineer, it is the tool that makes possible to build a numerical or qualitative *model* whose analysis allows to *make decisions and design artifacts in an efficient and reliable way*. This activity is what, lacking a better name, we call **Applied Mathematics**. It covers the classical areas like Mathematical Physics and Mathematical Methods for Engineering, but it has today broader contours with the advent of scientific computation and numerical simulation. Modeling, computational simulation and data analysis are essential tools in modern science and industry. Applied Mathematics is just the **Mathematics of Reality**, i.e., the real world, whatever this sentence means to each individual reader.

Let us point out that there are other complementary visions of Mathematics: its cultural aspect, its importance in teaching and education as a vehicle for rational thought, its importance in understanding the daily world ("the Mathematics for the common man"), its aspect as a challenging intellectual game. It is at the same time the science of the exact and the calculation of the probable. It is the science of abstract and symbolic reasoning, and it is also today synonymous to computational virtuosity, of capacity to effectively process information, such an important quality in the present world. It tells us about the pure scientist who works with a piece of paper, and also about the world of modeling, computation and control of industrial processes. The layman thinks that Mathematics is tied to the quest of infinite precision. In practice, much of the art of contemporary mathematics is based on estimating. All of these aspects are part of the multiple legacy of Mathematics[1].

We turn next our attention toward the past and present of Applied Mathematics. The reader may find it convenient in a first reading to skip the information contained in the footnotes. Besides, a number of famous and important formulas and equations will appear scattered through the pages. They are not meant to be studied as part of this text! The purpose is rather to remind the initiated reader of their beauty and relevance, and at the same time to make the point that there is no *royal way* to Mathematics, namely that a real understanding of the topics outlined here implies serious study.

2 Galileo's and Newton's heirs

Two great historical figures fixed the *key role* of Mathematics in the moments in which modern Science was being born. *Galileo formulated it, Newton demonstrated it.* We ought to add that back in History Pythagoras of Samos (569bC-475bC) sustained that *All is number* and found the wonderful connections between Music and Arithmetic, while Archimedes of Syracuse joined Geometry and Mechanics in the IIIrd century b.C (d. 212 b.C.). And one century before Galileo, the universal genius of *Leonardo da Vinci guessed the role* of Mathematics in Science. A pleiad of great mathematicians, the heroes of our story, followed them[2]. The mathematicians who are busy with the

[1] We have written about these subjects in [41].

[2] In the story that follows the names of Galileo and Newton are accompanied by other eminent mathematicians, some of which will be assigned a prominent role in the narrative. Such a selection has been useful to set the main hits and to get to know the heroes of our private adventure, but is no doubt unfair from a strictly historical point of view with personalities like Fermat, Leibniz or Gauss, and we want to make it clear at this point. We hope to be excused because of the brevity of

application of their art stand truly upon the shoulders of giants[3].

Let us proceed in parts: it is true that from the oldest times Mathematics has been related, even motivated, by practical problems. Arithmetic originates from the activities of counting and adding, Geometry stems from measuring lines, surfaces and bodies. But it is also true that Mathematics as a logico-deductive science, just as it was elaborated and bequeathed to us by the Greeks from Pythagoras to Euclides, had a net intellectual, we could say ideal, basis that it has always conserved since then and that is a fundamental part of pure Mathematics, that is to say, of Mathematics in itself. This intellectual process lives in its own world and does not owe anything of its merit or beauty to the possible utility or practical application, not more than a poem or a painting do. An easy and frequently made syllogism would lead from here to conclude that the authentic Mathematics lives essentially alien to the adventure of science and technology. We contend that this syllogism is false by a great deal, even if it has been sustained by many mathematicians, and we will make our case clear in what follows by using opinions of famous scientists, but mainly by presenting a record of factual evidence. Indeed, *History shows us that the symbiosis with Science and Technology has been fundamental and fruitful and that Mathematics owes a great deal of its present being and of its main topics to its adventure companions, and conversely the latter to the former.*

As is well known, modern Science appeared in Europe at the end of the Renaissance. It is not based upon Mathematics alone. The fundamental pillar of the building in germ was aptly formulated by the English philosopher and politician Francis Bacon circa 1620 and consists of the *experimental method*[4]. Nature becomes the preferential object of philosophical investigation, we should learn to read and to understand it, and eventually to control it; observation is the means for comprehension and experiment is the test of our predictions. The sciences were formed around this method, first Physics, then Biology, Geology, Chemistry and so on.

Mathematics is, since the very beginning, the other pillar of the sciences. It was Galileo GALILEI (1564-1642) who pointed out in the clearest form that course for the budding sciences at the beginning of the XVII century. His is the famous quotation taken from his letter "Il saggiatore"[5] that we reproduce in detail: *"Philosophy is*

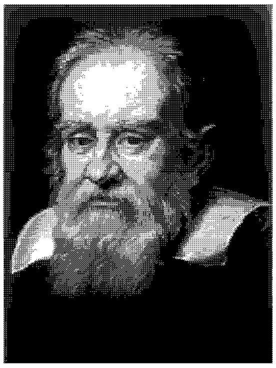
the text (the famous *narrow margin* referred to by Fermat) and also because the purpose we have in mind is not the history of science.

[3]Newton's opinion on his predecessors in a letter to R. Hooke, 1675: "If I have seen farther than others, it is by standing on the shoulders of giants". I have endeavoured to include in the text and notes some of the most celebrated phrases of mathematicians and scientists about Mathematics and its application.

[4]The inductive method is presented in his work *Novum Organum* or *New Instrument*, 1620.

[5]1623, cf. Opere, VI, p. 232; "The Assayer", translated into English by S. Drake, Doubleday Anchor Books, New York, 1957.

written in that great book that stands constantly open to our gaze, the Universe, but it cannot be understood unless one first learns to comprehend the language in which it is written and its characters. It is written in the language of Mathematics, and its characters are triangles, circles and other geometrical figures,..."[6]



GALILEO GALILEI

Galileo was of course a committed defender of the experimental method, to which he contributed his famous astronomical and mechanical observations [7]. The attitude of Galileo had precedents, the most remarkable being as we said Pythagoras and Archimedes in the Ancient Times and Leonardo da Vinci (1452-1519)[8] a century before, but his formulation was determined and put to practice, and it happened in a suitable historical context; it eroded the bases of Aristotelism and Scholastics dominant until then in the intellectual world. It bore fruit in a short time and the scientists see themselves reflected in it.

Indeed, philosophies are a small thing if they remain words and polemics, if they are not carried out. The glory of the XVIIth century resides in a series of great philosophers-scientists (called at that time *natural philosophers*), who, without forgetting metaphysics, threw themselves determinedly to the pursuit of the knowledge of Nature and of mathematical invention: René Descartes studied the principles of reasoning, as well as mechanics and the universe; he tied geometry to algebra and wrote "The Discourse of the Method"[9]; Blaise Pascal wrote his "Pensées" but also investigated the principles of fluids (like pressure), geometry, calculus and probabilities. And so did Pierre de Fermat, Edmond

[6]The famous words are not usually printed in the original Italian: *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*

[7]He wrote down his ideas on Physics, Mathematics and Engineering in the book *Discourses and mathematical proofs concerning the two new sciences*, written in Florence before 1633 but only published abroad in 1638 after the problems with the Church. The two new sciences are mechanics and the science of motion. In 1995 the space probe *Galileo* reached Jupiter and with it the 4 planets discovered by him in 1610.

[8]The interests of Leonardo, a truly universal genius, cover painting and sculpture, engineering and architecture, Physics and Mathematics. Scientist and visionary, he drew the plans of a flying object (forerunner of the helicopter) and coined the term turbulence. Here is a relevant quotation from Leonardo: "No certainty exists where it is not possible to apply the mathematics or in what cannot be related to mathematics".

[9]*Le Discours de la Méthode*, Leiden, 1637, a capital work in the history of science. His work *Les Météores* is considered to be the first attempt to put the study of weather on a scientific basis.

Halley, Christiaan Huygens and Gottfried W. Leibniz, a most renowned mathematician, logician and philosopher.

We are ready to meet one of the crucial characters and moments in the history of science. Indeed, the century reaches its culmination with the figure of Isaac NEWTON (1642-1727), who shows the incontestable success of Galileo's proposal as applied to mechanics. He attacks the basic problems debated during the century and

ISAAC NEWTON

(i) concludes that the movement of solid bodies follows a simple mathematical law that relates the second derivative of space to an invisible *but real* entity, the force. In mathematical words, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;

(ii) upon applying this theory to the heavenly bodies, he concludes that they move along their orbits in agreement with the law of universal attraction. In formulas, $F = Gmm'/r^2$.

In order to mathematically support the movements resulting from these laws he discovers what we know as infinitesimal calculus and solves differential equations. Moreover, the very formulation of his laws is not possible without the new concepts taken from Differential and Integral Calculus, that carries the names of Newton and Leibniz, and was invented by combining the intuitions of mechanics and geometry[10].

In 1687, when his monumental work, the *Principia*, is published[11], Mechanics is solidly founded upon the same bases it still has. Mathematics is not only an indispensable tool, *it is the language in which Science is conceived and expressed*, this is the reason of the book's title. From that moment on, the description of the dynamics and evolution of mechanical systems are an essential part of Mathematics. An enormous period of development follows during which Mathematics tries to fulfill this new fundamental role.

Newton is generally considered the most influential scientist in the history of mankind, cf. [36]. Let us provide some additional data in order to better understand the greatness of his legacy. If to his credit we may list the foundations of Mechanics and Astronomy, of Differential and Integral Calculus and Differential Equations, he also studied the nature of light, laid the foundations to Optics and contributed remarkable technical advances, like the refraction telescope. On top of this, he studied the fluids that are today called Newtonian, explained the operation of tides, computed the velocity of sound (and was also interested in Theology, Alchemy and Astrology,

[10] In placing Newton in proper perspective we have to combine his mathematical formation with the astronomical knowledge he inherited from Tycho Brahe, Johannes Kepler and Galileo.

[11] *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, i.e., "Mathematical Principles of Science".

a quite common feature of the times)[12]. His prestige among his contemporaries was enormous and the most brilliant philosophers of the XVIIIth century (Hume, Kant, Voltaire[13]) studied his work and thought about expanding his fabulous success to all fields of philosophy, a task that turned out to be of a higher difficulty. Indeed, we are still busy with it.

The immensity of the task of understanding Nature did not escape a penetrating person like Newton, with all his success. One of his most celebrated opinions runs as follows: "I do not know what I will look like to others; to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me".

3 The century of reason and lights

During the following three centuries, a part of that ocean has been filled with truth, science and mathematics. Science and Technology, the basis of the Industrial Revolution, have advanced with theories, reasoning and experiments. As a consequence, the society of the XXth century has changed more radically with respect to the XVIIth century than anything that had happened in several thousand years before, since the onset of the great agricultural civilizations. The comfort of house, transportation and communications, and the health of the present-day citizen rest upon technical bases completely unknown to the people of the XVIIth century.

Starting with G.W. Leibniz, a great philosopher and Newton's rival in the famous and a bit sad "dispute of the Calculus", a series of brilliant mathematicians (we would say physicist-mathematicians), like the Bernoulli family, Euler, D'Alembert,... exploited the potential of the new Calculus and formulated mathematically all types of mechanical problems: shooting problems, problems concerning the fall of bodies, the motion of fluids, mechanical vibrations, minimization,...

Infinitesimal methods are likewise powerful in their application to geometry, a discipline that lives in close symbiosis with mechanics. Scholars study the Calculus of Variations, a name for the calculus of minimum values of so-called "functionals", that will bloom in the XXth century as a fundamental topic of Functional Analysis,

[12] He was quite confident in his powers. Here is a quotation from Principia: "From the same principles, I now demonstrate the frame of the System of the World".

[13] It is worth remembering that the Principia were translated into French by the friend of the latter, the Marquise de Châtelet, with his collaboration, 1756. She is described in Encyclopaedia Britannica as "Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Ch., French mathematician and physicist who was the mistress of Voltaire", and only in the text of the article her many accomplishments are described.

by then not even foreseen. Jean Le Rond D'Alembert[14] studied the vibration of a string and wrote the wave equation, that led him to decompose a function into a sum of elementary waves, a task also undertaken by Leonhard EULER (1707-1783) who carried out the decomposition into a possibly infinite sum of sinusoidal functions. Euler is perhaps the most prolific mathematician in history, he made fundamental contributions to Geometry, Analysis and Number Theory, but also to the different branches of Mechanics, Elasticity, Hydrodynamics, Acoustics, and even Music. His Latin is not difficult and his textbooks can be read today with profit and pleasure (preferably after translation!). He lived a great part of his life in St Peterburg, so he is credited with the foundation of Russian Mathematics, together with Daniel Bernoulli.

LEONHARD EULER

The problem of infinite sums will worry mathematicians in the near future, but not in these moments of discovery and euphoria, and even less L. Euler whose intuition seems to know no limits.

Some of the glories and griefs of Mathematics as the language of Mechanics can be observed in the study of fluids. A systematic theory escaped even the genius of Newton. Indeed, the most difficult aspect of this theory consisted precisely in finding the exact mathematical hypothesis that permit to build a mathematical model, i.e., to mathematize it *just as it really is* [15]. Toward the year 1738 Johann and Daniel Bernoulli establish the theoretical science of Hydrodynamics on the idealized basis of the so-called *perfect fluids*. The study is continued by Euler, who writes the famous equations (1755)

$$\rho\,(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

(in today's notation) whose analytical solution turns out to be intractable at the time[16]. Moreover, D' Alembert exposes the limitations of the idealization implicit in the concept of perfect fluid by showing that a solid obstacle submitted to a "perfect wind" would suffer no net *drag* and no net *lifting force*. Indeed, this happens because theoretical mechanics does not deal with Nature, that escapes in its pure essence our curiosity, but it rather deals with the mathematical model that we are able to form about it. Experimental agreement allows us to confirm that a theory is good as a

[14] a well-known representative of the French *Illustration*, who combined a brilliant mathematical career with the publication of the famous Encyclopedia, jointly with D. Diderot.

[15] we recall here Newton's saying about his mechanics: *hypotheses non fingo*, I do not invent the hypothesis or axioms.

[16] and they keep some of their mystery today: the existence of classical solutions given smooth initial data in 3 space dimensions is still an open problem.

model of the physical world, but never that it is perfect[17].

In spite of the relative failure with the fluids, a feeling of optimism invades the minds of the best mathematicians - mechanicians at the end of the XVIIIth century, like Joseph Louis Lagrange[18] or Pierre Simon LAPLACE. The latter publishes his monumental book "Mécanique céleste" (1788). He is also the author of the "Théorie Analytique des Probabilités", 1812, a most important reference in the development of probability theory[19]. Based on his mechanical studies he thought that the universe functions like a clock (determinism) and declared that the most important mathematical problems were already posed and solved, or about to be solved in a short time. Fortunately, History would prove the great man wrong on these issues. Does this bring to our minds recent heated debates about the end of Physics or History?

PIERRE S. LAPLACE

4 The XIXth century, the great century of Science

The contribution of the XIXth century to Mathematics, both pure and applied, is surprising by its novelty, by its richness and multiplicity of topics, and by its very unexpectedness. Let us begin our review with the Mathematics that came from Physics.

• ELECTRICITY AND MAGNETISM: From Michael Faraday to J.C. Maxwell, experiments and partial laws cover a road that counts the names of Gauss, Ampère, Biot, Savart, Lenz, ... till we arrive at the system of partial differential equations that relates the electric and magnetic fields (1863), the work of James Clerk MAXWELL[20] Maxwell's equations are one of the major achievements of Mathematics in the 19th century. Thanks to J.C. Maxwell the new branch of science, whose existence was unsuspected a century before, reached the level of mathematical perfection which Newton accorded to Mechanics. As a consequence, the wave equation is the tool that allows us to describe the propagation of electro-magnetic phenomena in the form of waves characterized by three parameters: first, the amplitude A;

[17] we will return to this subject when speaking of Einstein.

[18] Author of a *Mécanique analytique*, where the general equations of motion, Lagrange equations, are described

[19] Engineers and applied scientists are used to the Laplace Transform.

[20] publication in final form in *Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873.

JAMES C. MAXWELL

second, the speed c that depends on the medium (and is therefore constant in the vacuum); third, the frequency ω of oscillation, that is a variable quantity. In short,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u = A\cos(kx - \omega t),$$

where $k = \omega/c$ is called the wave number. Do we need this formula to proceed? The answer is yes, since soon afterwards, and as reflection of the generality of the parameter ω in the mathematical model, Heinrich R. Hertz predicts and discovers electro-magnetic waves outside of the visible range (radio waves, 1888), and Guglielmo Marconi discovers wireless telegraphy, that is to say, the radio (1895), introducing us to the world of communications, which is the soul of the XXth century. On the other hand, an incompatibility appears with Newton's mechanics, about which we will speak in a moment. Let this be said about the consequences of the mathematical formulation on the evolution of science[21].

• THE REAL FLUIDS, from Claude Louis Navier to George Gabriel Stokes, 1821 to 1856 and later. The Navier-Stokes equations describe real fluids and they govern the behavior of atmospheric phenomena (climate, Meteorology, Hydrology, the future Aeronautics). The correct formulation of the equations describing the movement of real fluids took therefore some 180 years, after the attempts by Newton. A brilliant series of mathematicians figure among the modelers, like S. Poisson and J. C. Saint Venant, as well as the medical doctor J.L.M. Poiseuille, who investigated the blood flow. Lord Kelvin and H. Helmholtz set the bases for the mathematical study of vortices and turbulent fluids, already mentioned by Leonardo, but the full mathematical understanding of the latter is *still an open problem.*

In order not to extend our text excessively we will only mention two further physical theories of great mathematical significance:

• THERMODYNAMICS, which studies the exchange of heat, acquires solid mathematical foundations with James Joule, Saadi Carnot, J.R. Mayer, ... It has strong influence on the calculus with partial derivatives and the concept of exact differential. This theory includes the famous Second Law of Thermodynamics (law of entropy growth in the universe), a fundamental law in science. While its mathematical statement is simple, its practical interpretation has deep implications and puzzles

[21]Maxwell is considered the major theoretical physicist of the XIXth century, Einstein sustained that Maxwell's work represented the most significant revolution in the study of physics since Newton. The theory of wave propagation is one of the classical branches of applied mathematics nowadays in its multiple variants. An excellent mathematician, Maxwell was an advocate of the probabilistic approach to Science, which he applied to the study of gases, and is credited with saying that "the true Logic for this world is the Calculus of Probabilities"

generation after generation of scientists[22].

• Finally, let us mention STATISTICAL MECHANICS, associated to the names of L. Boltzmann and W. Gibbs[23], who carved a branch of Mathematical Physics on the basis of the calculus of probabilities, a discipline that had remained very much at the margin of this scientific adventure[24]. Indeed, the mathematical idealization of chance had been elaborated in the fabulous XVIIth century (ca. 1650) by B. Pascal, P. Fermat and C. Huygens to understand games of chance, and advanced later by Buffon, Bernoulli, De Moivre and Laplace among others. Suddenly, the concept of probability acquires a life of its own in Physics when attempting to model the behavior of huge quantities of particles[25]. This is why the need arises: particles obey of course Newton's mechanical law, but given that Avogadro's number[26] is so huge, approx. 6×10^{23}, it is absolutely impossible to follow individual particle trajectories. Statistical mechanics proposes an average behavior with surprising effectiveness: the prediction of the ideal relationship between temperature, energy and pressure for a perfect gas is immediate and turns out to be quite accurate!

BERNHARD RIEMANN

We change the scene to portray another of our heroes, an "exemplary life", Bernhard RIEMANN (1826-1866), one of those surprising figures whose work contains the best of pure and applied mathematics. The great German mathematician, who died quite young, is well known as a giant of pure mathematics. He bequeathed to us the hypothesis about the zeros of the "Zeta function" (*Riemann's Hypothesis*) whose proof is considered to be the most famous open problem of Mathematics upon entering the XXI century, after the recent solution of Fermat's conjecture. The Riemann hypothesis asserts that all interesting solutions of the equation $\zeta(s) = 0$ lie on a straight line in the complex plane, precisely at $Re(s) = 1/2$. This has been checked for the first 1,500,000,000 solutions. A proof that it is true for every integer solution would shed light on many mysteries, from the distribution of prime numbers to theoretical Physics. Riemann was a scholar with a geometrical mind who thought of complex

[22]with unsuspected consequences: entropy is nowadays a central concept in Information Theory after the work of C. Shannon, *The mathematical theory of communication*, Bell. Syst. Techn. Journal **27**, pp. 379-423, 623-658 (1948).

[23]not to forget Maxwell, cf. the Maxwell-Boltzmann distribution.

[24]Boltzmann's tomb in Vienna has as sole ornament the entropy formula of statistical mechanics $S = k \log W$.

[25]This was not a trivial step. Boltzmann relied on his belief in atoms, a view strongly opposed at the time by famous scientists like E. Mach. The bitter controversy seriously affected his health.

[26]that measures the number of molecules of a gas per unit volume (22.4 l) under normal temperature and pressure conditions.

analysis in terms of conformal transformations and had the vision of general spaces of several dimensions defined in terms of their local geometry[27]. Today we call them *Riemannian geometries* and they are the foundation upon which theoretical physics is built. Now, the same Riemann studied the propagation of compressible gases and arrived at the conclusion that the mathematical model[28], understood in the sense of classical solutions, is contradictory (because it predicts characteristic lines that intersect each other, so that on them the physical variables - density, pressure and speed - would take on several values simultaneously). However, he ventured that the theory was correct if *the point of view were radically changed*; as solutions of the differential equations we must admit functions that are not differentiable, not even continuous. Such boldness, so typical of the best Mathematics of the XIXth and XXth centuries, reminds us again of Newton: Riemann was not "inventing" a theory. The theory of *shock waves* is today a fundamental topic in gas dynamics with its application to Aeronautics, and is therefore one of the most active areas of mathematical research in partial differential equations, ... and engineering.

Inner Evolution. But, even after mentioning Riemann, the present vision would be totally inaccurate if it did not take more explicitly into account the internal evolution of Mathematics, that had by then attained a high level of maturity. We will comment only briefly on this issue since it is better known by the mathematical public. The following are some of the star topics. Many of them appeared unexpectedly, but they were meant to have a brilliant future. Let us mention non-Euclidean geometries by J.C.F. Gauss[29], J. Bolyai and N.I. Lobachevski, the rigorous foundation of Infinitesimal Calculus by Augustin L. Cauchy, the theory of functions by Karl Weierstrass, mathematical logic by George Boole and followers, set theory by Georg Cantor, where we mention only a relevant name next to each chapter.

There are research fields in which Mathematics clearly takes the relay from Physics in the task of extracting the substance contained in a concept. This happens with the problem of representing a function as a sum of simple functions, solved by Brook Taylor and Colin McLaurin for sums of powers and posed by Daniel Bernoulli (1753) and Leonhard Euler for trigonometric sums as they appear in the wave and heat equations. Thanks to the insistence of Joseph Fourier (1822)[30] mathematicians enlisted in the adventure of giving a clear rigorous sense to general infinite sums of trigonometric

[27]his famous article *On the hypotheses which lie at the foundations of Geometry*, in German *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1854, published in 1868.
[28]a nonlinear system of partial differential equations of hyperbolic type.
[29]the "Prince of Mathematicians".
[30]article of 1807, memory presented to the Paris Academy of Sciences and published in 1822.

functions,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega x) + b_n \sin(\omega x)\}.$$

This is the origin of a major area of the theory of functions, known as Fourier Analysis. The task was fraught with baffling difficulties and great successes. Thus, when Paul du Bois Raymond constructed (1873) a continuous and periodic real function whose Fourier series does not converge at all points it seemed that something was quite wrong with the mathematics of wave analysis. On close inspection three options lay open to the researcher: (i) modify the notion of function, (ii) modify the definition of convergence, (iii) replace the basis of sine and cosine functions by better-suited candidates. It is to the credit of mathematicians that *all three courses* have been pursued with amazing success. The fundamental theorem about summation of Fourier series is due to Lennart Carleson, 1966[31], and needs *almost everywhere convergence*, L^2 spaces and the impressive analysis machinery developed in the XXth century[32].

SOCIAL CONTEXT. It may be interesting to say some words on the social evolution of Science in the XIX century. This is the century in which the bourgeois, industrial and democratic revolutions take root in Europe, bringing along the extension of scientific and industry-related studies in universities and in other specialized centers centers, like the technical schools. That development enlarged the body of professors and researchers at an exponential rate. Progress was so impressive that at the end of the century we find again a frank optimism in the mathematical opinion, if we for instance let ourselves be led by the history written by the German geometer Felix Klein[33]. Another characteristic of this period is the deep separation taking place between mathematicians and physicists and engineers, a consequence of the enormous growth of their respective fields of study. Such a separation will have serious consequences on the evolution of Mathematics in the XXth century, and even on the very concept of Mathematics.

---

[31] *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966), pp. 135–157.

[32] Here are two quotations from Fourier that will help kindle the debate on Pure versus Applied Mathematics: The first is "The differential equations of the propagation of heat express the most general conditions, and reduce the physical questions to problems of pure analysis, and this is the proper object of theory". Now the second one: "The profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries".

[33] *Lectures on the development of mathematics in the 19th century.* Here is a significant quote from Klein: "The great mathematicians like Archimedes, Newton or Gauss always united theory and applications in equal measure".

5 An agitated turn of the century

In any case, the turn of the century is spectacular in Physics as in Mathematics. Two extraordinary figures appear in the mathematical arena, Henri POINCARÉ (1854-1912) and David HILBERT (1862-1943). They make a deep imprint in the Mathematics of the XXth century. But a great part of the retrospective brilliance is due to the fact that the turn of century was *a time of crisis*, since the evidence of phenomena that did not fit into the "great explanation" at hand kept mounting.

HENRI POINCARÉ

DAVID HILBERT

• The experiment of Michelson-Morley (1887) showed that the speed of light is really constant, as predicted by the wave theory based on Maxwell's equations. The mechanical model of the world of Euclides-Newton sees a first huge crack.

• The movement of particles suspended in gases reveals a highly irregular movement, the Brownian movement (Robert Brown, 1827). This is a blow for Euclides' geometry based on points, straight lines and smooth curves (or at least piece-wise smooth).

• The surprises of the theory of functions lead to the Theory of Sets (Georg Cantor) that together with Logic (George Boole, Gottlieb Frege, Giuseppe Peano) form the basis in the attempt to provide rigorous foundations to Mathematics once for all. Mathematics proposes to Science the concepts of *consistent* and *complete* theory. Disputes and different schools arises: logicism (Alfred N. Whitehead and Bertrand Russell[34]), intuitionism (Luitzen Brouwer), formalism (D. Hilbert). Then paradoxes appeared (Russell, Burali-Forti, Richard) and that sowed a notable chaos in weak and not so weak spirits.

• No efficient analytical or computational tools are available to tackle the complexities of the equations governing continuous media, like fluids. Consequently, the practical Mathematics of engineering plunges into a series of approximations and rules

[34] their famous book *Principia Mathematica* dates from 1910.

that divorce them from the theory.

• Even the classical questions of the general integration of the equations of movement for three or more (heavenly) bodies turns out to be impossible[35]. Big problems, big remedies: H. Poincaré proposes the qualitative methods and opens the doors to algebraic geometry and topology (called then Analysis Situs, 1895). But, at the time he discovers with his theoretical methods the tremendous complexity hidden in the mathematical model (i.e., the dynamical systems). The hidden monsters are called homoclinical orbits and they will infest with *chaos* the whole body of celestial mechanics when Poincaré is finally well understood (this took several decades)[36].

• Let us add some optimistic notes. Thus, the theory of integration of functions is crowned in the works of E. Borel and H. Lebesgue. Now Calculus possesses a concept of integral where the process of taking limits is natural. Functional Analysis is born (Hilbert spaces) and the famous Dirichlet Problem has a solution (in a sense seen then as quite unusual). The price to pay is the construction of a sophisticated mathematical theory that students of science and engineering must absorb, or at least learn to live together with, paraphrasing J. von Neumann.

• Main discoveries of a mathematical nature occur in other sciences and will bear fruit in the next century. The Russian scientist Dmitri I. Mendeleev found order in the chaos of chemical elements and proposed the Periodic Table in 1869, the basis of today's physico-mathematical treatment of Chemistry. On the other hand, the Austrian monk, botanist and plant experimenter Gregor J. Mendel formulated the rational laws of inheritance, thus laying the mathematical foundation of the science of Genetics[37].

6 The XXth century, a century of wonders

At this height, we expect to have impressed upon the reader a feeling of the deep symbiosis of Mathematics with Physics, of their surprising and in many cases unexpected interactions. By this time this symbiosis includes advanced technological applications, a prelude of what the new century will be. The explosion of Mathematics and Science in the XXth century makes it advisable to reduce our text to some of the most important items. A main feature that stands out is the progressive math-

[35] as exposed by H. Poincaré in his book *Méthodes nouvelles of the mécanique céleste,* Paris, 1899.

[36] In order to measure the stature of our hero the following quotation could be useful: "in his courses at the Faculté des Sciences de Paris since 1881, and later at the Sorbonne since 1886, Poincaré changed subject every years, touching upon Optics, Electricity, Astronomy, the equilibrium of fluids, Thermodynamics, Light and Probability".

[37] *Versuche über Pflanzenhybriden* (Experiments with Plant Hybrids), published 1886.

ematization of other sciences, which makes them appear as new horizons for Applied Mathematics.

New Mathematics that came from Physics

• THE THEORY OF RELATIVITY. Albert EINSTEIN, the Man of the Century according to *Time magazine* (year 2000), proposed the two versions of relativity in 1905[38] (special relativity) and in 1916 (general relativity). It will be small surprise to the reader if we say that in both cases it is a matter of an in-depth reflection upon the Mathematics that lie at the basis to Physics. Special relativity has as precursors Lorentz, Poincaré and Minkowski, who studied the invariance group that corresponds to the new geometry of space-time. General relativity uses the geometrical concepts that Riemann elaborated more than a century earlier as a pure *Gedankenexperiment*, i.e., a thought exercise upon the "hypotheses which lie at the foundations of Geometry", and that were developed by the Italian differential geometry school of Ricci, Levi-Civita and Bianchi. Relativity was destined to be a great ball-game for differential geometry in the XXth century. We go from Einstein's equations to the Big Bang and to black holes (Oppenheimer and Snyder, 1939; Penrose and Hawking). All can be seen as a piece of pure mathematics building a model for a branch of Physics. It is befitting however not to forget the other face of Relativity: since the first experimental confirmation by Sir Arthur Eddington in 1919, an incessant number of experiments have served to confirm (or rather, with Einstein's modesty, not to refute) the theory of Relativity. Indeed, hypotheses are not invented in real science[39].

ALBERT EINSTEIN

Let us pause to take a look at some of the main formulas. In September 1905 Einstein published a short paper in which he proved the fundamental formula $E = m\,c^2$ about the mathematical equivalence of mass and energy, which has become a classic in the popular culture of the XXth century. On the other hand, the transformation laws of Special Relativity that replace the Galilean transformation

[38] 1905 was the *annus mirabilis* for Einstein. In three separate papers he explained the photoelectric effect, Brownian motion and the theory of relativity. It is unlikely that such a feat will be repeated.

[39] Here is a significant opinion of Einstein on the role of mathematics: "Mathematics deals exclusively with the relation of concepts to each other without consideration of their relation to experience. Physics too deals with mathematical concepts; however, these concepts attain physical content only by the clear determination of their relation to the objects of experience", in *The theory of Relativity*, 1950. Einstein's opinions are all the more interesting since, contrary to other outstanding figures in the history of Physics, like Newton or Maxwell, he was not himself an outstanding mathematician, at least technically. He left however an impressive legacy to Mathematics through his theories.

laws at high relative velocities, known as Lorentz transformation laws, are:

$$x = \gamma x' + \gamma v t', \qquad t = \gamma t' + \frac{v}{c^2}\gamma x',$$

where the constant γ is called the time dilation factor. It depends on the relative velocity v and is given by the expression: $\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Consequently, the addition of velocities follows the surprising rule

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

very much against what we were used to believe (i.e., $u = u' + v$). All in all , Einstein's most recognized formula is of course $E = m\,c^2$, which forms with Planck's quantum formula $E = h\,\nu$ the new vision of energy at the beginning of the century. Precisely, quanta are our next subject.

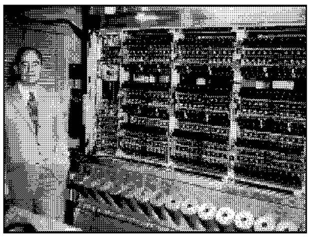
• Quantum Mechanics. The second magical tour[40] takes us from Max Planck's Hypothesis of the Quanta, 1900, to the Schrödinger Equation (Erwin Schr., 1926) passing by Niels Bohr, Louis de Broglie, Max Born, Werner Heisenberg and Paul Dirac. The door to the atomic world is coded in the marvelous equation

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\,\psi,$$

where $\hbar$ is the reduced Planck constant, $\hbar = h/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, Δ is the Laplacian operator and $V = V(x, y, z, t)$ is the potential. All this may really seem like a piece of Kabbala, and at first the experts discussed heatedly about the meaning to be given to the variable $\psi(x, y, z, t)$ called "wave function". Such is the power of Mathematics, these great physicists had found a piece of the Mathematical Code of the Universe but did not know how to interpret the cipher. In 1928 the probabilistic interpretation was proposed by Max Born, where $|\psi|^2$ is the probability density of finding a particle at the location (x, y, z) at the instant t, and this is widely accepted, not without resistance, following Einstein in that[41]. Because Quantum Mechanics is a fundamental challenge to the previously admitted way of looking at the world, to traditional determinism and causality. We may say that Determinism is based on the assumption that "the exact knowledge of the present allows the future to be calculated". Is it not that the dream of the exact sciences, and does not Quantum Mechanics subvert that belief? Pondering on the issue, W. Heisenberg found in 1927 the following answer: "not the conclusion [of the deterministic assumption], but the initial hypothesis is false".

[40] quotation in homage to "The Magical Mystery Tour", Lennon and McCartney, 1967.
[41] his famous comment: "God does not play dice".

Leaving the world of interpretations aside, we must report that this theory, based on the highest level of mathematical abstraction, will be confirmed by a century of experiments. Its magical part has a stellar moment when Paul A.M. Dirac, using the relativist formulation, proposes the existence of a particle, called today positron (1932), because "the equations admit the sign change with respect to the solution describing the electron",... and the positron was duly discovered[42] by experimental physicists shortly afterwards (Anderson and Blacket, 1932-33). Dirac predicted the existence of the antiproton that was confirmed by Segrè in 1955, and also of the magnetic monopole, but this time existence went without confirmation up to the present day. Dirac's predictions are a remarkable example, in no way unique, where mathematical modeling goes ahead of the experimental evidence[43]. Does this remind us of Hertz?



J. V. NEUMANN

The mathematical harvest is not scarce: the theory of self-adjoint operators in Hilbert spaces with the corresponding spectral theory were developed by John VON NEUMANN (Janos v.N., 1903-1957), one of most versatile geniuses of the century[44], with the purpose of giving sense to the operators that appear in the Schrödinger equation, Laplacians and the rest. He is based on the work of S. Banach and the Italian experts in the Calculus of Variations, but Quantum Mechanics has its whims: it needs some sophisticated mathematical objects, so-called "unbounded linear operators in Hilbert spaces". We are therefore at the edge or beyond the syllabus of undergraduate Mathematics. This is interesting information for those who claim *that all useful mathematics is necessarily easy*[45]. Together with the Calculus of Variations, Quan-

[42]should we said found? or recognized?

[43]On the other hand, science based solely on mathematical arguments or analogies can be wrong science. Thus, there is strong mathematical tendency to assert that in the realm of particles certain mathematical symmetries are "laws" of nature. A telling counterexample is provided by the law of conservation of parity that specifies that elementary particles and their mirror images *must* behave identically; in 1956-57 three sino-americans T. D. Lee, C. H. Yang and C. S. Wu first conjectured and then proved that there are subatomic processes that violate that law.

[44]J. von Neumann, *Mathematische Grundlage der Quantenmechanik,* "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics", Springer, 1932. Von Neumann's trajectory travels through the most diverse areas of Mathematics, pure and applied: in his youth he modified the ZF set theory, he creates the v.N. algebras in operator theory, he is the father of Game Theory ("Theory of games and economic behaviour", J. von Neumann and O. Morgenstern, 1944) and we will see him later at the Institute for Advanced Studies in Princeton as one of the fathers of the first modern computer. After the war he was busy with hydrodynamics, numerical methods (Monte Carlo, stability for finite difference schemes), the theory of automata, and so on.

[45]I refer specifically to the opinions of the famous English mathematician G.H. Hardy in his book *A Mathematician's apology,* [15], that reflects very different points of view from the ones maintained

tum Mechanics has been a continuous source of problems for Functional Analysis, a branch of Mathematics that takes on its own flight.

Mathematics that came from Engineering

• AERONAUTICS. After the impressive advances of Mathematical Physics in the XIXth century, and in particular of fluid mechanics, it could seem that the old problem of flight, that had already occupied Leonardo da Vinci, had to be solved for good. And the experiments with balloons had been conducted with success a century before[46]. Moreover, the theory of complex variables and of potential and vortex flows had obtained remarkable progress. But with all this progress, real *propelled flight* was not understood nor practiced, and a discouraged W. Thomson Lord Kelvin recognized towards the end of the century that the dream of propelled flight was maybe impossible[47]. Then, and after a number of partial successes in different countries, the experimental method was vindicated by the brothers Wilbur and Orville Wright, manufacturers of bicycles and accomplished experimenters with no academic training. They were able to fly a propelled artifact in the inhospitable beaches of Kitty Hawk, North Carolina, in the cold morning of December 17, 1903. An Engineering discipline is born, Aeronautics.

The reaction of the scientific community was immediate and up to the challenge. During the period 1905-10 the main mathematical ingredients missing in the theoretical model were understood (L. Prandtl, M. Kutta, N. E. Zhukovski, S.A. Chaplygin). They deal with the concepts of sustentation, circulation, boundary layer, separation, laminar and turbulent regime. In 30 years the new scientific discipline carries us beyond the sound barrier. And with this discipline new branches of applied mathematics see the light, such as the theory of singular perturbations, the theory of supersonic and transonic flows and the mathematical theory of combustion[48].

We restrain here from listing other branches of Engineering that have had a similarly active interaction with Mathematics, but see Section 8.

Great news coming from Mathematics

Mathematics have lived throughout the XX century quite focused on the internal development of the ideas received from the fabulous previous century. Fortunately,

---

in this article, cf. specially his section 26. It is a well-known book, of great interest, but time does not seem to have proven the author right. It is to be considered that in 1940 the practical relevance of sophisticated theories like Quantum Mechanics could very well not be clear, as it is today.

[46]Brothers Montgolfier, 1783.

[47]"heavier-than-air flying machines are impossible", he said in 1895.

[48]More toward theoretical mathematics we have the mathematical theories of front propagation and that of singularity formation, like blow-up for nonlinear differential equations. Let us add that, though the engineering practice of aeronautics rests on firm theoretical foundations, the deep mathematics involved are far from being well understood and research is quite active

the always difficult and generally failed attempt to predict the main lines of the future has had an exceptional counterexample in the famous proposal by D. Hilbert at the II International Congress of Mathematicians, celebrated in Paris in 1900. Hilbert summarized in 23 problems the main challenges faced by Mathematics, going from the most theoretical aspects of pure mathematics to the problems of mathematical physics[49], cf. reference [17]. Those 23 problems have been of great importance in the course of the century, but other lines have come to compete for the limelight, and how! Let us point out three important developments among many others.

• THE CALCULUS OF PROBABILITIES. It may look like an answer to the needs presented by Quantum Mechanics, but in reality it happened independently. In the 30's Andrei N. Kolmogorov put in Moscow the foundations of axiomatic probability[50] upon set theory, and abstract measure theory is born. The names of P. Levy in France and N. Wiener in the USA are usually associated with this discovery. We should not forget the precedents: Boltzmann studied Brownian motion, L. Bachelier wrote his thesis in 1900 in an (unsuccessful at the time) attempt to model financial markets, and Einstein obtained the Nobel Prize in 1921, not for the theory which made him famous, but for his studies on the photo-electrical effect and... on Brownian motion. Markov chains had been studied since 1900 by A.A. Markov.

Nowadays, the theory of Stochastic Processes is a main area of this booming branch of Mathematics, and the Itô Calculus is an essential tool of continuous stochastical analysis to be compared to the classical infinitesimal calculus of Newton and Leibnitz. All this development was completely unknown, even unsuspected, to older ages and it takes upon itself the task of informing us about uncertain and random events and their probable outcome or evolution. As usual in our narrative, it is not just an academic pursuit, it has very important applications in scientific, industrial and financial processes.

• DETERMINISTIC CHAOS. The study of chaos generated by differential equations, already announced by Poincaré, whose Mathematics had matured thanks to the efforts of different mathematicians, especially G. Birkhoff, had to wait for the work of a physicist devoted to the study of weather to acquire a dramatic impulse. In effect, this merit is attributed to Edward Lorenz, from MIT [51]. Interested in the study of convective processes in the atmosphere, he proposed a very simplified model consisting of three ordinary differential equations and I will not resist the temptation

[49]Though it must be said that the latter were relatively under-represented, and Hilbert worked on the subject in subsequent years.

[50]His book *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, "Foundations of the Calculus of Probabilities", was published in 1933.

[51]his famous publication is *Deterministic non-periodic flow*, J. Atmos. Sci **20** (1963), 130–141.

of reproducing it for you

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y, \\ y' = 28x - y + xz, \\ z' = \frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

For this particular choice of parameters he found to his surprise that the numerical trajectories produced by the computer did not converge to a fixed point or a periodic solution. The 12 page paper dates from 1963. Deterministic chaos was born, along with strange attractors and a whole branch of Mathematics, at the beginning quite experimental, then theoretical, a great novelty made possible by the advent of the computer. Authors like S. Smale, D. Ruelle and M. Feigenbaum become world-famous[52]. Objects like the *fractal sets* of B. Mandelbrot[53], already announced in the work of G. Julia in the 1920's, enter the scene. The study of fractal, chaotic and turbulent processes is one of the border-lines of present mathematical thought, the relation of deterministic chaos to natural chaotic and turbulent phenomena still being largely unknown.

• NEW CONCEPTS OF SOLUTION IN DIFFERENTIAL EQUATIONS. Toward the 1930's it was clear for many researchers that the concept of classical solution was not sufficient to build a theory of differential equations for use in mathematical physics which would satisfy the requirements of the applied science. In effect, it is natural in this discipline to work with *problems*, i.e., with sets of equations and additional data, and to require them to be *well posed*. Following J. Hadamard, this means that such problems should have a solution, that this one has be to unique if sufficient data are given, and finally that the solution should depend continuously on the data. Now, it may happen in the real science that classical solutions do not to exist and this fact can even be proved in a rigorous way, and even then the problem could be reasonable from the physical point of view. Or it may simply happen that the concept of solution whose existence turns out to be natural and simple to show is not the classical concept.

Faced with this challenge mathematicians have developed a diverse set of notions of *generalized solutions* with physical meaning. A remarkable example arises in Dirichlet's problem of energy minimization already mentioned[54]. Another basic example arises with Riemann's problem of gas dynamics. Yet another similar prob-

[52]cf. Ian Stewart, *Does God play dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin, London, 1989.

[53]cf. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature,* 2nd ed., San Francisco, 1982.

[54]It deals with minimizing the energy integral $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ among all the admissible functions $u = u(x)$ defined in a domain of the space, Ω, and which take assigned values on the border of Ω; ∇u denotes the gradient of u. The crucial question in order to envisage the correct solution, is to decide what is understood under the label *admissible* function. The answer motivates Hilbert spaces.

lem is tackled by J. Leray (1933)[55] in the study of the solutions of the Navier-Stokes equations for real (viscous) fluid in tri-dimensional space. Thanks to the work of functional analysts (S.L. Sobolev, L. Schwartz, ...) the concepts of *weak solution* and *solution in the sense of distributions* are developed to suit those needs. Summarizing a great deal, the main idea is not to ask the solutions to possess all the derivatives implicit in the equation, but rather to comply with a family of tests. With the experts in conservation laws (P. Lax, O. A.Oleinik, S.N. Kruzhkov) we arrive at the concept of *entropy solutions*, needed for gas dynamics where weak solutions are insufficient. Entropy solutions of gas dynamics equations "solve" the differential equations but may not even be continuous (and thus we recover the legacy of Riemann, Rankine and Hugoniot and their shock waves).

In our days new concepts of solution appear to suit new needs, such as the *viscosity solutions* of M.G. Crandall, L.C. Evans and P.L. Lions. L. Caffarelli extends the concept to the problems of phase transition or free boundary, in which the discontinuity is a fundamental part of the mathematical setting. And the saga continues with so-called mild solutions, semigroup solutions, renormalized solutions,...

One of the most striking aspects of these new concepts is their compatibility with the *numerical solutions* produced by the discrete methods of numerical calculus. We find thereby a surprising alliance of the abstract and the numerical concepts against "the unflexibility of the classical concepts".

7 Engineering and Mathematics in the last revolution of the century. Computers and computational mathematics

The practical realization of the old dream of building a calculating machine takes shape in form of the modern computer that originates from two sources, Technology and Mathematics. Both combine towards a fabulous invention in the year 1946[56]. From one side, we have the old project of the calculating machine, already thought of by B. Pascal[57] and G. Leibniz in the XVIIth century[58], which owes so much to Ch. Babbage at the beginning of the XIXth century, and finally is to be realized in the XXth century in an efficient form thanks to the progress of electronics: first, the

[55] Jean Leray published three papers on the subject in 1933-34. The last is *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux emplisssant l'espace*, Acta Math, **63**, 1934.

[56] with this date I refer to the ENIAC computer.

[57] his *machine à calculer*, the *Pascaline*, is famous.

[58] Leibniz thought in the direction of algebra and symbolic logic. Recent investigations indicate that the first of such calculating machines is due to a German, Schickard, 1623.

vacuum tube and then a line of impressive technical progress that leads to semiconductors, miniaturization and the *chip*[59].

But the computer is not born as a passive calculating machine, it is born with a program. This is the legacy of mathematical logic, from G. Boole with his algebra to the program of formalization of Mathematics by D. Hilbert, that leads to Kurt Gödel's incompleteness proof in 1931[60], one of the absolute Mathematical Hits in the XXth century. Which in turn provokes the interest of a mathematical genius,

A. TURING

Alan TURING (1912-1954), who translates the program of formalization to the language of machines (*On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, 1937), and invents, together with Alonzo Church, Computability theory. All this happened years before a physical computer was to see the light. There follows a historical moment: the war effort, deciphering the German code Enigma,... Enters von Neumann with the idea of the stored program and ENIAC is built in 1946[61]. The modern computer appears as an effective calculating machine with four characteristics: general purpose, electronic, digital and programmable; *the two latter are directly related to mathematics.* The first commercial computer, UNIVAC, was released in 1951. In the short period of a bit more than 50 years we have seen the evolution from huge machines, that could handle kilobytes to megabytes, to the personal computer with capacity of several gigas and to the World Wide Web. Duality in the computer world continues in the form of the famous couple Hardware and Software[62].

THE COMPUTATIONAL WORLD, A NEW WORLD FOR MATHEMATICS. The computer world is changing little by little the daily life of the citizen: banking transactions, electronic mail, ticket reservations,... Its effect upon Mathematics, less known by the general public, is even more dramatic. On the one hand, new branches appear like theoretical Computational Mathematics, or the theory of automata and formal lan-

[59]the integrated circuit was invented by R. Noyce and J. Kilby in 1958.

[60]the incompleteness of formal systems, was published in *Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and other related systems".

[61]ENIAC stands for Electronic Numerical Integrator and Computer, built by J.W. Mauchly and J.P. Eckert at the Univ. of Pennsylvania; today the pioneering work of J.V. Atanasoff is recognized. Mention should be made of the English Colossus, 1942, and the German Z1 to Z4 machines, cf. ref. [24]. All of these machines had a military purpose.

[62]Personal computers appear in 1977 and, against the predictions of the gurus, have taken up the scene, thanks no doubt to the impressive progress of hardware: a chip may contain at the end of the century up to 10^9 transistors

guages. But all branches of Mathematics, pure and applied, are affected by the sudden ability to actually calculate what before could only be imagined, and this works like an infection on the everyday practice of mathematics: mathematicians, scientists and engineers calculate orbits of satellites or trajectories of dynamical systems, numerical distributions or time series of real processes, weather maps or mathematical studies of singularities, temperature distributions in a furnace or statistical properties of the zeros of Riemann's Zeta function, ...

Among the most remarkable novelties, Mathematics has an important role in industrial and other applied processes in which laboratory experiments are combined with the new tools derived from Mathematics: there appears the combination of **mathematical modeling - mathematical and numerical analysis - simulation - visualization - control,** that forms a usual tool in the most diverse fields: communications, weather prediction, astrophysics, mining, industrial engineering, the car industry, the oil industry, environmental problems, economy and finance, communications, and quite recently biology and medicine, as we will see with some detail in Section 8. This area of mathematics has the task of approximating in an effective way the solutions of mathematically sophisticated models. Interest in its development and application gives rise to big institutes and computation centers all over the world. New disciplines arise, like CFD, i.e., Computational Fluid Dynamics, or CB, Computational Biology.

The new concepts: numerical model, computer simulation, numerical experiment or exploration, dynamical visualization,... have become daily practice in scientific and industrial media. The development of methods of numerical formulation of the continuous models of physics, like differential and integral equations, is a fundamental branch of computational mathematics (viz, the methods of finite differences, finite elements[63], finite volumes,...). The study of the properties and convergence of these methods constitutes Numerical Analysis, that has a deep connection to Algebra. On the other hand, the computation capacity gives new life to the branches of discrete mathematics, as graph theory, with its important applications (for example, to the telephone networks and in general to the world of communications).

In summary, a view has emerged where **Computational Science** is now the third leg of the scientific method together with Theory and Experiment, and this view is nowadays strongly practiced in Physics, Chemistry and Engineering.

[63]Finite elements are a wonderful example of the development of a mathematical-numerical tool by the parallel but separate efforts of mathematicians and engineers, see an interesting historical account in [2]. The phenomenon is not isolated, cf. the recent history of wavelets. These examples should lead us to think a bit more about the benefits of communication.

8 Trends at the beginning of the XXIth century. Mathematics in the Sciences, Industry, Management and Business

We have seen the recent evolution of pure and applied mathematics towards theoretical consistency and universality of interests. In consonance with this, the panorama of current interests and future trends in the world of Mathematics offers an impressive variety. Using a somewhat rhetorical language, we may say that Mathematics is today *ubiquitous*, it is everywhere, and *relevant,* it matters. Mathematical modeling plays a bigger role than ever in science, engineering, business and the social sciences.

We will mention next some of the main applied topics as they appear in the literature, in conferences, in programs of major research institutes. We have also benefitted from different sources like [11, 12, 13, 26, 31] and others. We point out in italics related mathematical aspects for the reader's convenience.

• Celestial Mechanics. Problems of aerospatial science. *Stability and chaos in dynamical systems. Strange attractors.* Mechanics of solids and fluids in zero gravity.

• Theory of fluids. Application to meteorology and climatology. Ocean engineering. Complex Environmental Problems, global warming and other geo-social issues. *Global circulation models, balance models; stochastic climate modeling; hierarchies of intermediate complexity models, like the geostrophic model.* Glaciology. Acoustics and application to the sound industry. Industrial fluids, lubrication. Turbulence. *Predictability and chaos. Stability, bifurcation. Free boundary problems.* Cross-areas, like fluid-structure interaction.

• Aeronautics. Hydrodynamical problems, supersonic and transonic flight. Airfoil design. Problems of combustion (flame propagation, detonation). *Shock waves and hyperbolic equations. Boundary Layers and asymptotic developments. Traveling Waves.*

• Modern Physics. The Mathematics of the atomic world and of elementary particles. The standard model, quantum electro-dynamics, quantum chromo-dynamics. *Group theory, renormalization and gauge theories, supersymmetry, Yang-Mills equations, instantons, dilatons, branes,... exotic geometries and topologies in higher dimensions.*

• Astrophysics. General relativity, stellar models. Mathematics of plasma physics, magnetohydrodynamics. *Kinetic equations (Boltzmann, Landau, Fokker-Planck, Vlasov, ...).*

• Geosciences. Problems of resources and mining. Environmental Problems: climate research. Pollution transport in air, water, and soil. Computational hydrology.

The equations of oil extraction, of groundwater filtration, of contaminant dispersal: nonlinear systems of PDEs and free boundary problems. Mathematics of seismic phenomena, *wave propagation, inverse problems.*

• Materials Science. Modeling and simulation of composite materials, magnetic material, polymers, glass, and paper. Crack propagation and further failure mechanisms. *Linear and nonlinear Elasticity. Calculus of variations. Homogenization theory.* Phase transitions, crystal growth, superconductivity and hysteresis.

• Nanotechnology. Integrated optics, optical networks. Quantum electronics and optics. Nanoscale techniques in medicine, porous materials. *Coupling of quantum states, mesoscopic and continuous models. Semiclassical Boltzmann theory, Wigner equation.*

• Industrial Engineering. Steel industry, blast furnaces. Prototypes for the car industry (fluids, aerodynamics, materials and fracture theory).

• Communications. Telecommunication and optical networks: analysis, simulation, optimization, transmission rate optimization, network design. Antennae, radar and sonar. *Electromagnetic field theory.* Microwave ovens couple Maxwell equations with Fourier heat theory.

• Discrete Mathematics. *Graph theory, combinatorics.* Applications to management, scheduling, routing,...

• Computer Science. *Mathematical logic, algorithmics, computational complexity, parallelization.* Finite automata, formal languages, *algebra.* Machine learning, data mining, artificial intelligence, natural language processing.

The design of the quantum computer would open a new world to computation.

• Control. Optimal control, robust control, nonlinear control. Predictive control. Fuzzy control systems. Neural networks, Fault Detection and Diagnosis in Industrial Processes. Modeling and Control of Economic Systems. Constraint Based Scheduling. Communication and Control of Distributed Hybrid Systems.

• Automation and Robotics. *Algebraic geometry and computation.* Computer Vision and Virtual Reality. Biological and Computational Learning.

• Information theory. Coding of messages, error-correcting codes. Surprising applications of *number theory and algebra.* Image Processing and Compression. *Wavelets, fractals, nonlinear PDE theories.* Speech and image recognition.

• Statistics in Science, Industry, Government and Business. Estimation and hypothesis testing, design of experiments. Reliabilitiy, survival analysis. Stochastic processes. Time series. Epidemiology. Quality control. Analysis of Variance. Multivariate analysis. Survey sampling, polls.

• Optimization Theory and Mathematical Programming. Integer Programming:

Facets, Subadditivity, and Duality. Nonlinear programming, convex programming. Iterative Methods. Industrial Design Optimization. *Numerical methods, partial differential equations, calculus of variations, combinatorics, linear algebra.*

• Problems of optimal transportation. Problems of traffic (with continuous and discrete modeling). Network planning. Traffic in the *Web.*

• Economy. Financial mathematics (option pricing, derivative trading, risk management,...) unites *stochastic differential equations, partial differential equations and free boundary problems.* Models for the global economy.

• Chemistry. Quantum Chemistry: *simulation of atomic and molecular structures through fundamental equations.* Reaction dynamics, combustion. *Mathematics of nucleation, growth of crystals and chemotaxis. Front propagation, traveling waves, chemical oscillators. Chaos.* Drug design.

Life Sciences and Medicine:

• Biology: Mathematical Ecology, Epidemiology, Biometrics, Bio-informatics. Mathematics of Genetics, Computational phylogenetics. Nucleic Acid structure and function. Molecular evolution. Proteomics. Regulatory and developmental pathway inference. *DNA computation.* Sequence alignment, fuzzy reasoning. Mathematical modeling in biopolymerization.

• Medicine: interaction fluid-structure as a model for the blood flow. Modeling and simulation of the function of other organs: brain, lungs and liver. *Self-organization and fractal geometries.* Computational assistence of surgery. Pharmacokinetics, tumor growth modeling. Computational neuroscience. The Mathematics of infectious diseases and epidemic spreading. Artificial organs, immune system modeling.

• Medical imaging methods. Tomography: computerized tomography, 3D image reconstruction. *Fourier and Radon Transforms, inverse problems.*

• Though Computational Mathematics (as different from Computer Science) permeates all fields of application, it deserves a mention in itself: numerical methods and codes; efficient algorithms; approximation, (a priori and a posteriori) error estimates, adaptive methods and adaptive models, multigrid and domain decomposition, multiscale analysis, numerics of random processes, ...

• On the other hand, Mathematical Modeling in its different variants (deterministic, continuous, discrete, ...) leads to the problems of Model Validation and the techniques of obtaining and elaborating data on which validation is based (see Statistics above), as well as the quite important (and debated) concept of hierarchy of models, a progressive way of approaching "reality" that is nowadays recognized and embedded into the toolkit of the applied scientist (the old idealists with their eternal truth will revolve in their graves; or will they not?).

We shall stop here and take a much needed break with some comments. The list is loosely organized by affinity of topics; however, the close interconnection of the branches of applied mathematics forces us to indulge in repetitions, or otherwise to place a subject under one of various possible headings. On the other hand, we are leaving without proper comment a number of fields of application: the theory of complex systems, self-similarity in the natural world, pattern formation and recognition, the global positioning systems (GPS), mathematics of electoral systems, Architecture, the textile or the food industry. And there is the strong trend for Mathematics to play an important role in the visual Arts, as it already does in the Entertainment Industry combined with the formidable progress of computer technology. And how could I forget talking to you about Knot theory, G. Dantzig's Simplex Method or the Kalman Filter? In conclusion, this long list is incomplete, mostly because of the limited knowledge of the author, but I hope that it will impress upon the reader the enormous variety of interests of today's applied mathematics.

I would like to add a final personal reflection on the trends I see underlining all the above diversity. The mathematics that are to come will be much more **stochastic** and **algorithmic** than they used to be in the XXth century, and **mathematical modeling** will come to be considered an essential part of the mathematical education and activity, alongside with computation and simulation. But whatever happens, it looks to me that a clear and complete **proof**, and elegant if possible, will always be the heart of the matter, as it has been since good old Euclid, and future mathematicians will still get excitement from **problems and conjectures,** and as Galileo did, from **looking at the world** (or the stars). And they will build, perched on the shoulders of former giants, these delicate, intricate and elusive objects called **theories,** some of them destined to oblivion, some to eternity, or to the daily wear-and-tear. Who marvels anymore at the surprising existence of electromagnetic waves filling the air, now that they have even become a form of pollution? But so much for philosophy at this moment.

9 From Hilbert's 23 problems in 1900 to the Clay Millenium Problems in 2000

We have already pointed out the deep impact that the list of problems proposed by D. Hilbert in 1900 had upon his contemporaries and successors. One hundred years later different initiatives try to follow the example of the great man, see e.g. the books by Arnold-Atiyah-Lax-Mazur, and by Engquist-Schmid[64]. On Wednesday

[64]For more information see the article by A. Jackson cited in the final references. See also vol. 3, no. 1 (2000) of Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, article by J. L. Fernńdez and M.

March 24th, 2000 at the Collège of France in Paris the official announcement was made of the collection of seven mathematical problems that constitute the Millennium Prize Problems, sponsored by the Mathematics Clay Institute. Remembering Hilbert, it tries to reflect seven of the most important open problems of the mathematical science at the beginning of the new century[65]. These problems cover quite different areas of pure and applied mathematics. Here is the list

1. P versus NP (Computation theory)
2. The Hodge Conjecture (Algebraic geometry)
3. The Poincaré Conjecture (Geometry and topology)
4. The Riemann Hypothesis (Number theory)
5. Yang-Mills Existence and Mass Gap (Theoretical Physics)
6. Navier-Stokes Existence and Smoothness (Fluid Mechanics and PDEs)
7. The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture (Algebraic arithmetic geometry)

Let me add my personal mixed feelings about the list that seems destined to be famous and influential. Fortunately, it includes important open problems that cover varied topics of pure and applied mathematics. However, it does not do full justice to the vision of mathematics as the language and tool of science and engineering.

10 Examples of new courses

After two sections devoted to enumeration, it is time to take a closer look at some of the novelties of present-day mathematics. Among the many options, the following three examples are taken from Finance, Communications and Fundamental Physics.

The Mathematics of financial uncertainty and risk

A remarkable example of the practical applications of Mathematics developed in the last decades is the so-called financial mathematics. The new financial instruments of *derivatives* are based on, and at the same time motivate this new branch of applied mathematics, which combines stochastic processes, partial differential equations and free boundary problems. The most famous result is the *Black-Scholes model*[66] for

de León.

[65] the solution of each problem would mean for the author a prize of 1 million of dollars. All the information about the prize and the problems can be obtained from the website `http: //www.claymath.org/prize_problems`.

[66] F. Black, M.Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, 1973. Merton and Scholes received the Nobel Prize for Economy in 1997. A first version of the model had been proposed by L. Bachelier in 1900! it took seven decades for the more realistic model and the application to occur.

the option market, which reduces the pricing of an option to the solution of a heat equation (backwards in time). I would like to record this reduction in the (would I say famous?) sequence of formulas

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma\, dB_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + b\, S\, \frac{\partial P}{\partial S} - r\, P = 0,$$

which passes from a stochastic integral, representing random uncertainty, to a deterministic PDE, that allows for price valuation. This is a surprising example of *concept and technique transfer*, made possible by the common mathematical code (and by the fact that F. Black graduated in Quantum Physics). Since there is an inherent instability in those markets, and they have enormous consequences on the economy, both public and private, it is very important to try to apply mathematical methods to find the mathematical clue to the mechanisms that govern the evolution of such phenomena, and to replace guess-work by mathematics in the financial practice. This is a real-world challenge for the new century.

From Fourier analysis to wavelets

We have discussed a while ago the problem faced by Fourier analysis when Du Bois Raymond proposed his example of non-convergent Fourier series, and we want to recall here that the third option out of the problem consisted in changing the basis of functions used in the representation. This is what A. Haar did in 1909[67], thus solving the difficulty in principle, and we can say that this is the remote origin of wavelets, an idea that took a whole century to come of age. Prior to World War II investigation on the issue seems to have followed an exclusively mathematical interest with no application in mind whatsoever. But after the war engineers and applied scientists landed on the idea led by applications, notably in the information theory of Claude Shannon. Eventually the two strands merged and wavelet analysis has become an important intersection of the frontiers of mathematics, scientific computing and signal processing[68].

The mathematical models of Theoretical Physics

The two great scientific revolutions in XXth century Physics, i.e., Relativity and Quantum Mechanics, have impressed on the discipline a strong connection with pure mathematics and the enormous challenge of building a theory to unite both models into a consistent whole. Experimenters and theoreticians have taken up the quest for the "ultimate theory" which would explain all, from the constitution of the atom to the farthest recesses of the Universe. A final theory is still pending (and might be for a time) but great achievements have been obtained. Here are some milestones,

[67] "Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", *Math. Annalen* **69** (1910), pp. 331-371

[68] Most of the data are taken from the book [19], cf. also [16]

all of them deep mathematics. Quantum Electrodynamics (QED) was developed to describe electromagnetic interaction in the framework of Quantum Mechanics, and deals with charges, photons and uses the beautiful Feynman diagrams. Next, Quantum Chromodynamics[69] does a similar job to describe the strong forces among *quarks*, the particles postulated by M. Gellmann and G. Zweig in 1964 as the building blocks of neutrons and protons. Out the four fundamental forces of Nature (gravitational, electromagnetic, weak and strong) the two intermediate have been given a unified theory in 1967 by S. Weinger, Sh. Glashow and Abdus Salam. *Symmetry*, *gauge* and *renormalization group* are keywords in this highly mathematical world. Maxwell's, Schrödinger's and Dirac's equations cede the place to Yang-Mills equations. The work crystallized in the early 70'sin the Standard Model of elementary particles, which explains atomic reality in terms of three generations of quarks and *leptons*. These particles interact through the $SU(2) \times U(1)$ theory for the electroweak force and the $SU(3)_{color}$ theory for the strong force. Mathematics is therefore at the core of the model, in the form of Lie groups, differential geometry (more specifically, connections on a fibre bundle) and partial differential equations.

Grand Unified Gauge Theories attempt to combine both group theories into one. In String Theory the old basic idea of point particles is replaced by the idea of elementary vibrating strings. At the end of the century Superstring Theory proposes a mathematical model for the unification of all forces, hence of all physics. It lacks however sufficient experimental verification; without it a theory is just a theory. And the quest continues. These ideas have motivated quite important mathematical developments associated to names like Atiyah, Donaldson and Witten.

Physicists believe that the combination models-and-experiments will allow us to understand a strange world in which matter, space and time are not what we use to think, where empty space is full of activity and even there could exist many additional space dimensions curled up in ridiculously small distances (a typical distance would be 10^{-35}m, so that we do not see them, *voilà l'astuce*; but we see the mathematics, and in due time will see the consequences, so they say).

11 Facts and opinions

In the words on John Milnor, "pure mathematicians tend to judge any work in the mathematical sciences on the basis of its mathematical depth, the extent to which it introduced new mathematical ideas and methods, or it solves long standing problems". To which I would add that new ideas and methods are tested by their productivity, and mention elegance of proof and insight. He continues thus: "However,

[69]The name refers to the picturesque denomination for the conserved charge, called "color".

when mathematics is applied to other branches of human knowledge, a quite different question must be asked first: to what extent does it increase our understanding of the real world"[70]. Not long ago there was a movement towards separation in Mathematics that seemed to move farther and farther away from each other the cultivators of both genres, pure and applied. And we should not forget the prejudice of many pure scientists against a type of applied mathematics more intent on profit than on scientific standards, and, on the other hand, the prejudice of many applied scientists towards the very artificial worlds of certain pure mathematics. Fortunately, we are witnessing a series of simultaneous events - namely, the explosion of the vitality of theoretical and computational mathematics, the successes of Mathematics in the formulation and solution of the key problems of contemporary Physics, Economy and Engineering, and the unsuspected variety of applications of all branches of Mathematics. These events are deeply modifying the vision of both fields, that tend to merge in one, in the best tradition of the past, as expressed in the words of the XIXth century Russian mathematician P.L. Chebyshev: "Bringing together theory and practice leads to the most favorable results; not only does practice benefit, but the sciences themselves develop under the influence of practice, which reveals *new subjects* for investigation, as well as *new aspects* of familiar subjects"[71].

It is a great mystery for professionals that pure and applied mathematics work like the faces of the same coin. That they are not exactly the same is very well reflected in the words of Albert Einstein: "As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality"[72]. But the ideal and the practical meet with striking results. The amazement before the practical power of Mathematics is most vividly expressed by E. Wigner in a famous statement, where he wondered about "the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"[73].

A word has to be said about the changes in the way mathematics is being done, specially when it is applied. The emergence of the *computer era* has given mathematics new wings, *we can compute!* Efficient and fast computation has become available and cheap at the beginning of the XXIth century, and society needs more. Theorems will always be theorems and a logical derivation is the key to understanding, but the way to discovery will never be the same, and numerical performance is now central to most of mathematics (all of the applied mathematics). The effects on teaching will be no less drastic, but they are still being developed.

Another key feature of modern applied mathematics is *mathematical model-*

[70]See Notices Amer. Math. Soc., 1998.
[71]Taken from [20]. My emphasis.
[72]From *Geometry and Science*, 1921. Included in *Sidelights of Relativity*, Dover, 1983.
[73]Conference in New York, 1959. Published in *Comm. Pure Applied Math.* **13** (1960), 1-14

ing, the art of devising sensible *representations* of different phenomena of the real world in mathematical terms, based on rational *assumptions* that simplify reality to make it computable. J.L. Lions, the late French mathematician who contributed so much to the present relevance of Mathematics in the industrial world, said in 1991: "Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir." And he added: "De toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure." We must bear in mind that a model is only a model and reflects reality in the conflicting way that Einstein describes. But it is everything we have, unless we consider a better model (or even a hierarchy of them). This is the glory and the danger of modeling, a crucial aspect of today's applied mathematics. The current discussion about the predictions of mathematical climate models on global warming on the Earth show how important the issue is and how difficult is to manipulate partial evidence based on partial models and backed up by huge datasets of difficult interpretation. Which brings us back to the merit of the giant modelers of the past like Newton, Maxwell, Einstein and the Quantum people.

As we have seen, a large part of the best Mathematics have originated to explain the working of the physical world. But it must be observed that very often the important consequences of Mathematics have not manifested immediately. The formulation of physical processes in mathematical key in the sense of Galileo requires a maturing process, and this process has its own rules and rhythm, that go from a few years to a one or a few centuries. It would be a blessing if both the administration and education authorities were conscious of this fact in their decision-making.

On a more speculative level, the well-known mathematician and science writer Ian Stewart asserts that it is possible that Mathematics are efficient "because they represent the underlying language in the human brain". In that case we revert Galileo's bet in the sense that we maybe understand the world in mathematical terms because that is precisely the coding system in our mind. But this is a different debate.

Let me summarize some opinions I sustain for the sake of the everlasting debate:

- Only good Mathematics can be good Applied Mathematics. Applied Mathematics as an art which is different and separated from Mathematics as such, simply does not exist[74]. By putting Mathematics to use, application changes them.

- Mathematics is really applied only if it answers an important problem of science, technology, economy, or more generally, society. And we have seen how varied these problems can be.

- Though we can come to judge with a certain degree of reliability what is impor-

[74]I take this forceful idea from A. Rényi, [32], who attributes it in the fiction to Archimedes.

tant today, the task of predicting what mathematics will be important in the long term (so-called strategic planning) exceeds the usual capacity of sensible persons, unless we simply answer in general terms like "good Mathematics will matter" or "the Mathematics of real-world problems will matter". Educated guesses and opinions on specific matters are human and may be useful as personal orientation, but when it comes to decisions and priorities prudence ought to be the rule.

- There is an interesting issue of approach to the job: it has been observed that, when faced with a mathematical riddle, the so-called applied mathematician enjoys constructing and comparing suitable models, and wants this precise riddle *explained* whatever the temporary cost to the perfect logic, while his pure counterpart takes delight in logical proof; only *proof* will rule his day.

So, are pure and applied mathematics the same after all? Or more carefully formulated, are they essentially the same? It is up to the reader to judge. You already know my opinion, but let me add in a relaxed tone a quotation from Yogi Berra[75]: "In theory, there is no difference between theory and practice; in practice, there is".[76]

12 Appendix on Mathematics in Spain

Spain played in a given moment of the late Middle Ages a significant role in the transmission of Arab culture to the West and there even existed a king in Seville[77] who wrote poetry and promoted Mathematics. Al Andalus, the Arab Spain, had solid interests in the sciences, in particular medicine and astronomy, with fine scholars like Azarquiel (or Al-Zarkali, active in Toledo) who composed astronomical tables. The Indian number system based on position was already in use in Al Andalus in the IX century.[78] After its takeover by the Christians (1085 a.C.), Toledo, the city of three cultures -Christian, Arab and Jewish- was for centuries a main center of learning with its School of Translators, which brought into Latin the works of Greek and Arab authors[79]. In another direction, the Majorcan Ramón Llull devised in his *Ars Magna* a whole art of algorithmic reasoning in which we can see the early precedents of the Boole algebra and the computer logic (Llull, who lived in the XIIIth century, is at the

[75]famous American baseball player, well-known for his funny quips.

[76]Here is a joke on the different views of mathematics: engineers say that the equations approximate reality, while physicists think that reality approximates the equations; on their side, mathematicians are astonished at the idea of a connection between 'their' equations and reality.

[77]Alfonso X, called the Wise.

[78]The first real Andalusi school of mathematics seems to have been that Maslama of Magerit, i.e., Madrid, in the Xth century.

[79]The Monastery of Ripoll in Catalonia also had a world-famous library.

same time one of the oldest classics of the Catalan language). A century later nautical maps called *portulanos* from Majorca were the top of the art, and the names of Soler and Cresques are well-known. The latter, a Jew, participated in the organization of the Portuguese nautical school, which was at the origin of the discovery of the way to the Indies around Africa, and, indirectly, also of America.

But the medieval and early Reinassance hopes failed later in Spain, so that mathematics (and other sciences) have had a very humble history for centuries. While the Spanish literature and art stand at the peak of worldwide creation since the XVII th century and up to our time, it is apparent that no Spanish names appear in the famed textbooks of mathematical learning. There are in such texts numerous concepts and results named after authors belonging to the nations with a great scientific tradition: French, English, German, Italian, in more recent times Russian and American,.., as there are also frequent examples of other countries which due to their size and circumstances did not play such a prominent role in history but count in science. During these centuries of glorious development, let us say from Galileo to Einstein, Spanish names are not mentioned. Could history have been different? King Philip II realized the need for science and created a Mathematical Academy in Madrid (1582) under the direction of Juan de Herrera, the architect of El Escorial, but the institution did not take root and closed a few years later, while similar initiatives abroad gave birth to the Royal Society in England, the Académie de Sciences in France, and so on. There have been a number of brilliant isolated men, worthy of mention, like Pedro Ciruelo, Omerique, Jorge Juan and Echegaray, but a school never took root until very recently. For centuries Spanish students and professors were forbidden to travel and learn in foreign countries, a quite strong safety rule that prevented at the same time heterodoxy, science and progress.

This is not the place for a detailed study of History, for which we may refer to the specialists[80], so let me proceed by pointing out how we have recently come to a quite favorable present. Spain appeared to abandon its deep mathematical lethargy in the first half of the last century and the figure of Julio Rey Pastor can serve as a reference to a remarkable effort in making our country up-to-date, an effort based on a couple of main ideas: in the first place, by study abroad in the great foreign centers, and then by the import of the problems and topics that occupy the worldwide community. This method had a striking success in the development of North-American mathematics, and was having good results in our country in the first decades of the XXth century. However, our ill-fated history, and mainly in that respect the civil war, destroyed the effort, or in the best cases forced the scholars to exile, which then gave abundant fruit on Latin-American land, as is the case of well-known mathematicians like Luis Santaló and the blooming of Argentinian

[80]like Juan Vernet, whose work [43] is used above.

mathematics. With a few very honourable exceptions, mathematical activity after the war and up to the 60s returned to the slumber of the past. Little by little began the awakening of Spain to normal mathematical life, specially in the 70s. After a decade of enormous effort of a generation that learnt from the original sources, taught from the most reliable textbooks in the classrooms, organized research seminars and traveled or sent their young students abroad, regular publication in recognized journals and participation in international events increased. In the 80's there came the decade of original creation, reflected in the number and level of the publications in good journals[81]. The signs of good times became many and unequivocal, and we may conclude that Spain is no longer different ("Spain is different" is a famous touristic motto dating from Franco's time, which had an obvious negative reading when applied to the troubles of Spain to become a modern country, and was therefore felt critically by the democratic opposition). The official indicators allow us to put figures to this evidence of change. From them we may deduce two facts which have initially surprised many:

(a) That Spanish mathematics have passed from a very modest place in 1980 (0.3% of the world production by the ISI Data Base) to a very honourable position at the moment, immediately after USA, Germany, England, France, Russia, Italy, Japan and Canada, with a production in relevant journals which has been multiplied by a factor of more than 10 and represents in 2001 a worldwide figure of more than 4.18% (ISI).

(b) That in the comparative outlook of Spanish science Mathematics figures among the best placed specialties.

Another consequence of the creative state of Spanish mathematics is the presence of numerous and valuable textbooks and research monographs in prestigious collections. Let it be said that Spain, which has reached a solid position in research, also counts on a tradition in mathematical education, with a very relevant role in ICMI.

Finally, the trend towards the computational and applied aspects of mathematics, with the emphasis on mathematics as the modeling tool per excellence, is now strongly felt in a community formerly very exclusively tied to pure mathematical thinking. Opening the windows to the wide world outside is an enormous challenge for the health of our mathematics and the welfare of future generations, and all efforts are welcome. Let in the fresh air!

[81] At this moment it is befitting to recall Galileo's words "Science knows only one commandment: contribute to science", according to B. Brecht in his *Life of Galileo*

13 Conclusion

This is the end of our journey. Remembering Galileo, I would like to conclude as follows: the book of Nature is open before our eyes for us to admire in its infinite, changing and surprising beauty. Mathematics, as the language of Science, is here to help us understand it: besides, it may allow us to use it and exploit it, and this aspect is loaded with promises and dangers, as all human endeavours. I am confident that the mathematicians of today will make their contribution to understanding and improving the Information Society whose birth we have had the fortune to witness. In the era of computers and information *reality is in the number*, as Pythagoras would have liked. Or at least a big chunk of it.

- • ♠ • -

ACKNOWLEDGMENT AND FINAL REMARK. This article originated two years ago with the efforts of the Spanish Mathematical Societies to celebrate the World Mathematical Year 2000. I am indebted to a large number of colleagues for support, information and opinions. I want to especially thank the members of the Spanish WMY2000 Committee, who made the whole effort possible. My colleagues at UAM, too many to be quoted, corrected errors of former versions and supplied lots of information and positive criticism. But I must mention A. Cuevas for explaining to me the importance of Optimization and Statistics in the modern world. I am also indebted to the Universities of Valladolid, Valencia, Bilbao, Oviedo, Autónoma de Madrid and CSIC for organizing the lectures where the idea of this expository article was first tried out on real patients.

The paper was completed during a stay at The University of Texas at Austin. I am grateful to the Dpt. of Mathematics and TICAM for their hospitality, and specially to Serge Prudhomme for reading carefully the whole manuscript. I am happy to acknowledge conversations with I. Babuska, G. Barenblatt, L. Caffarelli, A. Chorin, P. Degond, A. Friedman, I. Gamba and T. Oden during the spring of 2001. Hopefully, some of their authorized opinions may have found a place in these pages. Historical data were drawn from different sources, some of them quoted in the references; besides, it is a pleasure to mention the websites of Encyclopaedia Britannica and The MacTutor History of Mathematics Archive, of the Univ. of St Andrews.

The Appendix reflects ideas of the author on the present of Spanish Mathematics taken with minor additions from reference [42], first section. More on the same subject in [41]. Interesting sources in Spanish are the *Boletines de SEMA*; the *Gaceta de la*

RSME[82] (cf. vol. 3, 1 (2000)) and *Revista Española de Física*, vol 14, no. 5, issues devoted to the state of Mathematics on the occasion of the World Mathematical Year celebration. See also [1, 8, 18, 26, 30, 39]. Finally, the list of references below reflects readings of the author while compiling this text and is not meant as a selection of the best reading on the subject.

References

[1] V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur, "Mathematics: Frontiers and Perspectives", AMS Publications, 2000.

[2] I. Babuska, *Courant Element: Before and After*, in "Finite Element Methods", edited by Krizek, Neittaanmäki and Sternberg, M. Dekker Inc, New York, 1994.

[3] G. I. Barenblatt, *George Keith Batchelor and Daniel George Crighton, Applied Mathematicians*, Notices American Math. Soc., vol 48, no 8 (2001), 800–806.

[4] J. L. Casti, "Five Golden Rules", John Wiley, New York, 1996. "Five More Golden Rules", John Wiley, New York, 2000.

[5] G. Chaitin, "The limits of mathematics", Springer, Singapore, 1998.

[6] B. Cipra, "What is happening in the Mathemaitical Sciences", vols. 1–4, Amer. Math. Soc, Providence, RI.

[7] COMAP, "Las Matemáticas en la vida cotidiana". Addison Wesley - Universidad Autónoma de Madrid. 1998 (Spanish). English: S. Garfunkel et al., "Introduction to Contemporary Mathematics", W.H. Freeman & Co, New York, 1988.

[8] B. Engquist (Editor), W. Schmid (Editor), "Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond", Springer Verlag, Berlin, 2001.

[9] R.P. Feynman, "Feynman Lectures On Physics (3 Volume Set)", Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. [1963-65] ,

[10] R.P. Feynman, "Six Easy Pieces: Essentials of Physics Explained by Its Most Brilliant Teacher", Helix Books, 1995 (Addison-Wesley Longman, 1996), and "Six Not-So-Easy Pieces: Einstein's Relativity, Symmetry, and Space-Time", Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. 1997.

[82] SEMA is Sociedad Española de Matemática Aplicada, and RSME stands for Real Sociedad Matemática Española

[11] I. Fonseca et al., "The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa", Round Table at 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona, july 2000.

[12] A. Friedman et al., "Mathematics in Industrial Problems", (a 10 volume collection), IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag (1988-1998).

[13] A. Friedman, J. Lavery, "How to Start an Industrial Mathematics Program in the University", SIAM Report, Philadelphia 1993

[14] J. Gleick, "Chaos: Making a New Science", Penguin Books, Nueva York, 1987.

[15] G. H. Hardy, "A Mathematician's apology", Cambridge, 1940.

[16] E. Hernández, G. Weiss, "A first course on wavelets. With a foreword by Yves Meyer", Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[17] "Mathematical Developments arising from Hilbert Problems", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII, Amer. Math. Soc, Providence, 1976.

[18] A. Jackson, *Mathematical challenges of the XXI century*, Notices Amer. Math. Soc., vol. **47**, no 10 (2000), pp. 1271-1273.

[19] S. Jaffard, Y. Meyer, R.D. Ryan, "Wavelets, tools for Science and Technology", SIAM, 2001.

[20] A.I. Khinchin, "Mathematical Foundations of Information Theory", Dover, 1957 (Papers appeared in 1953, 1956 in Uspekhi Mat. Nauk in Russian).

[21] M. Kline, "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", Oxford Univ. Press, 1972.

[22] M. Kline, "Mathematics. The loss of certainty", Oxford Univ. Press, Oxford, 1980.

[23] J. P. Maury, "Galileo, el mensajero de los astros", Claves, Ed. B.S.A., Barcelona, 200 (Spanish).

[24] N. Metropolis, J. Howlett, G. C. Rota, eds., "A History of Computing in the Twentieth Century", Academic Press, 1980.

[25] P. A. Meyers, "Encyclopedia of Modern Physics", Academic Press, San Diego, 1990.

[26] Mitteilungen der Deutschen Math. Vereinigung *(Notices of the German Math. Union)*, 2-1998, contains a report on the Future of Mathematics by D. Mumford, A. Friedman, L. Lovász, Yu. Manin, G.C. Rota, R.B. Jensen and R. Penrose.

[27] K. Moriyasu, "An elementary primer in Gauge Theory", World Scientific, Singapore, 1983.

[28] J. Muñoz Santonja, "Newton, el umbral de la ciencia moderna", col. La Matemática en sus personajes, vol. 3, Nivola ed., Madrid, 1999 (Spanish).

[29] I. Newton, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", Pepys, London, 1687. In Spanish: "Principios matemáticos de la Filosofía Natural", Alianza Ed., Madrid, 1987.

[30] Obra Colectiva, "Fotografiando las Mathematics", Carroggio SA de Eds, Barcelona 2000 ("Photographing Mathematics", in Spanish).

[31] J.T. Oden et al., "Research directions in computational mechanics", Report of the US National Commitee on Theoretical and Applied Mechanics, Washington DC, 2000.

[32] A. Rényi, "Dialogues on Mathematics", Holden-Day, San Francisco,1967.

[33] Revista Española de Física, vol 14, no. 5, año 2000. Special number "La Física y las Matemáticas".

[34] J. M. Sánchez Ron, "El siglo de la ciencia", Taurus, Madrid, 2000 (Spanish).

[35] M.M. Schiffer, L. Bowden, "The role of Mathematics in Science", The Math. Assoc. of America, New Math. Library vol. 30, 1984.

[36] J. Simmons, "The scientific 100", Citadel Press, Kensington Publ. Corp, Nueva York, 1996.

[37] S. Singh, "The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography", Doubleday & Company, 1999.

[38] D. Stauffer, H.E. Stanley, "From Newton to Mandelbrot, A Primer in Theoretical Physics", Springer, Berlin, 1991.

[39] I. Stewart, "The Problems of Mathematics", Oxford Univ. Press, 1992.

[40] M. Tanur, F. Mosteller et al., "Statistics: A Guide to the Unknown" Brooks/Cole, 1989.

[41] J. L. Vázquez, *Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles*, Gaceta de la Real Soc. Matemática Española, vol. 3, 1 (2000), (Spanish) pp. 9-22. Cf. also `http://dulcinea.uc3m.es/ceamm`.

[42] J. L. Vázquez, *Mathematical Events in Spain in the Year 2000*, Intelligencer, Springer-Verlag, July 2000, pp. 12-14.

[43] Juan Vernet Ginés, "Historia de la Ciencia Española", Editorial Alta Fulla, 1998 (Spanish).

PERMANENT ADDRESS:
Juan Luis Vazquez, Dpto. de Matemáticas,
Univ. Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, España
Tel. 34-91-3974935, FAX 34-91-3974889
email: `juanluis.vazquez@uam.es`
htpp://www.adi.uam.es/~jvazquez

Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera

por Juan Luis Vázquez
Departamento de Matemáticas
Univ. Autónoma de Madrid

*No te preocupes demasiado por lo que son las Matemáticas
antes de probar tu suerte. Ya lo irás viendo.*

RESUMEN

Los matemáticos suelen decir que la esencia de las Matemáticas reside en la belleza de los números, figuras y relaciones, y hay una gran verdad en ello. Pero la fuerza motriz de la innovación matemática en los siglos pasados ha sido el deseo de entender cómo funciona la Naturaleza. Este aspecto fundamental es pocas veces mencionado.

La Matemática forma junto con el método experimental el esquema conceptual en que está basada la Ciencia moderna y en el que se apoya la Tecnología, existiendo estrechas interacciones entre ellas. Sobre estas bases nació la Sociedad Industrial hace varios siglos, y la nueva Sociedad de la Información se construye en el presente siguiendo las mismas pautas.

En el artículo damos un esbozo de esta relación con la ciencia y la tecnología, de cómo se puso en marcha y de los héroes que la han hecho realidad, seguido de una ojeada al futuro, en que la relación se extiende prácticamente a toda la sociedad. Se añade un corto comentario sobre la Matemática en España.

1 Introducción. Esencia y papel de las matemáticas

La Matemática es una disciplina intelectual autónoma, uno de los exponentes más claros del poder creativo de la mente humana. Por otra parte juega un papel fundamental en la Ciencia moderna, tiene una marcada influencia sobre ella y a su vez se ve influenciada por la ciencia de una manera esencial. Estas son, brevemente presentadas, las dos concepciones que simbolizan las maneras diferentes de ver el gran edificio que es la Matemática actual. Estas opciones se reflejan en las populares denominaciones de Matemática Pura y Aplicada. Pero entonces, ¿es que existen dos matemáticas diferentes? y, si esto es verdad, ¿pueden coexistir pacíficamente e interactuar recíprocamente, o es que viven de hecho separadas e incluso hostiles una a la otra? En el presente artículo intentaremos mostrar que, hoy como ayer, ambas visiones de la matemática son las caras de una misma moneda, que nos parecen a veces tan diferentes, a veces tan semejantes.

Un arte puro. Una primera dimensión de las matemáticas es en efecto el aspecto puro, la matemática como un arte por derecho propio, un juego que se juega en nuestras mentes. La Matemática es un arte que expresa la belleza en forma de axiomas, teoremas y relaciones lógicas o numéricas y atrae al investigador precisamente por su perfección lógica, siendo uno de los ejemplos más claros y convincentes de la capacidad humana para el razonamiento y el análisis. Ella impone orden y armonía donde sólo veíamos desorden y caos.

Ésta es la dimensión más próxima al investigador y, como toda forma pura de arte, tiene una fascinación que explica por qué los profesionales consagramos una parte enorme y bastante exclusiva de nuestras vidas a ella. Resulta natural que los matemáticos profesionales tiendan a ver su ciencia desde este punto de vista del arte en sí mismo, con sus conceptos, conjeturas, resultados y métodos de prueba, con sus áreas venerables: la aritmética, el álgebra, la geometría y el análisis, y los nuevos retoños: la estadística, el cálculo de probabilidades, la lógica matemática, la computación,... Y estimen sobre todo sus *perfectas deducciones lógicas.* Grandes sabios han profundizado en esta dirección: PITÁGORAS ve en los números la clave de la realidad y PLATÓN ve en el mundo de las ideas un mundo de orden más perfecto que el mundo físico cotidiano. De hecho, pocos matemáticos profesionales han sido totalmente ajenos al sentimiento de que la verdadera Matemática habita más allá, en un mundo ideal, esperando a ser descubierta por el artista. En sus fabulosos 13 libros de *Los Elementos,* EUCLIDES de Alejandría (325-265 a.C.) estableció a la vez la teoría y las reglas de un juego que sigue sus pautas hoy como hace 22 siglos. Pocos artistas a lo largo de la Historia podrán decir lo mismo sobre la repercusión y perennidad de su obra: las demostraciones de Euclides son aún hoy día "las demostraciones" en los temas por él tratados. Tal es su influencia intelectual que en el siglo XX los matemáticos asociados bajo el nombre de guerra de Nicolás BOURBAKI osaron repetir la histórica gesta con unos actuales *Elements de Mathématique*[1]. La matemática es pues un arte autónomo que halla la verdad dentro de sí misma. Recordemos a Carl

[1]Con un éxito innegable a pesar de una cierta división de público y crítica.

G. J. JACOBI que sostuvo que la matemática sólo existe *"para honor del espíritu humano"*. Claro que de ahí también se deriva una cierta concepción popular, con su halo romántico pero hoy día un tanto descaminada, que ve al matemático como un sabio irremediablemente distraído, con poca o ninguna mente práctica.

Otra visión, otro papel. ¿Refleja lo anterior el cuadro completo de la Matemática? En absoluto, *la Matemática es eso y mucho más*, hay un modo totalmente distinto de verla y de hacerla que queremos presentar. Junto con el método experimental, las matemáticas son la base sobre la que se asienta la Ciencia moderna y, como consecuencia, en ellas se apoya el desarrollo tecnológico de nuestras sociedades. Penetra hoy todos los aspectos de la sociedad contemporánea desde la ingeniería a la información, el mundo de la empresa, la salud, la administración y las finanzas, sin olvidar el movimiento de las disciplinas sociales hacia el estatus de ciencias, que significa en otros términos y con los matices apropiados, el uso combinado en estas disciplinas de los métodos matemáticos y experimentales. La importancia práctica de las matemáticas en las ciencias es indiscutible, y no está de hecho en discusión pues la mayoría aplastante de los científicos es bien consciente del *valor instrumental* de unas buenas dosis de matemáticas en la ciencia. Así, una parte cuantitativamente importante de las matemáticas que son enseñadas en las universidades de todo el mundo se consagra a la educación de ingenieros, físicos, químicos, biólogos, informáticos, economistas y profesionales de otras varias disciplinas.

Sin embargo, creemos que tal aprecio no hace justicia al papel que las matemáticas juegan en la sociedad. Sostenemos que el *papel de la Matemática que es aplicada* en diversos contextos sociales va más allá de esta descripción, es más *esencial*. De hecho:

(i) las matemáticas han jugado un papel fundamental en la formulación de la ciencia moderna desde sus comienzos; una teoría científica es una teoría que dispone de un modelo matemático adecuado;

(ii) las matemáticas que se pueden aplicar hoy día abarcan todos los campos de la ciencia matemática y no sólo ciertos temas especiales; se trata de matemáticas de todos los niveles de dificultad y no sólo de resultados y argumentos sencillos;

(iii) las ciencias exigen hoy como ayer nuevos resultados de la investigación y plantean nuevas direcciones de estudio a los investigadores. Pero el ritmo de la sociedad contemporánea hace los plazos sustancialmente más cortos y la exigencia más urgente;

(iv) las capacidades del cálculo científico han hecho de la *simulación numérica* una herramienta indispensable en la comprensión, diseño y control de los procesos industriales.

(v) cuando se habla de la utilidad de las matemáticas para las ciencias se incluye implícitamente en este nombre la técnica y la ingeniería. Pero hoy día los contornos son mucho más amplios y difusos; éste es un aspecto de gran importancia en el presente y el futuro de las matemáticas.

En este artículo trataremos de este aspecto en que *la Matemática es el idioma* en que están escritas las páginas de la ciencia; gracias a ella ha habido un desarrollo del combinado ciencia-tecnología que ha cambiado la vida del ciudadano de las sociedades tecnológicamente avanzadas en los últimos cuatro siglos *de una manera más radical que la Revolución Neolítica había hecho en los noventa siglos precedentes*, y el cambio ha sido más dramático en las últimas décadas que en siglos enteros anteriores.

Es un hecho bien conocido por los expertos que la práctica diaria de las ciencias físicas y la ingeniería utiliza cantidades enormes de matemática del más alto nivel. Es más, los mismos conceptos con que se formulan sus teorías son esencialmente *los conceptos matemáticos*. En las últimas décadas hemos presenciado como la tendencia hacia la matematización alcanza a otras disciplinas, como la Economía, particularmente el mercado financiero, ramas de la Química, la Biología y la Medicina, e incluso las ciencias sociales.

Es un hecho comprobado que la maquinaria matemática, sea imponente o no lo sea, *se oculta muy a menudo cuidadosamente* al público en los manuales o en los escritos de divulgación, como si no existiese, pues se supone que no será bien vista del lector (o que éste no la comprenderá). Pero los nuevos tiempos traen cambios saludables: gracias a la simpatía del público por las proezas del cálculo y la informática, las matemáticas subyacentes van saliendo a la luz.

Repercusión de la Matemática. En manos del científico, *la Matemática debe permitir asimilar los datos y entender los fenómenos*. En manos del ingeniero, es la herramienta que hace posible construir un *modelo* numérico o cualitativo cuyo análisis permitirá *tomar decisiones, diseñar artefactos y controlar procesos de manera eficaz y fiable*. Esta actividad es lo que, a falta de un nombre mejor, llamamos **Matemática aplicada**. Cubre las áreas clásicas como la Física matemática y los Métodos Matemáticos para la Ingeniería, pero tiene hoy día contornos más amplios con el advenimiento del cálculo científico y la simulación numérica. La modelización, la simulación computacional, y el análisis de datos son herramientas esenciales en la ciencia y la industria modernas. La Matemática aplicada es simplemente **la Matemática de la realidad**, es decir, del mundo real, sea lo que sea lo que esta frase significa para cada lector individual.

Señalemos que hay aún otras visiones complementarias de las matemáticas: su aspecto cultural, su importancia en la enseñanza como vehículo del pensamiento racional, su importancia para comprender el mundo diario (las "matemáticas para el hombre de la calle"), su aspecto de juego intelectual (el reto de resolver un problema). La Matemática es al mismo tiempo la ciencia de lo exacto y el cálculo de lo probable. Es la ciencia del razonamiento abstracto y simbólico. Es también hoy día sinónimo de virtuosismo computacional, de capacidad y efectividad de procesar información, tan importante para el mundo que se gesta. Es el mundo del científico que trabaja con un trozo de papel y hoy también el mundo de la modelización, el cálculo y el control de procesos industriales. Todo ello forma también parte del múltiple legado de las matemáticas[2].

A continuación dirigimos nuestra atención hacia el pasado y presente de la Matemática Aplicada. El lector puede encontrar conveniente saltar en una primera lectura la información contenida en las notas a pie de página. Además, varias fórmulas famosas y ecuaciones importantes aparecerán aquí y allá en las páginas. ¡El propósito no es en absoluto que sean estudiadas como parte del texto! Es más bien recordar al lector iniciado su belleza y relevancia, y al mismo tiempo dejar claro que no existe ningún *camino real* (es decir, regio) de acceso a la Matemática: la divulgación tiene sus límites y una comprensión real de los temas aquí perfilados implica un estudio serio. En el capítulo final volveremos a tratar de las opiniones que se debaten y los hechos que sustentan tales opiniones.

2 Herederos de Galileo y Newton

Dos grandes figuras históricas fijaron el futuro *papel estelar* de las matemáticas en los momentos en que nacía la Ciencia moderna. GALILEO *lo formuló,* NEWTON *lo demostró.* No les faltaron precursores. Habría que recordar que en la Historia Antigua PITÁGORAS de Samos (569a.C.-475a.C.) sostuvo que *todo es número* y encontró la maravillosa conexión entre la Música y la Aritmética, mientras ARQUÍMEDES de Siracusa unió Geometría y Mecánica en el siglo III a.C. (m. 212 a.C.). Y un siglo antes de Galileo, el genio universal de LEONARDO DA VINCI *intuyó* el papel central de la Matemática en la Ciencia. Una pléyade de grandes matemáticos, los héroes de nuestro relato, los siguieron[3]. Se puede decir con Newton que los matemáticos que se ocupan de la aplicación de su arte otean el futuro desde los hombros de gigantes[4].

---

[2]sobre estos asuntos ver [44].

[3]En el recorrido histórico que sigue, los nombres de Galileo y Newton irán acompañados de otros matemáticos ilustres, a algunos de los cuales adjudicaremos un papel relevante. Tal selección, que nos ayudará a fijar los hitos principales y a conocer a los héroes de nuestra particular aventura, es sin duda injusta con otros personajes de la talla de Fermat, Leibniz o Gauss, de lo cual queremos dejar constancia y sólo la brevedad (el *estrecho margen* del que hablaba Fermat) y lo concreto de nuestro objetivo nos sirve de excusa, pues el propósito que tenemos en mente no es la historia de la ciencia.

[4]Tomado de una frase de Newton sobre sus predecesores en carta a R. Hooke, 1675: “If I have seen farther than others, it is by standing on the shoulders of giants”. He tratado de incluir en el texto y notas algunas de las frases más famosas de matemáticos y científicos sobre la Matemática y su aplicación.

Procedamos por partes: es verdad que desde la más remota antigüedad las matemáticas han estado relacionadas, incluso motivadas, por problemas prácticos. La Aritmética se origina con las actividades de contar y sumar, la Geometría proviene de medir líneas, superficies y cuerpos. Pero también es verdad que la Matemática, como ciencia lógico-deductiva, tal como fue elaborada y nos fue legada por los griegos, de Pitágoras a Euclides, tuvo una base netamente intelectual, digamos ideal, que siempre ha conservado desde entonces y que es parte fundamental de la matemática pura, es decir, de las matemáticas en sí mismas. Este proceso intelectual vive en su propio mundo y no debe nada de su mérito o belleza a la posible utilidad o aplicación práctica, no más que un poema, una sinfonía o un cuadro. Un silogismo fácil y demasiado frecuente nos llevaría de aquí a concluir que la auténtica matemática vive esencialmente ajena a la aventura de la ciencia y la tecnología. *Este silogismo es falso* por mucho que haya sido sostenido por no pocos matemáticos, y nos proponemos demostrarlo usando la obra y las opiniones de las grandes figuras. Pues *la historia nos muestra que la simbiosis con la ciencia y la tecnología ha sido fundamental y fructífera y que las matemáticas deben mucho de su ser actual y de sus temas estrella a sus compañeras de aventura. Y viceversa.*

Los dos pilares. Como es bien sabido, la Ciencia moderna surgió en Europa al final del período del Renacimiento. No se basa sólo en las matemáticas. El pilar fundamental del edificio en germen fue formulado por el filósofo y político inglés Francis BACON hacia 1620 y consiste en el *método experimental*[5]. El objeto preferente de la filosofía se orienta hacia la Naturaleza, que debemos leer y comprender, y eventualmente controlar; la observación es el medio para la comprensión y el experimento es el test de nuestras predicciones. Las ciencias se formaron alrededor de este método, primero la física, luego las demás: biología, geología y química.

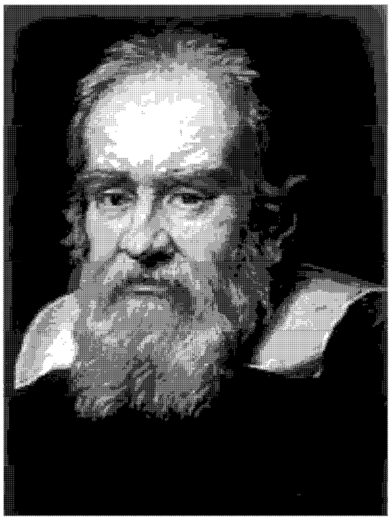
Las matemáticas son desde el principio **el otro pilar de las ciencias**. Fue Galileo GALILEI (1564-1642) quien más claramente señaló a principios del siglo XVII ese rumbo para las nacientes ciencias. Suya es la famosa cita tomada de su carta "Il saggiatore"[6] que reproducimos aquí en detalle:

"La filosofía está escrita en ese gran libro que constantemente está abierto ante nuestros ojos, el Universo, pero no puede entenderse a menos que se aprenda primero a comprender el idioma en que está escrito, a entender sus caracteres. Está escrito en el lenguaje matemático, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas..."[7].

[5] El método inductivo se presenta en su trabajo *Novum Organum* o *Nuevo Instrumento*, 1620.

[6] 1623, cf. Opere, VI, pág. 232; "El Ensayador".

[7] Las famosas palabras no suelen imprimirse en su italiano (toscano) original: *"La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne'*



Galileo Galilei

Galileo era un claro defensor del método experimental, al que contribuyó con sus famosas observaciones astronómicas y mecánicas[8]. Como hemos dicho, la actitud de Galileo tenía precedentes, siendo los más notables los de Pitágoras y Arquímedes[9] en la Antigüedad y el de Leonardo da Vinci (1452-1519)[10] un siglo antes, pero la formulación de Galileo fue decidida y su propuesta fue puesta en práctica, pues sucedió en el contexto histórico adecuado; corroyó las bases del aristotelismo y la escolástica dominantes hasta entonces en el mundo intelectual. Dio fruto en breve tiempo y los científicos nos vemos reflejados en él.

De hecho, las filosofías son poca cosa si se quedan en palabras y polémicas, si no son llevadas a término. La gloria del siglo XVII reside en una serie de grandes filósofos-científicos (llamados en aquel entonces *filósofos naturales*), quienes, sin olvidarse de la metafísica, se lanzaron decididamente en pos del conocimiento de la Naturaleza y de la invención matemática: René Descartes estudió los principios del arte de razonar, así como la mecánica y el universo; ligó la geometría al álgebra y escribió "El

quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola, senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

[8]Dejó escritas sus ideas sobre la física, las matemáticas y la ingeniería en el libro *Discursos y pruebas matemáticas acerca de las dos nuevas ciencias*, escrito en Florencia antes de 1633, pero sólo publicado en el extranjero en 1638 después de los problemas con la Iglesia. Las dos nuevas ciencias son la mecánica y la ciencia del movimiento. En 1995 la sonda espacial *Galileo* alcanzó Júpiter y con él los 4 planetas descubiertos por el sabio en 1610.

[9]Arquímedes es uno de los "grandes" de la Matemática Pura y Aplicada. Universalmente conocido por sus contribuciones a la Mecánica, que se puede decir que fundó como ciencia teórica, y a la Hidrostática (principio de Arquímedes), fue también un genial matemático que aplicó su intuición mecánica a la Geometría e inventó el "método de exhaustión" para el cálculo de áreas y volúmenes limitados por figuras curvas; este método implica aproximaciones sucesivas y es precursor del concepto de límite que tardará 19 siglos en salir a la luz. Su cálculo del número π fue un récord durante muchos siglos. También invento una notación para los números muy grandes. La matemática griega tuvo una brillante rama aplicada a la Astronomía con Aristarco de Samos y Eratóstenes de Cirene.

[10]Los intereses de Leonardo, un genio verdaderamente universal, abarcan la pintura y la escultura, la ingeniería y la arquitectura, la física y las matemáticas. Científico y visionario, dibujó los planos de un objeto volante (el precursor del helicóptero) y acuñó el término turbulencia en los fluidos. He aquí una cita pertinente de Leonardo: "Ninguna certeza existe donde no es posible aplicar la matemática o en lo que no puede relacionarse con la matemática". Por si quedaba duda de la opinión del gran hombre.

Discurso del Método"[11]; Blaise PASCAL escribió sus filosóficas "Pensées"pero también investigó los principios de los fluidos (como la presión), la geometría, el cálculo y las probabilidades[12]. Y análogamente hicieron Pierre de FERMAT, Edmond HALLEY, Christiaan HUYGENS y Gottfried W. LEIBNIZ, un matemático, lógico y filósofo del mayor renombre.

Estamos ya listos para conocer a uno de los caracteres y de los momentos más cruciales en la historia de la ciencia. En efecto, el siglo alcanza su culminación con la figura de Isaac NEWTON (1642-1727), quien demuestra el éxito indiscutible de la propuesta de Galileo aplicada a la mecánica. Ataca los problemas básicos debatidos durante el siglo y

ISAAC NEWTON

(i) concluye que el movimiento de cuerpos sólidos sigue una ley matemática simple que relaciona la segunda derivada del espacio (respecto al tiempo) con una entidad invisible *pero real*, la fuerza. En términos matemáticos, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$;

(ii) al aplicar esta teoría a los cuerpos celestes, concluye que se mueven en sus órbitas de acuerdo con la ley de atracción universal. En fórmulas, $F = Gmm'/r^2$.

Para estudiar matemáticamente los movimientos resultantes de estas leyes, descubre lo que nosotros llamamos Cálculo Infinitesimal y resuelve las ecuaciones diferenciales. Es más, la formulación misma de sus leyes no es posible sin los nuevos conceptos tomados del Cálculo Diferencial e Integral, que lleva los nombres de Newton y Leibniz, y que fue inventado combinando las intuiciones de la mecánica y de la geometría[13].

En 1687, en que se publica su trabajo monumental, los *Principia*[14], la mecánica queda sólidamente fundamentada sobre las mismas bases que tiene hoy día. La ma-

[11] *Le Discours de la Méthode*, Leiden, 1637, un trabajo importante en la historia de la ciencia. Su trabajo *Les Météores* es considerado el primer esfuerzo por poner el estudio del tiempo atmosférico sobre una base científica. Su más famoso dicho es sin duda el *"cogito ergo sum"*, "pienso luego existo".

[12] Y se ocupó de construir una máquina de calcular de la que volveremos a hablar.

[13] Para situar a Newton en la perspectiva apropiada hemos de combinar su formación matemática con el conocimiento astronómico que heredó de Tycho Brahe, Johannes Kepler y Galileo.

[14] *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, es decir, "los Principios Matemáticos de la Ciencia".

temática no es sólo una herramienta indispensable, en realidad *es el idioma en que se concibe y expresa la Ciencia*, ésta es la razón del título del libro. Desde ese momento la descripción de la dinámica y la evolución de los sistemas mecánicos es una parte esencial de las matemáticas. Sigue un periodo de enorme desarrollo, durante el cual la matemática intenta cumplir este nuevo papel fundamental.

Newton es considerado generalmente el científico más influyente en la historia de la humanidad, cf. [38]. Permítasenos aportar algunos datos adicionales para entender bien la grandeza de su legado. Podemos anotar a su crédito los fundamentos de la mecánica y la astronomía, del cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales; pero también estudió la naturaleza de la luz, puso los fundamentos a la óptica y contribuyó con notables adelantos técnicos como el telescopio de refracción. Además de todo esto, estudió los fluidos que se llaman hoy día newtonianos, explicó y calculó el funcionamiento de mareas por medio de la atracción lunar, computó la velocidad del sonido (y también se interesó por la teología, la alquimia y la astrología, rasgo bastante común de esos tiempos que no debe extrañarnos en un gran científico)[15]. Su prestigio entre sus contemporáneos era enorme y los filósofos más brillantes del siglo XVIII (Hume, Kant, Voltaire[16]) estudiaron su trabajo y creyeron posible extender su fabuloso éxito a todos los campos de la filosofía, tarea que ha resultado ser de una dificultad extrema. De hecho, todavía estamos ocupados en ella.

La inmensidad de la tarea de entender la Naturaleza no escapó a una persona tan penetrante como Newton, con todo su éxito. Una de sus opiniones más famosas dice como sigue: *"I do not know what I will look like to others; to myself, I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me".*

3 El siglo de la Razón y de las Luces

Durante los tres siglos siguientes una parte de ese océano se ha visto colmado de verdad, ciencia y matemáticas. La ciencia y la tecnología, bases de la Revolución Industrial, han progresado con las teorías, razonamientos y experimentos. Como consecuencia, la sociedad del siglo XX ha cambiado más radicalmente con respecto al siglo XVII que todo lo que había pasado en varios miles de años antes, desde el

[15] "From the same principles, I now demonstrate the frame of the System of the World".

[16] Merece la pena recordar que los Principia fueron traducidos al francés por la amiga del último, la Marquesa de Châtelet, con su colaboración, en 1756. Mujer muy notable, la Enciclopedia Británica la describe como "Gabrielle-Émilie Le Tonnelier du Breteuil, Marquise du Ch., French mathematician and physicist who was the mistress of Voltaire". Sólo en el texto del artículo se entera uno de sus muchos logros.

inicio de las grandes civilizaciones agrícolas. El confort de la casa, el transporte, y las comunicaciones, la salud del ciudadano actual, descansan sobre bases técnicas completamente desconocidas para las personas del Siglo XVII.

Quienes prefieran contemplar el panorama de las matemáticas actuales, al final del largo camino, son invitados a saltar las próximas 3 secciones y proceder con las matemáticas del siglo XX. Más aún, quienes quieran sólo asomarse al futuro harían bien en avanzar hasta la sección 7. Para quienes se interesan por qué pasó entre tanto, el relato continúa en el comienzo del siglo XVIII. Empezando con el ya citado Leibniz, gran filósofo y rival de Newton en la famosa y un poco triste "disputa del cálculo", una serie de brillantes matemáticos (diríamos mejor físico-matemáticos), como la familia Bernoulli, Euler, D'Alembert,... aprovecharon el potencial del nuevo cálculo y formularon matemáticamente todo tipo de problemas mecánicos: problemas de disparo, problemas sobre la caída de los cuerpos, sobre el movimiento de los fluidos, de vibraciones mecánicas, de minimización,...

Los métodos infinitesimales son igualmente poderosos en su aplicación a la geometría, una disciplina que vive en simbiosis íntima con la mecánica. Los sabios estudian el Cálculo de Variaciones, un nombre para el cálculo de valores mínimos de los llamados "funcionales" que florecerá en el siglo XX como un capítulo fundamental del Análisis Funcional, por entonces ni siquiera previsto. Jean Le Rond D'ALEMBERT[17] estudió la vibración de las cuerdas y escribió la ecuación de ondas que lo llevó a descomponer una función en suma de ondas elementales, tarea también emprendida por Leonhard EULER (1707-1783), quien realizó la descomposición en suma posiblemente infinita de funciones sinusoidales. Euler es quizás el matemático más prolífico de la historia, hizo contribuciones fundamentales a la Geometría, el Análisis y la Teoría de Números, pero también a diferentes ramas de la Mecánica, la Elasticidad, la Hidrodinámica, la Acústica, y hasta la Música. Su latín no es difícil y sus libros de texto pueden leerse hoy con provecho y placer (¡preferentemente traducidos!). Vivió una gran parte de su vida en San Peterburgo, por lo que se le atribuye la fundación de la matemática rusa, junto con Daniel Bernoulli. El problema de las sumas infinitas preocupará a los matemáticos en el futuro próximo pero no en estos momentos de descubrimiento y euforia, y menos aún a L. Euler cuya

LEONHARD EULER

[17]Representante muy conocido de la *Ilustración* francesa, quien combinó una brillante carrera matemática con la publicación de la famosa *Enciclopédie*, juntamente con D. Diderot. ¡No todos los matemáticos viven en una nube!

intuición parece no tener límites.

Algunas de las glorias y penas de la matemática como idioma de la mecánica pueden observarse en el estudio de los fluidos. Una teoría sistemática escapó incluso al genio de Newton. De hecho, el aspecto más difícil de esta teoría consiste precisamente en encontrar las hipótesis matemáticas justas que permitan construir un modelo matemático, es decir, matematizarla *tal como realmente es*[18]. Hacia el año 1738 Johann y Daniel BERNOULLI establecen la ciencia teórica de la Hidrodinámica sobre la base idealizada de los llamados *fluidos perfectos*. El estudio fue continuado por Euler que escribe las famosas ecuaciones (1755)

$$\rho\,(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

(en la notación actual) cuya resolución analítica general ha resistido al paso del tiempo[19]. Es más, D' Alembert puso en evidencia las limitaciones de la idealización implícita en el concepto de fluido perfecto mostrando que un obstáculo sólido sometido a un "viento"perfecto no sufriría ningún *arrastre* neto y ninguna *sustentación* neta.

PIERRE S. LAPLACE

Esta dificultad nos devuelve al problema filosófico original, el papel de las matemáticas. De hecho, la dificultad se origina porque la mecánica teórica no trata de la Naturaleza, que escapa en su más pura esencia a nuestra curiosidad, sino que trata más bien del **modelo matemático** que nosotros nos podemos formar de ella. La concordancia experimental nos permite confirmar que una teoría es buena como modelo del mundo físico, pero nunca que es un modelo perfecto[20]. La modelización matemática es un aspecto fundamental de la matemática actual y clave de su posible utilidad.

A pesar del fracaso relativo con los fluidos, cuando termina el Siglo de las Luces una sensación de optimismo invade las mentes de los mejores matemáticos - mecánicos, como son Joseph Louis LAGRANGE, autor de la *Mécanique analytique*[21], y Pierre Simon LA-

[18]Recordemos aquí el dicho de Newton sobre su mecánica: *Hypotheses non fingo*, yo no me invento las hipótesis o axiomas.

[19]Guardan su misterio aún hoy día: la existencia de soluciones clásicas dados datos iniciales regulares en 3 dimensiones espaciales es todavía un problema abierto.

[20]Volveremos a este asunto al hablar de Einstein.

[21]Que describe las ecuaciones generales del movimiento, llamadas ecuaciones de Lagrange.

PLACE. El último publica su monumental libro *Mécanique céleste* (1788). Es también autor de la *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), una de las más importantes referencias en el desarrollo de la teoría de las probabilidades. La ecuación de Laplace, $\Delta \mathbf{u} = 0$, es una de las más famosas de la Física[22]. Basándose en sus estudios mecánicos pensó que el universo funciona como un reloj (determinismo) y declaró que los problemas matemáticos más importantes estaban ya propuestos y resueltos, o a punto de ser resueltos en un corto tiempo. Afortunadamente, la Historia demostraría que el gran hombre erraba en este tema. ¿No recuerda ésto algunos recientes y acalorados debates sobre el fin de la Física o de la Historia?

4 El siglo XIX, el gran siglo de la ciencia

La contribución del siglo XIX a la Matemática, tanto pura como aplicada, es sorprendente por su novedad, por lo inesperado de su evolución y por su riqueza y amplitud de temas. Empecemos por las matemáticas que vinieron de la física.

• **La electricidad y el magnetismo:** De Michael FARADAY a J.C. Maxwell, experimentos y leyes parciales cubren un camino que cuenta con los nombres de Gauss, Ampère, Oersted, Biot, Savart, Lenz,... hasta llegar al (impresionante) sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que relaciona los campos eléctricos y magnéticos (1863), obra cumbre de James Clerk MAXWELL[23]. Las ecuaciones de Maxwell (que no detallaremos en este momento por su complejidad, aunque sin duda merecen lugar de honor en este texto) son uno de los logros mayores de la Matemática en el siglo XIX. Gracias a James Maxwell una nueva rama de la ciencia, cuya existencia era insospechada un siglo antes, alcanzó el nivel de perfección matemática que Newton había otorgado a la mecánica. La teoría electromagnética tendrá profundas repercusiones no sólo sobre las ecuaciones diferenciales y el análisis funcional, sino además sobre la naciente topología (a través de conceptos como la homología)[24]. Elaborando las ecuaciones de Maxwell se llega a la ecuación de on-

JAMES C. MAXWELL

[22]Los ingenieros y científicos aplicados usan la transformada de Laplace.

[23]Publicación en forma final como *Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873.

[24]Maxwell es considerado el físico teórico más importante del siglo XIX; Einstein opinaba que el

das, que es la herramienta que nos permite describir la propagación de los fenómenos electromagnéticos en forma de ondas, caracterizadas por tres parámetros: primero, la amplitud A; segundo, la velocidad c que depende del medio (y es por consiguiente constante en el vacío); tercero, la frecuencia de oscilación ω que es una cantidad que varía con el tipo de onda. En breve, y para una dimensión espacial la ecuación y su solución se escriben

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad u = A\cos(kx - \omega t + \phi),$$

donde u es la intensidad de la oscilación, $k = \omega/c$ se llama número de onda y ϕ es una constante, la fase, de la que no debemos preocuparnos por ahora, y los subíndices indican derivadas parciales. Pero veamos, ¿es tan necesaria esta fórmula para proceder? La respuesta es que sí, pues poco después, y como reflejo de la generalidad del parámetro ω en el modelo matemático, Heinrich R. HERTZ predice y descubre las ondas electromagnéticas fuera del rango visible (las ondas de radio, 1888), y Guglielmo MARCONI descubre la telegrafía sin hilos, es decir, la radio (1895), introduciéndonos así al mundo de las comunicaciones que son el alma del siglo XX. Y otra gran sorpresa: aparece una incompatibilidad con la mecánica de Newton sobre la que hablaremos en un momento. Quede dicho esto sobre las consecuencias de la formulación matemática en la evolución de la ciencia.

• **Los fluidos reales**, de Claude Louis NAVIER a George Gabriel STOKES, 1821 a 1856 y después. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen los fluidos reales y gobiernan el comportamiento de los fenómenos atmosféricos (el clima, la Meteorología, la Hidrología, la futura Aeronáutica). La formulación correcta de las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos reales tardó por consiguiente unos 180 años tras los esfuerzos de Newton, las matemáticas profundas no se hacen en dos días. Una serie de brillantes matemáticos figuran entre los modelizadores, como S. POISSON y J. C. SAINT VENANT, así como el médico J. L. M. POISEUILLE. que investigó el flujo sanguíneo. Lord KELVIN y H. HELMHOLTZ ponen las bases para el estudio matemático de la vorticidad y los torbellinos. La comprensión matemática de los fluidos turbulentos, ya mencionados por Leonardo, es *todavía un problema abierto.*

Para no alargar excesivamente nuestro texto mencionaremos sólo dos teorías físicas más de gran importancia y repercusión matemática:

• **La Termodinámica** que estudia los intercambios de calor, adquiere una fundamentación matemática sólida con James JOULE, Saadi CARNOT, J. R. MAYER,... Tiene

trabajo de Maxwell representó la revolución más significativa en el estudio de la física desde Newton. La teoría de propagación de ondas es hoy día una de las ramas clásicas de la matemática aplicada, en sus múltiples variantes. Matemático excelente, Maxwell era defensor del método probabilístico en la Ciencia, que él aplicó al estudio de gases (distribución de Maxwell) y se le atribuye la frase: "la verdadera lógica del mundo es el Cálculo de Probabilidades".

una profunda repercusión sobre el cálculo en derivadas parciales y el concepto de diferencial exacta. Esta teoría incluye la famosa Segunda Ley de la Termodinámica (la ley del crecimiento de la entropía en el Universo), una ley fundamental en la ciencia. Mientras que su declaración matemática es simple, su interpretación práctica tiene implicaciones profundas que ocupan a generación tras generación de estudiosos[25].

• Por último mencionemos la **Mecánica Estadística**, asociada a los nombres de Maxwell, L. BOLTZMANN y W. J. GIBBS, que tallaron toda una rama de la Física Matemática basada en el Cálculo de Probabilidades, rama de las matemáticas que había permanecido un tanto al margen de esta aventura científica[26]. Esta idealización matemática del azar había sido elaborada en el fabuloso siglo XVII (ca. 1650) por B. Pascal, P. Fermat y C. Huygens para comprender los juegos de azar, y avanzada luego por BUFFON, BERNOULLI, DE MOIVRE y Laplace entre otros. De repente, el concepto de probabilidad cobra vida para la ciencia física a la hora de modelar el comportamiento de cantidades enormes de partículas[27]. Veamos por qué: las partículas están sujetas evidentemente a las leyes de la mecánica de Newton. Pero, dado que hoy se sabe que el número de moléculas de un gas por litro alcanza la fantástica cifra de $2,69 \times 10^{22}$ en condiciones normales (0^o C de temperatura y 1 atm. de presión)[28], es del todo imposible seguir sus trayectorias individuales. La mecánica estadística propone un comportamiento medio con efectividad sorprendente: de ella es inmediato predecir la relación de la temperatura con la energía y la presión para un gas perfecto, ¡y la predicción ideal resulta ajustada a los datos experimentales! La distribución de Maxwell-Boltzmann, $n = Ae^{-E/kT}$, es un objeto matemático tiene en mecánica estadística un papel tan importante como la distribución gaussiana en la ciencia estadística usual.

Cambiemos de escena para retratar a otro de nuestros héroes, una "vida ejemplar". Bernhard RIEMANN (1826-1866) es una de esas figuras sorprendentes cuya obra

[25]con consecuencias insospechadas: la entropía es hoy día un concepto central en la Teoría de Información tras el trabajo de C. Shannon, *The mathematical theory of communication*, Bell Syst. Techn. Journal **27**, pp. 379-423, 623-658 (1948).

[26]La tumba de Boltzmann en el cementerio central de Viena tiene como ornato su famosa fórmula de la entropía en mecánica estadística, $S = k \log W$, que puede considerarse una gesta del espíritu puro en la búsqueda de la comprensión de los secretos de la Naturaleza. El libro de Gibbs, *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, publicado al final de su vida en 1902, jugó para la física estadística un papel similar al de Maxwell para el electromagnetismo

[27]Este no era un paso trivial. Boltzmann contó para ello con su creencia en la existencia de los átomos, que encontró fuerte resistencia en el momento por parte de científicos famosos como E. Mach. ¡Y estamos a finales del siglo XIX! La agria controversia afectó seriamente a la salud de Boltzmann.

[28]En los libros de química suele mencionarse la cantidad de átomos por cada mol = 22,4 l de gas, el llamado número de Avogadro, $6,022 \times 10^{23}$.

contiene lo mejor de la matemática pura y aplicada. El gran matemático alemán, muerto joven, es bien conocido como un gigante de la matemática más pura. Nos legó la hipótesis sobre los ceros de la "función zeta"(*Hipótesis de Riemann*) cuya demostración es quizá el problema abierto de las matemáticas más famoso al entrar el siglo XXI, tras la reciente resolución de la conjetura de Fermat. La hipótesis de Riemann afirma que las soluciones (o ceros) interesantes de la ecuación $\zeta(s) = 0$ están situadas sobre una misma línea recta en el plano complejo, precisamente la de ecuación $Re(s) = 1/2$. Esto se ha verificado para las primeras 1.500.000.000 soluciones[29]. Una prueba de que el aserto es verdad para toda solución aclararía muchos misterios, desde la distribución de números primos a cuestiones de física teórica. Riemann fue un investigador de mente geométrica que ligó la suerte del análisis complejo a las transformaciones conformes y pensó en los espacios generales de varias dimensiones definidos a partir de su geometría local[30]. Hoy día llamamos a esas *geometrías riemannianas* y son la base a partir de la cual se construye la física teórica.

BERNHARD RIEMANN

Pues bien, el mismo Riemann estudio la propagación de gases compresibles y llegó a la conclusión de que el modelo matemático[31], entendido en el sentido de las soluciones clásicas, era contradictorio (porque preveía líneas características que se cortan, y sobre las cuales las variables físicas - densidad, presión y velocidad - tomarían valores distintos simultáneamente). Sin embargo, aventuró que la teoría era correcta si *se cambiaba radicalmente el punto de vista* y se admitían como soluciones de una ecuación diferencial funciones que no sean derivables, ni siquiera continuas. Ante tal atrevimiento, tan típico de las mejores matemáticas de los siglos XIX y XX, recordamos de nuevo a Newton: Riemann no se inventaba esa teoría. La teoría de las *ondas de choque* es hoy día un tema fundamental de la dinámica de gases y de su aplicación a la aeronáutica, y es por ello una de las áreas más activas de investigación matemática en ecuaciones en derivadas parciales, ... y de la ingeniería.

La Evolución Interna. Pero, incluso tras el elogio de Riemann, esta visión sería totalmente injusta si no tuviera en cuenta la evolución interna de las matemáticas,

[29]Para los curiosos de las fórmulas, $\zeta(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + \cdots$.

[30]Su famoso artículo "On the hypotheses which lie at the foundations of Geometry", 1854. En alemán *"Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"*, 1854, publicado en 1868.

[31]Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineal de tipo hiperbólico, para quien desee el detalle.

que habían llegado a un alto nivel de madurez tras 300 años de intenso desarrollo. Solo comentaremos aquí muy brevemente este importante capítulo, pues es más conocido por el público matemático. Varios son los temas estrella, tan inesperados como cargados de futuro: geometrías no euclídeas de J. C. F. GAUSS[32], Janos BOLYAI y N. I. LOBACHEVSKI, fundamentación del cálculo infinitesimal de Augustin L. de CAUCHY, la teoría de funciones de Karl WEIERSTRASS, la lógica matemática de George BOOLE, la teoría de conjuntos de Georg CANTOR, por citar sólo un nombre al lado de cada gran capítulo[33].

CARL F. GAUSS

JOSEPH FOURIER

Existen campos de investigación en que las matemáticas toman claramente el relevo a la física en la tarea de extraer el jugo de un concepto. Esto sucede con el problema de representación de una función como una suma de funciones simples, resuelto por Brook TAYLOR y Colin MCLAURIN para las sumas de potencias y planteado por Daniel Bernoulli (1753) y Leonardo Euler para las sumas trigonométricas que aparecen en las ecuaciones de ondas y el calor. Es gracias a la insistencia de Joseph FOURIER (1822)[34] que los matemáticos se adentran en la aventura de dar un

[32]El "Príncipe de los Matemáticos", quizá el matemático más sobresaliente y conocido de la historia. Hizo contribuciones fundamentales a la teoría de números, al álgebra, a la geometría diferencial, a la geometría no euclídea; la distribución más popular de probabilidad lleva su nombre, así como uno de los teoremas de integración más famosos de la física matemática.

[33]Queremos dejar constancia expresa de la incomodidad que nos causa pasar tan de prisa por temas tan importantes de la Matemática, sin los que muchas de las páginas que seguirán no tendrían sentido.

[34]Escrito de 1807, memoria presentada a la Academia de Ciencias de Paris y publicada en 1822.

sentido riguroso a las sumas infinitas de funciones trigonométricas generales

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega x) + b_n \sin(\omega x)\}.$$

Éste es el origen de un área mayor de la teoría de funciones, conocida como Análisis de Fourier. La tarea estaba cargada de grandes dificultades y tuvo grandes éxitos. Así, cuando Paul DU BOIS RAYMOND construyó (1873) una función real continua y periódica cuya serie de Fourier no converge puntualmente, parecía que algo iba realmente mal en el análisis matemático de los fenómenos oscilatorios. Tras cuidadoso examen, tres opciones se planteaban al investigador:

(i) modificar la noción de función,

(ii) modificar la definición de convergencia,

(iii) reemplazar la base de senos y cosenos por candidatos mejores.

Es mérito notable de la comunidad matemática que *los tres caminos* hayan sido explorados con éxito asombroso[35]. El teorema fundamental de sumación de series de Fourier se debe a L. CARLESON, 1966[36], y necesita útiles como *la convergencia en casi todo punto*, los espacios L^2 y la maquinaria del análisis del siglo XX.

El Contexto Social. Es interesante decir dos palabras sobre la evolución social de la ciencia en el siglo XIX. Éste es el siglo en que las revoluciones industrial, burguesa y democrática se asientan en Europa trayendo consigo la extensión de los estudios científicos e industriales tanto en universidades como en otros centros especializados[37], con lo que aumenta exponencialmente el cuerpo de profesores investigadores. Los avances son tan impresionantes que el final de siglo vuelve a encontrar a los matemáticos en franco optimismo, si uno se fía de la historia escrita por el geómetra alemán Felix KLEIN[38]. Otra característica de este período es la profunda separación que se manifiesta entre matemáticos, físicos e ingenieros, consecuencia del enorme

[35]He aquí dos citas de Fourier para animar el debate sobre Matemática Pura contra Aplicada: La primera es "Las ecuaciones del diferencial de la propagación de calor expresan las condiciones más generales, y reducen las preguntas de la física a problemas de análisis puro, y éste es el objeto apropiado de la teoría". Ahora la segunda: "El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de descubrimientos matemáticos".

[36] *"On convergence and growth of partial sums of Fourier series"*, Acta Math. 116 (1966), pp. 135–157.

[37]Muchas de las Escuelas de Ingenieros se fundan en España en esa época, como las de Montes y Caminos en 1834.

[38]*Lectures on the development of mathematics in the 19th century.* He aquí una cita de Klein: "los grandes matemáticos como Arquímedes, Newton o Gauss siempre unieron teoría y aplicaciones en igual medida".

crecimiento de sus campos de estudio. Tal separación, a veces divorcio, tendría consecuencias profundas sobre la evolución de las matemáticas en el siglo XX, e incluso sobre el mismo concepto de matemática.

5 Un cambio de siglo revuelto

En todo caso, el cambio de siglo es espectacular tanto en física como en matemáticas. En éstas aparecen en el firmamento figuras extraordinarias como Henri POINCARÉ (1854-1912) y David HILBERT (1862-1943), que marcarán profundamente las matemáticas del siglo XX. Pero una gran parte del brillo en retrospectiva se debe a que el cambio de siglo fue una *época de crisis*, pues las evidencias de fenómenos fuera del gran esquema se acumulaban.

HENRI POINCARÉ

DAVID HILBERT

• El experimento de Michelson-Morley (1887) prueba que la velocidad de la luz es efectivamente constante (independientemente del sistema de referencia inercial), como predecía la teoría ondulatoria basada en las ecuaciones de Maxwell. El modelo mecánico del mundo de Euclides-Newton tiene por primera vez una gran grieta.

• La observación de las partículas suspendidas en los gases revela un movimiento altamente irregular, el movimiento browniano (Robert BROWN, 1827). Este es un golpe para la geometría de Euclides basada en puntos, rectas y curvas regulares (al menos regulares a trozos).

• Las sorpresas de la teoría de funciones llevan a la teoría de conjuntos (Georg Cantor) que junto con la lógica (George Boole, Gottlob FREGE, Giuseppe PEANO) son la base de un intento de fundamentar las matemáticas rigurosamente de una vez por todas. Las matemáticas proponen a la ciencia los conceptos de teoría *coherente*[39] y *completa*. Surgen las escuelas y las disputas: logicismo (Alfred N. WHITEHEAD y Bertrand RUSSELL[40]), intuicionismo (Luitzen BROUWER) y formalismo (David Hilbert). Las paradojas (de Russell, de BURALI-FORTI, de RICHARD) siembran un caos notable en los espíritus menos fuertes.

• No existen útiles analíticos ni computacionales para abordar las complejidades de las ecuaciones de los medios continuos, como los fluidos. En consecuencia, las matemáticas prácticas de la ingeniería se sumen en una serie de aproximaciones y recetas que las divorcian de la teoría.

• Pero incluso el tema clásico de la integración general de las ecuaciones del movimiento para tres o más cuerpos celestes se muestra imposible[41]. A grandes males grandes remedios: H. Poincaré propone los métodos cualitativos y abre las puertas a la geometría algebraica y la topología (llamada entonces *Analysis Situs*, 1895). Pero al tiempo descubre con sus métodos teóricos una tremenda complejidad escondida en el modelo matemático (que son los sistemas dinámicos). Uno de estos monstruos son las órbitas homoclínicas que sembrarán de *caos* la mecánica celeste cuando Poincaré sea bien comprendido (lo que llevó bastantes décadas). Para mejor medir la estatura de nuestro héroe valga la siguiente cita: "en sus cursos en la Facultad de Ciencias de París desde 1881, y de la Sorbona desde 1886 Poincaré cambiaba de tema cada año, tocando la óptica, la electricidad, la astronomía, el equilibrio de los fluidos, la termodinámica, la luz y la probabilidad".

• Agreguemos algunas notas más optimistas. Así, la teoría de la integración de funciones se ve coronada por los trabajos de E. BOREL y H. LEBESGUE[42]. En adelante el cálculo posee un concepto de integral (la integral de Lebesgue) donde el proceso de tomar límite es natural, el análisis funcional puede crecer (espacios de Hilbert) y el famoso problema de DIRICHLET[43] tiene solución (en un sentido aún visto como raro). El precio a pagar es la construcción de una teoría matemática sofisticada que los estudiantes de ciencias e ingeniería deben estudiar y absorber, o al menos han de aprender a convivir con ella[44].

• Descubrimientos importantes de naturaleza matemática ocurren en otras ciencias y darán fruto en el próximo siglo. El Científico ruso Dmitri MENDELEYEV

[39] *consistent* en inglés.

[40] su famoso libro *Principia Mathematica* data de 1910.

[41] como expone H. Poincaré en su libro *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Paris, 1899.

[42] La importantísima contribución a la teoría de la integración figura en su tesis doctoral, *Intégrale, longueur, aire,* Universidad de Nancy, 1902.

[43] Nombrado en honor a P. L. Dirichlet, el primero que probó que la serie de Fourier converge bajo ciertas condiciones

[44] parafraseando a J. von Neumann. *Ad astra per aspera*, dice el adagio latino.

encontró el orden en el caos de los elementos químicos y propuso la Tabla Periódica en 1869, que es hoy día la base del tratamiento físico-matemático de la Química. Por otro lado, el monje, botánico y experimentador de las plantas austriaco, Gregor J. MENDEL formuló las leyes racionales de la herencia, poniendo así los fundamentos matemáticos de la ciencia de la Genética[45].

6 El siglo XX, un siglo de maravillas

A estas alturas, esperamos haber comunicado al lector la impresión de la profunda simbiosis de la Matemática con la Física, de sus sorprendentes y en muchos casos inesperadas interacciones. La historia tal simbiosis incluye ya aplicaciones tecnológicas avanzadas, preludio de lo que será el nuevo siglo. La explosión de la Matemática y la Ciencia en el siglo XX hace aconsejable reducir nuestro texto a algunos de los temas más importantes. Un rasgo sobresaliente es la matematización progresiva de las demás ciencias, que aparecen ya como nuevos horizontes para la Matemática Aplicada.

Nuevas matemáticas que nos llegaron de la Física

El comienzo del siglo XX es testigo de dos grandes revoluciones en la manera de concebir el mundo físico, que cambiaron de forma radical el "universo newtoniano". Comprobado el hecho de que la luz no se comporta como era esperado, la teoría que lo explica trae consigo consecuencias dramáticas sobre nuestro concepto de espacio-tiempo, que afectan en la práctica a la Astronomía y al comportamiento de las partículas que se mueven deprisa. Por otra parte, en el extremo de lo muy pequeño, se observó que los átomos, moléculas y partículas subatómicas tampoco obedecen a las leyes de comportamiento tan cuidadosamente observadas por los entes macroscópicos, aunque por otras razones. Son *dos grandes revoluciones cuya más íntima esencia se expresa en fórmulas matemáticas.* Examinemos con algún detalle el surgir de ambas teorías.

• **La Teoría de la Relatividad**. Albert EINSTEIN, el Hombre del Siglo según *la revista Time* (año 2000), propuso las dos versiones de la relatividad: en 1905[46] (la relatividad especial) y en 1916 (la relatividad general). Esperamos no sorprender al lector al afirmar que en ambos casos se trata de una profunda reflexión sobre las matemáticas que sirven de base a la Física.

La relatividad especial tiene como precursores a LORENTZ, Poincaré y MINKOWSKI, que estudiaron el grupo de invariancia que corresponde a la nueva geometría del

[45] *Versuche über Pflanzenhybriden*, ("Experimentos con híbridos de plantas"), publicado en 1886.

[46] 1905 fue el *annus mirabilis* para Einstein. En tres artículos separados explicó el efecto fotoeléctrico, el movimiento browniano y la teoría de la relatividad. Es improbable que tal hecho vuelva a repetirse.

espacio-tiempo. La relatividad general usa los conceptos geométricos que Riemann elaboró más de un siglo antes como un puro *Gedankenexperiment*, es decir experimento mental, sobre las "hipótesis que subyacen a los fundamentos de la geometría", y que fue desarrollado por la escuela de geometría diferencial italiana de RICCI, LEVI-CIVITA y BIANCHI. La relatividad será un gran campo de juego de la geometría diferencial en el siglo XX. De las ecuaciones de Einstein se llegará al Big Bang y a los agujeros negros (OPPENHEIMER y SNYDER, 1939; PENROSE y HAWKING). Todo un ejercicio de matemática pura como modelo de una rama de la física.

ALBERT EINSTEIN

Conviene sin embargo no olvidar la otra cara de la Relatividad: desde la primera confirmación experimental de Lord A. EDDINGTON en 1919 incesantes experimentos han servido para confirmar (mejor diríamos, con la modestia de Einstein, no refutar) la teoría de la Relatividad. Pues en la ciencia real no se inventan las hipótesis[47].

Hagamos una pausa para echar una mirada a algunas de las fórmulas principales. En Septiembre de 1905 Einstein publicó un corto artículo en que demostró la fórmula fundamental $E = mc^2$ sobre la equivalencia matemática de masa y energía, que se ha convertido en un clásico de la cultura popular del siglo XX. Por otro lado, las leyes de transformación de la Relatividad Especial, que reemplazan a las leyes de transformación galileanas a velocidades relativas altas, conocidas como las leyes de transformación de Lorentz, son :

$$x = \gamma x' + \gamma v t', \qquad t = \gamma t' + \frac{v}{c^2}\gamma x',$$

donde la constante γ se llama factor de dilatación del tiempo. Depende de la velocidad relativa v y viene dado por la expresión: $\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Por consiguiente, la

[47]He aquí una opinión significativa de Einstein sobre las matemáticas: "Mathematics deals exclusively with the relation of concepts to each other without consideration of their relation to experience. Physics too deals with mathematical concepts; however, these concepts attain physical content only by the clear determination of their relation to the objects of experience", de *The theory of Relativity*, 1950. Las opiniones de Einstein son tanto más interesantes si se tiene en cuenta que, contrariamente a otras grandes figuras en la historia de la Física, como Newton o Maxwell, no fue matemático excepcional, por lo menos técnicamente. Dejó sin embargo un legado impresionante a las matemáticas a través de sus teorías.

suma de velocidades sigue la sorprendente regla

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

muy en contra de lo que estamos acostumbrados a creer (es decir, $u = u' + v$).

La fórmula más conocida de Einstein es sin duda $E = m\,c^2$, que forma con la fórmula cuántica de Planck, $E = h\,\nu$, toda una nueva visión de la energía al principio del siglo. La energía había sido uno de los conceptos clave de la evolución de la física y las matemáticas que la acompañan en el siglo XIX, y se ve sometida a profunda revisión matemática en los comienzos del siglo XX. Precisamente, los *quanta* (o cuantos) son nuestro próximo tema.

• **La Mecánica Cuántica** describe el comportamiento de la materia y la luz a la escala atómica. En palabras del gran físico R. FEYNMAN *"Things on the very small scale behave like nothing you have any direct experience about"*. En particular, asistimos a otra enorme brecha en el hasta entonces perfecto edificio de la mecánica newtoniana. El segundo recorrido mágico[48] del comienzo del siglo XX nos lleva de la hipótesis de los quanta de MAX PLANCK, 1900, a la ecuación de SCHRÖDINGER (1926) pasando por N. BOHR, L. DE BROGLIE, W. HEISENBERG y P. A. M. DIRAC. El acceso al mundo atómico queda codificado en la maravillosa ecuación

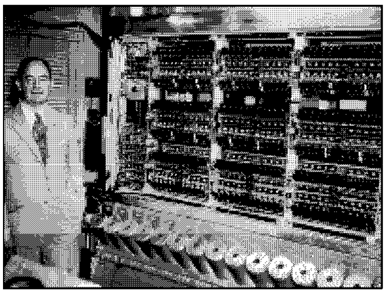
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x, y, z, t)\psi,$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida, $\hbar = h/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, Δ es el operador laplaciano y $V = V(x, y, z, t)$ es el potencial. Todo ello parece realmente un trozo de la Cábala, y en el momento inicial se dudaba de qué representaba exactamente la variable $\psi(x, y, z, t)$ llamada "función de onda". Tal es el poder de la Matemática, estos físicos geniales habían encontrado un trozo del Código Matemático del Universo pero aún habían de interpretar qué significaban las variables. En 1928 Max BORN propuso la interpretación probabilista, donde $|\psi(x, t)|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en el lugar x en el instante t, y aunque es mayoritariamente admitida, hay quienes se resistieron, siguiendo a Einstein en eso[49]. Porque la Mecánica Cuántica es un desafío fundamental a la manera previamente admitida de mirar el mundo, al determinismo tradicional y a la causalidad. Se puede decir que el determinismo está basado en el supuesto de que "el conocimiento exacto del presente permite calcular el futuro". ¿No es ése el sueño de las ciencias exactas, y no es cierto que la Mecánica Cuántica subvierte esa creencia? Ponderando el problema,

[48]Cita homenaje a "The Magical Mystery Tour", Lennon y McCartney, 1967.
[49]Suyo es el famoso comentario: *"God does not play dice"*, "Dios no juega a los dados".

W. Heisenberg encontró en 1927 la respuesta siguiente: *"no es la conclusión [de la hipótesis determinista] lo que es falso, sino la hipótesis inicial"*.

Dejando al lado el mundo de las interpretaciones, debemos informar que esta teoría, aun estando basada en el más alto nivel de abstracción matemática, es confirmada por todo un siglo de experimentos. La parte mágica, que tanto abunda, tiene un momento estelar cuando Dirac, usando la formulación relativista, propone la existencia de los positrones (1932) porque "las ecuaciones admiten el cambio de signo con respecto a la solución que describe el electrón",... y el positrón fue debidamente descubierto[50] por los físicos experimentales poco después (Anderson y Blacket, 1932-33). Dirac predijo la existencia del antiprotón que fue confirmado por Segrè en 1955, y también el monopolo magnético, pero esta vez su existencia ha quedado sin confirmación hasta el momento presente. Las predicciones de Dirac son un ejemplo notable, de ninguna manera único, en que el modelo matemático va delante de la evidencia experimental[51]. ¿No nos recuerda todo esto a Hertz?



J. V. NEUMANN

La cosecha matemática de la Mecánica Cuántica no es escasa: la teoría de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert con su correspondiente teoría espectral son desarrolladas por John VON NEUMANN (Janos v. N., 1903-1957), uno de los genios más polifacéticos del siglo[52], con el objeto de dar sentido a los operadores que aparecen en la ecuación, operadores laplacianos y demás. Su teoría se basa en el trabajo precursor de S. BANACH y los expertos italianos en cálculo de variaciones, pero la

[50]¿O deberíamos decir mejor "encontrado" o "'reconocido"?

[51]Por otro lado, la ciencia basada solamente en argumentos o analogías matemáticos puede ser mala ciencia. Un ejemplo: existe una tendencia matemática a afirmar que en el reino de partículas ciertas simetrías matemáticas son "ley" de la naturaleza. En particular, debería ser entonces correcta la ley de conservación de la paridad, que especifica que las partículas elementales y sus imágenes especulares *deben* comportarse idénticamente; en 1956-57 tres sino-americanos T. D. Lee, C. H. Yang, y C. S. Wu conjeturaron primero y probaron después que hay procesos subatómicos que violan esa ley.

[52]J. von Neumann, *Mathematische Grundlage der Quantenmechanik,* "Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica", Springer, 1932. La trayectoria de Von Neumann recorre las áreas más diversas de la Matemática pura y aplicada: en su juventud modificó el sistema Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos, creó las álgebras de v.N. en teoría de operadores, es el padre de la Teoría de Juegos y lo veremos luego en el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton como uno de los padres del primer gran ordenador moderno. Después de la guerra se ocupó de la hidrodinámica, de los métodos numéricos (Monte Carlo, estabilidad para los esquemas en diferencias finitas), la teoría de autómatas, y así sucesivamente.

Mecánica Cuántica tiene sus caprichos: necesita unos objetos de la segunda generación, los "operadores lineales no acotados en espacios de Hilbert". Estamos pues en el borde o más allá de los temas de la licenciatura en Matemáticas, lo cual es información interesante para quienes sostenían *que toda matemática útil ha de ser muy fácil*[53]. Junto con el Cálculo de Variaciones, la Mecánica Cuántica ha sido cantera inagotable de problemas para el Análisis Funcional, rama de las matemáticas que toma vuelo propio.

Por otra parte, el comportamiento anómalo de las partículas cuánticas respecto a las clásicas tiene aspectos matemáticos simples y relevantes, como su distinto comportamiento estadístico, que lleva a las distribuciones de Bose-Einstein y Fermi-Dirac que "corrigen" a Maxwell-Boltzmann.

Las matemáticas que vinieron de la ingeniería

• **La Aeronáutica**. Tras los impresionantes avances de la física matemática del siglo XIX y en particular de la mecánica de fluidos, pudiera parecer que un problema antiguo como el del vuelo, que ya había ocupado a Leonardo da Vinci, debería estar resuelto. Y los experimentos con globos habían tenido éxito un siglo antes[54]. Además la teoría de la variable compleja y de los flujos potenciales y vorticosos había obtenido un notable progreso. Pero con todo este progreso, el vuelo propulsado (por un motor) no era entendido ni practicado, y un desanimado Lord Kelvin reconocía a finales de siglo XIX que el sueño del vuelo propulsado era quizá imposible[55]. Es entonces cuando *el método experimental es reivindicado* por los hermanos Wilbur y Orville WRIGHT, fabricantes de bicicletas y consumados experimentadores, que logran volar en un artefacto propulsado en las inhóspitas playas de Kitty Hawk, Carolina del Norte, en la desapacible mañana del 17 de diciembre de 1903. Es el nacimiento de la Aeronáutica. La reacción de los teóricos fue fulminante y a la altura del desafío. Durante el periodo 1905-10 los principales ingredientes matemáticos que faltaban al modelo teórico fueron comprendidos (N. E. ZHUKOVSKI, M. KUTTA, L. PRANDTL, S. A. CHAPLYGIN). Se trata de los conceptos de sustentación, circulación, capa límite, separación, régimen laminar y turbulento. Una ingeniería nace y nos llevará en 30 años más allá de la barrera del sonido. Y nacen ramas de la matemática aplicada, como la teoría de las perturbaciones singulares, la teoría de los flujos supersónicos y

[53]Me refiero en particular a las opiniones del famoso matemático inglés G. H. Hardy en su libro *A Mathematician's apology*, [15], que refleja puntos de vista muy distintos de los sostenidos en este artículo, ver especialmente sección 26. Es un libro muy conocido y de un gran interés. El tiempo no parece haberle dado la razón en el tema que nos ocupa. Debe tenerse en cuenta que en 1940 la relevancia práctica de las teorías sofisticadas como la Mecánica Cuántica podía muy bien no ser evidente, como lo es hoy para el lector avisado.

[54]Hermanos Montgolfier, 1783.

[55] *"heavier-than-air flying machines are impossible"*, dijo en 1895.

transónicos y la teoría matemática de la combustión[56].

Resistimos aquí a la tentación de detallar las otras ramas de la ingeniería que también han tenido una interacción activa con las matemáticas. Lo cual no significa en absoluto que ignoremos su importancia, trataremos el tema en la sección 8.

Grandes novedades que vinieron de las matemáticas

Las matemáticas han vivido el siglo XX muy pendientes del desarrollo interno de las ideas recibidas del fabuloso siglo anterior. Para más fortuna, el siempre difícil y en general fallido intento de prever las líneas del futuro contó con una confirmación en la famosa propuesta de D. Hilbert al II Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París. En 23 problemas Hilbert resumía los principales retos con que se enfrentaban las matemáticas, desde las más puras a la física matemática[57], cf. la referencia [17]. Esos 23 problemas han sido de gran importancia en el transcurso de los años, pero otras líneas inesperadas han venido a complementarlos y competir por las candilejas. Señalemos tres desarrollos importantes entre tantos.

• **El cálculo de probabilidades**. Como respondiendo a la necesidad planteada por la mecánica cuántica, pero en realidad independientemente, Andrei N. KOLMOGÓROV estableció en Moscú la probabilidad axiomática[58] sobre la teoría de conjuntos y la teoría de la medida, tarea a la que se asocian los nombres de P. LÉVY en Francia y N. WIENER en EE.UU. Hemos de recordar aquí que Boltzmann fue un estudioso del movimiento browniano, que L. BACHELIER escribió su tesis en Paris en 1900 en un intento (infructuoso de momento) de modelar los mercados financieros, y que Einstein recibió el premio Nobel en 1921 no por la teoría que le hizo famoso sino por sus estudios del efecto fotoeléctrico y... del movimiento browniano. Las cadenas de Markov habían sido estudiadas desde 1900 por A. A. MARKOV.

Hoy día la teoría de los procesos estocásticos, en particular los procesos de Markov, es una de las áreas predilectas de esta floreciente rama de las matemáticas, y el Cálculo de ITŌ es una herramienta esencial del análisis estocástico continuo que compite con el cálculo infinitesimal clásico de Newton y Leibniz. Todo este desarrollo era completamente desconocido, incluso insospechado, hace poco más de un siglo y se ocupa de *informarnos sobre los fenómenos aleatorios y su evolución probable*, es decir nos permiten *hacer predicciones sobre lo no exacto*. Como es ya usual en nuestro

[56]Más hacia la matemática teórica tenemos la teoría matemática de la explosión para las ecuaciones diferenciales no lineales, de tanta actualidad. Permítasenos agregar que, aunque la práctica de la ingeniería aeronáutica descansa en bases teóricas firmes, las matemáticas profundas involucradas están lejos de ser bien entendidas y la investigación es muy activa

[57]Debe decirse empero que éste último tema estaba relativamente mal representado, y Hilbert dedicó mucho esfuerzo al asunto en los años siguientes.

[58]Su libro titulado *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, "Fundamentos del Cálculo de Probabilidades", es publicado en 1933.

relato, se trata de un empeño no sólo académico, sino que tiene aplicaciones muy importantes en los procesos científicos, industriales y financieros.

• **El caos determinista**. El estudio del caos generado por las ecuaciones diferenciales, ya anunciado por Poincaré, cuyas matemáticas habían madurado gracias al impulso de diversos matemáticos, especialmente G. BIRKHOF, ha de esperar a la obra de un físico dedicado a los estudios del clima para adquirir el impulso definitivo. En efecto, se atribuye a Edward LORENTZ, del MIT, ese mérito [59]. Preocupado por el estudio de los procesos convectivos en la atmósfera propone un simple modelo no lineal consistente en 3 ecuaciones diferenciales ordinarias que no me resisto a copiar

$$\begin{cases} x' = -10x + 10y, \\ y' = 28x - y + xz, \\ z' = \frac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

Para esta elección de los parámetros (es decir, los coeficientes de la ecuación, que pueden ir variando en el problema) encuentra sorprendido que las trayectorias numéricas que produce su ordenador no convergen a ninguna situación periódica. El artículo de 12 páginas data de 1963. Surgen conceptos que llegarán al gran público, como *caos determinista* y *atractores extraños*, y toda una rama de las matemáticas tanto teóricas como experimentales, una gran novedad posible gracias al desarrollo de los ordenadores. Autores como S. SMALE y M. FEIGENBAUM se hacen célebres[60]. Entran en escena los *conjuntos fractales* de B. MANDELBROT[61], ya anunciados en la obra de G. JULIA en los años 20[62]. Hurgando en la historia se descubre como precursor la figura gigante de H. Poincaré que había previsto este caos en su cabeza.

El estudio de los procesos caóticos, fractales y turbulentos es una de las fronteras del pensamiento matemático actual.

• **Nuevos conceptos de solución en las ecuaciones diferenciales.** Hacia los años 30 era claro para muchos investigadores que el concepto clásico de solución era insuficiente para construir una teoría de las ecuaciones diferenciales que satisfaga las necesidades de las ciencias a las que se aplican. En efecto, es natural en esta disciplina plantear *problemas*, es decir conjuntos de ecuaciones y datos adicionales, que sean *bien propuestos*; siguiendo a J. HADAMARD ello quiere decir que tales problemas han de tener una solución, que ésta ha de ser única si se dan datos suficientes, y que además tal solución ha de depender continuamente de los datos. No se trata ya de que la solución sea clásica, pues ésta puede no existir o puede que no sea el concepto de solución cuya existencia resulta natural demostrar.

[59] Su famosa publicación *"Deterministic non-periodic flow"*, J. Atmos. Sci **20** (1963), 130–141.

[60] cf. Ian Stewart, *Does God play dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin, Londres, 1989.

[61] cf. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature,* 2nd ed., San Francisco, 1982.

[62] Su publicación data de 1918

Enfrentados con este reto, los matemáticos han desarrollado diversas nociones de *soluciones generalizadas* con significado físico. Quizá el ejemplo más notable haya sido el problema de minimización de energía de Dirichlet ya mencionado[63], motivación de los espacios de Hilbert. Otro ejemplo básico es el problema de Riemann de la dinámica de gases, ya mencionado. Un tercer problema similar lo afronta J. LERAY[64] en 1933 en el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos reales (viscosos) en el espacio tridimensional. Gracias al trabajo de los analistas funcionales (S. L. SÓBOLEV, L. SCHWARTZ,...) se introducen los conceptos de *solución débil* y *solución en el sentido de las distribuciones.* Resumiendo mucho, no se pide a las soluciones que posean todas las derivadas implícitas en la ecuación sino que cumplan con ciertos tests. Con los expertos en leyes de conservación (P. LAX, O. A. OLEINIK, S. N. KRUZHKOV) se llega a las *soluciones de entropía*, que no son siquiera continuas (y se recupera así el legado de Riemann, Rankine y Hugoniot y sus ondas de choque).

En nuestros días aparecen nuevos conceptos de solución para satisfacer las crecientes necesidades, como las *soluciones viscosas* de M. G. CRANDALL, L. C. EVANS y P. L. LIONS. L. CAFFARELLI extiende este concepto a los problemas de cambio de fase o frontera libre, donde la discontinuidad es parte fundamental del planteamiento matemático. Y la saga continua con las soluciones *mild*, soluciones de semigrupos, soluciones renormalizadas,...

Uno de los aspectos más llamativos de estos nuevos conceptos es su compatibilidad con las *soluciones numéricas* propias de los métodos discretos del cálculo numérico. Se halla así una sorprendente alianza de los conceptos abstractos y los numéricos contra “la rigidez de los clásicos”. Por otra parte, el Análisis Funcional pasa a formar parte del currículo básico del matemático aplicado y el ingeniero.

Las matemáticas y la vida social: la teoría de juegos

La teoría de juegos analiza los “juegos”, es decir, situaciones en que se da un conflicto de intereses. Parte de los juegos más simples, pasatiempos que pueden ser analizados completamente; de ellos se pasa a los “juegos reales” como el póker o el ajedrez, y de ahí a los complejos problemas de estrategias en áreas de enorme interés social como la economía o la política. Vemos en ello un gran paralelismo con el proceder del cálculo de probabilidades y la estadística, que pasan de los juegos de azar con cartas o bolas a la estadística industrial y social por un lado, y al comportamiento de los gases o los átomos por otro.

[63]Se trata de minimizar la integral de energía $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ entre todas las funciones admisibles $u = u(x)$ definidas en un recinto del espacio Ω y que toman valores asignados en el borde de Ω; ∇u designa el gradiente de u. El problema de principio, crucial para la correcta solución, es qué se entiende por función *admisible*.

[64]Jean Leray publicó tres artículos sobre el asunto en 1933-34. El último es el *“Essai sur les mouvements planes d'un liquide visqueux emplisssant l'espace”*, Acta Math. **63**, 1934.

El primer teorema en teoría de juegos es atribuido a E. ZERMELO, fundador de la versión de la teoría de conjuntos ZF hoy tomada por estándar, y se titula "Sobre una utilización de la teoría de conjuntos en la teoría del ajedrez", 1913[65]. Yendo hacia atrás en el tiempo, el primer libro de las matemáticas de la competición parece ser de Augustin COURNOT en 1838[66]. Otro conocido matemático, E. BOREL, escribió sobre juegos de estrategia en el período 1921-27 y dio una prueba restringida del teorema del minimax, uno de los resultados más importantes de la matemática aplicada del siglo XX al decir de Casti [4][67].

Pero son dos grandes figuras quienes asientan las matemáticas de la competición en el siglo XX. Uno es J. VON NEUMANN, que demuestra en 1928 el teorema del minimax y analiza en su famoso libro con MORGENSTERN, 1944, los juegos cooperativos y de suma cero[68]. El otro es J.F. NASH[69] que en cuatro artículos fundamentales de 1950-53 establece la teoría de los juegos no cooperativos[70]. Los conceptos de equilibrio dominante y equilibrio de Nash son hoy día herramientas matemáticas básicas de la práctica económica y política (en sus diversas vertientes de elección social) y deberían ser mejor conocidos por el gran público. J. Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994 y es uno de los pocos Premios Nobel Matemáticos, junto con los economistas J. TINBERGEN[71], L. KANTOROVICH y SELTEN[72].

La Economía Matemática desborda evidentemente el tema de los juegos, la competición y las estrategias, que forman el reino de las matemáticas de la llamada Microeconomía. Después hablaremos brevemente de las matemáticas del mercado financiero.

En la Teoría de la Elección Social es importante el Teorema de Imposibilidad de

[65] *"Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels"*, 1913, pp. 501-504 en los Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Vol. II (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), Cambridge University Press).

[66] El libro se titula "Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses", título de lo más prometedor. Hemos de mencionar La Teoría de la Evolución de Darwin, que toca en un sentido el tema con su selección natural, que produce situaciones de equilibrio.

[67] Sus cinco favoritos son la teoría de juegos, el teorema del punto fijo, el problema de parada de Turing, el método simplex y ... se ruega al lector que consulte el libro.

[68] "Theory of games and economic behaviour", J. von Neumann and O. Morgenstern,

[69] Famoso también por sus trabajos en geometría y en ecuaciones en derivadas parciales y por su azarosa biografía reflejada en un filme reciente.

[70] Entre ellos J. F. Nash, "Non-Cooperative Games", 1951, Annals of Mathematics. "Two-Person Cooperative Games", 1953, Econometrica.

[71] Tinbergen es importante en nuestro relato, pues fue uno de los primeros propulsores de la modelización matemática más allá de los confines de la física; T. vio que las aplicaciones de las matemáticas podían afectar a muy diversas áreas.

[72] Otros científicos galardonados que han aparecido en nuestro relato son Lorentz, Raleigh, Planck, Einstein, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born y Feynman en Física y Lord Russell en Literatura.

ARROW[73], que pone un límite a las capacidades de los sistemas axiomáticos de elección, aplicando a la ciencia social las ideas de los célebres resultados de indecibilidad e incompletitud de Kurt GÖDEL (1931) para la aritmética formal, uno de los resultados más notables de la Matemática del siglo XX[74]. El resultado de Gödel trata de la indecidibilidad intrínseca a todos los sistemas formales que incluyan la aritmética, tema de Lógica y Fundamentos de la Matemática de apariencia eminentemente pura y por ello de nula interacción con el mundo práctico si hemos de creer a los fervientes defensores del aislamiento esencial de las matemáticas puras. Pues bien, volveremos a hablar de él en el próximo tema, que trata de ordenadores, de la mano de otro de nuestros héroes, A. Turing.

7 Ingeniería y matemáticas en la última revolución del siglo. Los ordenadores y la matemática computacional

La realización práctica del viejo sueño de construir una máquina de calcular toma cuerpo en forma del moderno ordenador que acredita dos orígenes, la Tecnología y las Matemáticas, los cuales confluyen en un fantástico invento en el año 1946[75]. Por una parte tenemos el viejo proyecto de la máquina de calcular, pensada ya en el siglo XVII por B. Pascal[76] y G. Leibniz[77], y que debe tanto a Ch. BABBAGE a principios del siglo XIX[78] proyecto que es realizable en el siglo XX de forma eficiente gracias al avance de la electrónica: primero el tubo de vacío y luego una espectacular saga de progresos técnicos que nos llevan al semiconductor, a la miniaturización y al *chip*[79].

Pero el ordenador o computadora no nace como máquina de calcular pasiva, sino

[73]Kenneth J. Arrow, trabajo doctoral en 1948-49 publicado en *Social Choice and Individual Values*, 1951. En 1972 Arrow recibió el Premio Nobel de economía por sus contribuciones al estudio del equilibrio económico y la elección social.

[74]La incompletitud de los sistemas formales fue publicada en *"Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme"*, "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and other related systems".

[75]Con esta fecha hago referencia al ordenador ENIAC.

[76]Su *machine à calculer*, la *Pascalina*, se hizo famosa.

[77]Leibniz pensó en la dirección del álgebra, la lógica simbólica y el lenguaje universal. Recientes investigaciones históricas indican que una cierta primacía de tales máquinas calculadoras se debe a otro alemán, Schickard, 1623, pero su máquina no llegó a funcionar.

[78]Babbage trabajó toda su vida en un proyecto mecánico, la *Analytical Machine*, el precursor del moderno ordenador electrónico, con la notable ayuda de Ada Byron, Lady Lovelace, hija del poeta y matemática.

[79]El circuito integrado fue inventado por R. Noyce y J. Kilby en 1958.

que nace con un programa. Esta es la herencia de la lógica matemática, desde G. Boole con su álgebra al programa de formalización de las matemáticas de D. Hilbert, que lleva a la prueba de indecibilidad e incompletitud de Kurt Gödel en 1931 que destruye el sueño de Hilbert de una matemática de demostraciones automáticas. Ello provoca el interés de otro matemático genial, ALAN TURING (1912-1954), que traduce el programa de formalización al lenguaje de las máquinas, 1937[80], e inventa con Alonzo CHURCH la teoría de la computabilidad, años antes de que el ordenador viera la luz.

A. TURING

Sigue un momento histórico: el esfuerzo de guerra, el desciframiento del código alemán Enigma, ... Entra en escena von Neumann con la idea del programa en memoria, y se construye el ENIAC en 1946[81].

La computadora moderna surge como una máquina calculadora eficaz con cuatro características: es de utilidad general, electrónica, digital y programable; *las dos últimas propiedades se relacionan directamente con las matemáticas.* La primera computadora comercial, UNIVAC, funcionó en 1951. En estos 50 años se pasa de las grandes máquinas (armatostes) que manejan kilobytes o megabytes a los ordenadores personales con capacidad de decenas de Gigas y a la WWW. La dualidad en el mundo del ordenador continua en forma de la famosa pareja Hardware y Software[82].

El mundo computacional, un nuevo mundo para las matemáticas.
El mundo del ordenador está cambiando poco a poco la vida diaria del ciudadano: las transacciones bancarias, el correo electrónico, la reserva de pasajes, ... Su efecto sobre las matemáticas, menos conocido por el gran público, es aún más dramático. Aparecen por un lado las nuevas ramas de la Matemática Computacional teórica, como la teoría de la computabilidad y la complejidad y la teoría de autómatas y lenguajes formales. Pero todas las ramas de la matemática pura y aplicada se contagian de la repentina

[80] *"On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem"*, Proceedings of the London Mathematical Society.

[81] Las siglas ENIAC significan *Electronic Numerical Integrator and Computer*, construido por J.W. Mauchly y J.P. Eckert en la Univ. de Pennsylvania; hoy es reconocido el trabajo pionero de J.V. Atanasoff. Mención merecen también el Colossus inglés, 1942, y las máquinas alemanas Z1 a Z4, cf. la ref. [25]. Todas estas máquinas tenían un propósito militar.

[82] Los ordenadores personales aparecen en 1977 y, en contra de las predicciones de los gurús, han ocupado la escena, gracias sin duda al progreso impresionante del hardware: un chip puede contener al final del siglo XX unos 10^9 transistores

capacidad para calcular efectivamente lo que antes era sólo imaginable, y este nuevo gusto se propaga como una infección (potente pero benigna) en la práctica cotidiana de las matemáticas: matemáticos, científicos e ingenieros calculan órbitas de satélites o trayectorias de sistemas dinámicos, distribuciones numéricas o series temporales de procesos reales, mapas climatológicos o estudios de singularidades, distribución de temperaturas en un alto horno o propiedades estadísticas de los ceros de la función Zeta de Riemann,... Y la finanza y la administración también calculan.

Entre los notables cambios acaecidos, las matemáticas tienen un papel importante en los procesos industriales u otros en que se combina la experimentación en laboratorio con las nuevas herramientas matemáticas: aparece la combinación de **modelización matemática - análisis matemático - simulación numérica y visualización - control,** que forma una herramienta de uso habitual en los más diversos campos: las comunicaciones, la predicción del tiempo, la astrofísica, la ingeniería minera, industrial, la industria del automóvil y del petróleo, los problemas medioambientales y la ecología, la economía y las finanzas, las comunicaciones, y en este momento la biología y la medicina, como veremos con algún detalle en la sección 8. Esta área de las matemáticas tiene como tarea *aproximar de una manera eficaz* las soluciones de modelos matemáticamente muy sofisticados y complejos. El interés por su desarrollo y aplicación da lugar a los grandes Institutos y Centros de Cálculo.

Los nuevos conceptos: modelo numérico, simulación numérica, experimento o exploración numérica, visualización dinámica,... se hacen de uso diario en el medio científico e industrial. El desarrollo de métodos de formulación numérica de los modelos continuos, como las ecuaciones diferenciales, es una rama fundamental de la matemática computacional (a saber, los métodos de diferencias finitas, y elementos finitos[83], los volúmenes finitos,...). El estudio de las propiedades y la convergencia de estos métodos constituye el Análisis Numérico, que tiene una conexión profunda con el Álgebra. Por otra parte, la capacidad de cálculo da nueva vida a la matemática discreta, como la teoría de grafos, con sus importantes aplicaciones (por ejemplo, a las redes telefónicas y en general al mundo de las comunicaciones).

Un nuevo paradigma de la ciencia. El broche final de esta evolución vertiginosa es el surgimiento de un nuevo paradigma científico en que la **Ciencia computacional** es el tercer componente básico del método científico, junto con la Teoría y el Experimento. Nos hallamos pues ante una alteración profunda de la herencia científica de Galileo y Newton, que la enriquece en la dirección de las matemáticas.

Esta nueva visión, que comenzó en la ingeniería y las ciencias físicas, se practi-

[83]Los elementos finitos son un ejemplo maravilloso del desarrollo de una herramienta matemático-numérica por el esfuerzo paralelo, pero separado, de matemáticos e ingenieros, cf. el interesante relato histórico de [2]. El fenómeno no es aislado, piénsese en la reciente historia de las ondículas o "wavelets". Estos ejemplos deberían llevarnos a pensar más en los beneficios de la comunicación.

ca hoy día intensamente en todas las ciencias, dando lugar a **nuevas disciplinas** o **subdisciplinas**, como la Física Computacional y la Dinámica de Fluidos Computacional, la Biología Computacional o la Química Computacional. Programas de las licenciaturas (incluso nuevas titulaciones), programas de investigación internacionales, centros de investigación, congresos y revistas prestigiosas confirman la relevancia del *tercer rostro* de la ciencia en los albores del siglo XXI. La ventaja del camino computacional queda perfectamente reflejada en la siguiente declaración de los Reviews in Computational Chemistry: *"As a technique, Computational Chemistry has the advantage of producing answers cheaply and quickly (compared to e.g. thermodynamic measurements)"*. Es decir que cuesta menos calcular que medir (y es fiable). Y añade otro aspecto importante, la capacidad para examinar lo hipotético: *"and [it works] for hypothetical structures, like transition states"*.

Lo anterior no se circunscribe a las ciencias clásicas, afecta incluso en mayor grado a la ingeniería y la ciencia económica. La novedad del cambio, que sucede ante nuestros ojos, es un reto de enorme importancia para el futuro de las matemáticas y resulta difícil de asimilar para muchos colegas. No hay nada malo en seguir anclado en un pasado glorioso,... pero se paga un precio. De la amplitud del panorama hablamos en la próxima sección.

8 Los retos y tendencias del siglo XXI. Matemáticas en las ciencias, la industria, las finanzas y la administración

En consonancia con los apuntes vistos de la reciente evolución de la matemática pura y aplicada, que combina la exigencia de una sólida teoría con una ambición universal, el panorama que ofrece el mundo de las matemáticas de cara al futuro es de una asombrosa variedad. Usando un idioma algo retórico, los expertos dicen que las matemáticas son *ubicuas*, está por todas partes, y *relevantes*, importan. La modelización matemática juega un papel mayor que nunca en la ciencia, la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales.

Mencionaremos solamente algunos de los principales temas de aplicación que aparecen en la literatura, en los congresos, en los programas de los institutos de investigación. También hemos utilizado una serie de fuentes como [11, 12, 13, 27, 33]. En itálicas señalamos aspectos matemáticos relacionados para comodidad del lector.

• Mecánica celeste. Problemas de la ciencia aeroespacial. *Estabilidad y caos en sistemas dinámicos. Atractores extraños.* Mecánica de sólidos y fluidos en gravedad cero.

• Teoría de fluidos. Aplicación a la Meteorología y la Climatología. Ingeniería del océano. Problemas medioambientales complejos, recalentamiento global y otros temas geosociales. *Modelos de circulación global, modelos de equilibrio; modelización estocástica del clima; jerarquías de modelos de complejidad intermedia, como los modelos geostróficos.* Glaciología. Acústica y aplicación a la industria del sonido. Fluidos industriales, lubricación. Turbulencia. *Predecibilidad y caos. Estabilidad, bifurcación. Problemas de frontera libre.* Áreas de intersección, como la interacción fluido-estructura.

• Aeronáutica. Problemas de la hidrodinámica. Vuelo supersónico y transónico. Problemas de la combustión (propagación de llamas, detonación). *Ondas de choque y ecuaciones hiperbólicas. Capas límite y desarrollos asintóticos. Ondas viajeras.*

• Física fundamental. Las matemáticas del mundo atómico y de las partículas elementales. El modelo estándar, la electrodinámica cuántica, la cromo-dinámica cuántica. *Teoría de grupos, renormalización, teorías gauge, supersimetría, ecuaciones de Yang-Mills, instantones, dilatones, "branes",.... Geometrías y topologías exóticas en dimensiones superiores.*

• Astrofísica. Relatividad general, modelos estelares. Matemáticas de la física de plasmas, magnetohidrodinámica. *Ecuaciones cinéticas (Boltzmann, Fokker-Planck, Vlasov, ...)* .

• Ciencias de la tierra. Problemas de recursos y minería. Problemas de conservación del medio ambiente. Transporte de contaminantes en el aire y el suelo. Hidrología computacional. *Las ecuaciones de la extracción de petróleo, de la filtración en los suelos, de la difusión de contaminantes: sistemas no lineales de EDPs y problemas de frontera libre.* Matemáticas de los fenómenos sísmicos, *propagación de ondas, problemas inversos.*

• Ciencia de materiales. Modelado y simulación de materiales "composites", materiales magnéticos, polímeros, cristal y papel. Propagación de fracturas y otros mecanismos de fallos. *Elasticidad lineal y no lineal. Teoría de la homogeneización.* Transiciones de fase, crecimiento de cristales, superconductividad e histéresis.

• Nanotecnología. Ópticas integradas, redes ópticas. Electrónica y óptica cuántica. Técnicas de Nanoescalas en medicina, materiales porosos. *Acoplamiento de modelos con estados cuánticos, mesoscópicos y continuos. Teoría de Boltzmann semiclásica, ecuación de Wigner.*

• Ingeniería industrial. Procesos de la siderurgia, altos hornos. Prototipos de la industria automovilística (fluidos, aerodinámica, materiales y teoría de la fractura).

• Comunicaciones. Telecomunicación y redes ópticas: análisis, simulación, optimización, optimización de la tasa de transmisión, diseño de redes. Antenas, rádar y sónar. *Teoría de campos electromagnéticos.* Los hornos de microondas acoplan las ecuaciones de Maxwell con la teoría del calor de Fourier.

• Matemática Discreta. *Teoría de grafos, combinatoria.* Aplicaciones a la administración de empresas, programación de tareas, rutas,...

• Informática. *Lógica matemática, algoritmia, complejidad computacional. Paralelización.* Autómatas finitos, lenguajes formales, *álgebra.* Aprendizaje de máquina, minería de datos, inteligencia artificial, proceso del idioma natural.

El diseño de la computadora cuántica abriría un nuevo mundo a la computación.

• Control. Control óptimo, control robusto, control no lineal. Control predictivo. Sistemas de control "fuzzy". Redes neuronales. Detección y diagnóstico de fallos en los procesos industriales. Modelado y control de sistemas económicos. Programación con condiciones. Comunicación y control de sistemas híbridos distribuidos.

• Automatización y Robótica. *Geometría Algebraica y computación.* Visión por computadora y realidad virtual. Aprendizaje biológico y computacional.

• Teoría de la información. Codificación de mensajes, códigos correctores de errores. Las sorprendentes aplicaciones de *la teoría de números y el álgebra.* Proceso y compresión de imágenes. *Ondículas, fractales, teorías de EDPs no lineales.* Reconocimiento del habla y las imágenes.

• La estadística en la ciencia, la industria, la empresa y el gobierno. Estimación y tests de hipótesis, diseño de experimentos. Procesos estocásticos. Series temporales. Epidemiología. Control de calidad. Análisis de varianza. Análisis multivariante. Muestreo, votaciones.

• Teoría de Optimización y Programación Matemática. Programación entera, programación no lineal, programación convexa. Métodos iterativos. Optimización del diseño industrial. *Métodos numéricos, ecuaciones en derivadas parciales, cálculo de variaciones, combinatoria, álgebra lineal.*

• Problemas de transporte óptimo. Los problemas del tráfico (modelos continuos y discretos). Planificación de redes. El tráfico en la *Web.*

• Economía. La matemática financiera (valoración de opciones, comercio de derivados, riesgo,...) une *las ecuaciones diferenciales estocásticas con las ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre.* Modelos para la economía global.

• Química. Química cuántica: *simulación de estructuras atómicas y moleculares a través de las ecuaciones fundamentales. Modelos de Schrödinger, Hartee-Fock, Thomas-Fermi, Born-Oppenheimer,...* Dinámica de reacciones, combustión. *Matemáticas de la nucleación, crecimiento de cristales y quemotaxis. La propagación de frentes, ondas viajeras, osciladores químicos. Caos.* Diseño de drogas.

Las Ciencias Naturales y la Medicina:

• Biología: Ecología matemática, epidemiología, biométrica, la bio-informática.

Matemática de la Genética, Filogenética computacional. La estructura y función del ácido nucleico. Evolución molecular. Proteómica. *Cálculo con ADN.* Alineación de secuencias, razonamiento borroso. Modelización matemática en biopolimerización.

• Medicina: interacción fluido-estructura como modelo para el flujo sanguíneo. Modelado y simulación de la función de otros órganos: cerebro, pulmones e hígado. *Auto-organización y geometrías fractales.* Asistencia computacional en cirugía. Farmacocinética, modelado del crecimiento de tumores. Neurociencia computacional. Matemática de las enfermedades infecciosas y difusión de epidemias. Órganos artificiales, modelado del sistema inmunológico.

• Tratamiento de imágenes en Medicina. Tomografía: tomografía computerizada, reconstrucción 3D de imágenes. *Transformadas de Fourier y Radon, problemas inversos.*

• Aunque la Matemática computacional (tomada aparte de la Informática) penetra todos los campos de aplicación, merece una mención por sí misma en este listado: métodos numéricos y códigos; algoritmos eficientes; aproximación, estimaciones (a priori y a posteriori) del error, métodos y modelos adaptativos, mallado, descomposición del dominio, análisis multiescala, cálculo numérico de procesos aleatorios,...

• Por otro lado, la Modelización Matemática en sus diferentes variantes (determinista, continua, discreta,...) plantea los problemas de validación de modelos y las técnicas para obtener y elaborar los datos en que se basa la validación (ver apartado de Estadística), así como el importante (y debatido) concepto de jerarquía de modelos, una manera progresiva de acercarse a la " realidad "que es hoy día parte integrante de la "caja de herramientas"del científico aplicado (los viejos idealistas con su la "verdad eterna"se revolverán en sus tumbas; ¿o quizá no?).

Detendremos aquí el listado y haremos una muy necesaria pausa con algunos comentarios. Se observará que la lista está solo ligeramente articulada por afinidad de temas; sin embargo, la interconexión íntima de las ramas de la matemática aplicada nos obliga a cometer repeticiones, o a poner un tema bajo uno de varios posibles títulos. Por otra parte, hemos dejado fuera diversos campos de aplicación: las teorías de los sistemas complejos, la autosemejanza en el mundo natural, la formación y reconocimiento de modelos (*patterns*) y el sistema de posicionamiento global (GPS), la matemática de los sistemas electorales; la arquitectura, la industria textil y la alimentaria también han llamado a la puerta de la matemática. Y hay una muy fuerte tendencia para que la Matemática juegue un papel importante en las artes visuales, como ya hace en la Industria del Ocio combinada con el progreso formidable de la tecnología de las computadoras. Y ¿cómo pude haberme olvidado de hablarles de la Teoría de Nudos, del Método Simplex de G. Dantzig, líder incontestado del uso de las matemáticas en las empresas, o del Filtro de Kalman? En conclusión, esta larga lista es incompleta, principalmente debido al conocimiento limitado del autor; pero espero que convencerá al lector de la variedad enorme de intereses de la matemática aplicada actual.

Me gustaría agregar una reflexión personal final sobre las tendencias profundas que veo bajo la diversidad anterior. Las matemáticas del porvenir serán mucho más **estocásticas** y **algorítmicas** de lo que fueron hasta el siglo XX, y la **modelización matemática** será considerada una parte esencial de la educación y la actividad matemática, junto con el cálculo y la simulación. Pero pase lo que pase, me parece que una **prueba** clara y completa, y tan elegante como sea posible, será siempre el meollo de nuestra ciencia, como ha sido desde tiempos del buen Euclides, y los matemáticos futuros todavía se entusiasmarán con **problemas y conjeturas,** y algunos de ellos al modo de Galileo **mirando al mundo** (o las estrellas). Y construirán, posados sobre hombros de gigantes del pasados, esos delicados, intrincados y huidizos objetos llamados **teorías,** algunas de ellas destinadas al olvido, unas pocas a la eternidad,..., o al uso diario. ¿Quién se maravilla ya de la sorprendente existencia de las ondas electromagnéticas llenando el aire, ahora que incluso se han vuelto una forma de contaminación? Pero basta de filosofía por el momento.

9 De los 23 problemas de Hilbert en 1900 a los problemas de Clay en 2000

Ya hemos señalado el profundo impacto que la lista de problemas propuesta por D. Hilbert en 1900 tuvo sobre sus contemporáneos y sucesores. Han pasado 100 años desde entonces y diversas iniciativas pretenden dar la réplica al gran hombre, cf. por ejemplo los libros de Arnold - Atiyah - Lax - Mazur, y de Engquist - Schmid[84] El miércoles 24 de mayo de 2000 se anunció en el Collège de France de Paris el Conjunto de los 7 problemas matemáticos que constituyen los *Millennium Prize Problems*, patrocinados por el *Mathematics Clay Institute.* Recordando a Hilbert pretendía reflejar 7 de los más importantes problemas abiertos de la ciencia matemática al comienzo del nuevo siglo [85]. Estos problemas recorren las diversas áreas las matemáticas puras y aplicadas y son

1. P versus NP (Teoría de la computación)
2. Conjetura de Hodge (Geometría algebraica)
3. Conjetura de Poincaré (Geometría y topología)

[84]Para más información ver el artículo de Jackson citado en las referencias finales. Ver también el vol. 3, no. 1 (2000) de la Gaceta de la RSME, artículo por J. L. Fernández y M. de León.

[85]la resolución de cada problema valdría al autor un premio de 1 millón de dólares. Toda la información sobre el premio y los problemas se puede obtener en la dirección `http://www.claymath.org/prize_problems`.

4. Hipótesis de Riemann (Teoría de números)

5. Existencia de Yang-Mills y Hueco de Masa (Física teórica)

6. Existencia y regularidad para las ecuaciones de Navier-Stokes (Mecánica de Fluidos y PDEs)

7. Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer (Geometría aritmética algebraica)

A riesgo de ser impertinente (pido disculpas al lector) desearía dar una impresión personal sobre esta lista que parece destinada a ser famosa e influyente. Afortunadamente, incluye problemas abiertos importantes en temas variados de la matemática pura y aplicada. Sin embargo, no hace suficiente justicia a la visión aquí expuesta de la matemática como lenguaje y herramienta básica de la ciencia y la ingeniería.

10 Ejemplos de nuevos cursos

Tras dos secciones consagradas a la enumeración, es tiempo de volver al trabajo. A continuación echaremos una ojeada más detallada a algunas de las novedades de la matemática actual. Entre las muchas opciones, tomaremos tres ejemplos: de las finanzas, las comunicaciones y la física fundamental.

• Matemáticas de la incertidumbre financiera y el riesgo

Un ejemplo notable de las aplicaciones prácticas de las matemáticas, desarrollado en los últimos decenios, es la llamada matemática financiera. Los nuevos instrumentos financieros de *futuros* y *derivados* se basan y a su vez motivan esta nueva rama de la matemática aplicada, la cual combina procesos estocásticos, ecuaciones en derivadas parciales y problemas de frontera libre. El resultado más famoso es el *modelo de Black-Scholes*[86] para el mercado de opciones, el cual reduce la valoración a la solución de una ecuación del calor (inversa en el tiempo). Me gustaría registrar esta reducción en la siguiente sucesión de fórmulas

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma\, dB_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + b\, S\, \frac{\partial P}{\partial S} - r\, P = 0,$$

que pasa de una ecuación diferencial estocástica, representando la incertidumbre del azar, a una EDP determinista que permite la valoración del precio. Éste es un ejemplo sorprendente de *transferencia de conceptos y técnicas* hecho posible por la clave común matemática (y por el hecho de que F. BLACK era licenciado en Física Cuántica).

[86]F. Black, M.Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, 1973. Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997. ¡Una primera versión del modelo había sido propuesta por L. Bachelier en 1900! se tardaron siete décadas para llegar a un modelo realista y a que la aplicación ocurriese.

La inestabilidad inherente a esos mercados y las enormes repercusiones sobre la economía pública y privada hacen tanto más importante la aplicación del método matemático para intentar hallar la clave matemática que rige tales procesos y a reemplazar las reglas empíricas y la adivinación en la práctica financiera por matemáticas. Un reto para el nuevo siglo.

• Del análisis de Fourier a las ondículas

Hemos discutido hace un rato la situación creada en el análisis de Fourier cuando Du Bois Raymond halló un ejemplo de serie de Fourier no convergente, y queremos recordar aquí que la tercera opción para salir del atolladero consistía en cambiar la base de las funciones usadas en la representación. Esto es lo que hizo A. HAAR en 1909[87], resolviendo así la dificultad en principio. Podemos decir que éste es el origen remoto de las ondículas (wavelets), una idea que tardó un siglo entero en madurar. La investigación en este problema antes de la Segunda Guerra Mundial parece haber seguido un interés exclusivamente matemático sin ninguna aplicación en mente. Pero después de la guerra, ingenieros y científicos aplicados aterrizaron en la idea llevados por las aplicaciones, notablemente, a la teoría de la información de Claude SHANNON. En el futuro las dos líneas de pensamiento se unieron y el análisis de ondículas se ha convertido en una importante y fértil intersección de las fronteras de las matemáticas, el cálculo científico y el tratamiento de señales[88].

• Modelos matemáticos de la Física Teórica y la naturaleza de la materia

Las dos grandes revoluciones científicas en la Física del siglo XX, es decir la Relatividad y la Mecánica Cuántica, han impreso en esta ciencia una aún mayor conexión con la matemática pura. La Física se enfrenta con el desafío enorme de construir una teoría que una a ambos modelos en un todo coherente. Experimentales y teóricos han emprendido la búsqueda de la "teoría última"que explicaría todo, desde la constitución del átomo a los extremos más lejanos del Universo. Tal teoría está aún por llegar (y podría estarlo mucho tiempo) pero se han obtenido grandes logros (pues se hace camino al andar, como dijo el gran poeta). He aquí algunos hitos, todos ellos matemáticas profundas.

La Electrodinámica Cuántica (QED) fue desarrollada para describir la interacción electromagnética en el marco de la Mecánica Cuántica, y trata de las cargas y los fotones y usa los hermosos diagramas de Feynman. Una teoría matemáticamente coherente valió a sus autores, Julian SCHWINGER, Richard FEYNMAN y Sin-Itiro TOMONAGA el premio Nobel de Física en 1965. Por su lado la Cromodinámica[89]

[87] *"Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme", Math. Annalen* **69** (1910), pp. 331-371

[88] La mayor parte de esta información está tomada del libro [19], cf. también [16]

[89] El nombre hace referencia a la pintoresca denominación para la carga conservada, llamada "el color".

hace un trabajo similar para describir la fuerza llamada “fuerte”que actúa entre los *quarks*, partículas postuladas por M. GELLMANN y G. ZWEIG en 1964 como los entes constituyentes de neutrones y protones. De las cuatro fuerzas básicas de la Naturaleza (gravitacional, electromagnética, débil y fuerte), las dos intermedias reciben una teoría unificada en 1967 con el trabajo de S. WEINGER, SH. GLASHOW y Abdus SALAM. *Simetría*, *gauge* y *renormalización* son las palabras clave en este mundo de alta matematización. Las ecuaciones de Maxwell, Schrödinger y Dirac ceden el lugar a las ecuaciones de Yang-Mills. El trabajo cristaliza en los primeros años 70 en el Modelo Estándar de partículas elementales, que explica la realidad atómica en términos de tres generaciones de quarks y *leptones*. Estas partículas actúan mutuamente a través de la teoría del grupo $SU(2)\times U(1)$ para la fuerza electrodébil y la de $SU(3)_{color}$ para la fuerza fuerte. La Matemática está por consiguiente en el puro centro del modelo, en forma de grupos de Lie, geometría diferencial (más específicamente, conexiones en fibrados) y ecuaciones en derivadas parciales.

Siguiendo adelante, las Teorías de Gran Unificación intentan combinar ambas teorías de grupos en una. En la Teoría de Cuerdas la vieja idea básica de las partículas puntuales es reemplazada por la idea de cuerdas vibrantes elementales. Al final del siglo XX la Teoría de Supercuerdas propone un modelo matemático para la unificación de todas las fuerzas, de todas las físicas. Le falta sin embargo comprobación experimental suficiente; sin ésta una teoría es simplemente una teoría. Y la búsqueda continúa. Este chorro de ideas ha motivado desarrollos matemáticos importantísimos, asociados a los nombres de matemáticos famosos como M. F. ATIYAH, S. K. DONALDSON y E. WITTEN.

Estos físicos creen pues que la combinación modelos-y-experimentos nos permitirá entender un mundo extraño en que la materia, el espacio, y tiempo no son lo que nosotros solemos pensar, dónde el espacio vacío está lleno de actividad e incluso podrían existir bastantes dimensiones espaciales adicionales (es decir, por encima de las 3 que vemos más el tiempo) arrugadas en distancias ridículamente pequeñas (la distancia típica sería de 10^{-35}m, por eso no las vemos, *voilà l'astuce*; pero nos dicen que vemos la matemática, y a su debido tiempo veremos las consecuencias).

11 Hechos y opiniones

En palabras de John MILNOR, *“pure mathematicians tend to judge any work in the mathematical sciences on the basis of its mathematical depth, the extent to which it introduced new mathematical ideas and methods, or it solves long standing problems”*. A lo que yo agregaría que las nuevas ideas y métodos deben ser juzgados por su productividad, y mencionaría como importantes cualidades la elegancia de la prueba y la visión o intuición. Continúa así: *"However, when mathematics is applied to other branches of human knowledge, a quite different question must be asked first: to what extent does it increase our understanding of the real world"*[90].

Hubo en épocas no muy remotas un movimiento de separación en las matemáticas que parecía alejar cada vez más a los cultivadores de ambos géneros, puro y aplicado (en la medida en que se puede hablar de una separación que en los mejores casos nunca ha sido neta). Y no debemos olvidar el rechazo de muchos científicos puros contra un tipo de matemática aplicada más atenta a la ganancia que a la exigencia científica, y, al contrario, el rechazo de muchos científicos aplicados hacia los mundos excesivamente artificiales (y aburridos) de cierta matemática pura. Afortunadamente, presenciamos hoy día una serie de sucesos simultáneos - a saber, la explosión de vitalidad de la matemática pura, los éxitos de las matemáticas en la formulación y resolución de los problemas clave de la física contemporánea, la economía y la industria, y la variedad insospechada de aplicaciones de todas las ramas de las matemáticas. Todo ello está alterando profundamente la visión de ambos campos, que tienden a confluir en uno, en la mejor tradición del pasado. Este esfuerzo generoso no es nuevo, como expresan las palabras del notable matemático ruso del siglo XIX P. L. CHEBYSHEV: "Unir la teoría y la práctica conduce a los más favorables resultados; no sólo la práctica se beneficia, también las ciencias se desarrollan bajo la influencia de la práctica que revela *nuevos temas* a la investigación, así como *nuevos aspectos* de viejos temas"[91]. La importancia de la teoría para la práctica viene descrita en estas bellas palabras de Euler: *"La généralité que j'embrasse, au lieu de'éblouir nos lumières, nous découvrira plutôt les véritables lois de la Nature dans tout leur éclat"*[92].

Es para los profesionales un gran misterio el que las partes pura y aplicada de las matemáticas sean caras de la misma moneda. Que ambas no son exactamente lo mismo queda muy bien reflejado en las palabras de Albert Einstein: "Hasta donde las leyes de matemática se refieren a la realidad, no son exactas; y en cuanto son exactas no se refieren a la realidad"[93]. Pero el ideal y la práctica se unen con resultados sorprendentes. Es famosa la frase de E. WIGNER que se asombraba de la "efectividad de las matemáticas en las ciencias más allá de lo razonablemente esperable", literalmente, *"the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences"*[94].

[90]Ver las Notices de la Amer. Math. Soc., 1998.

[91]Tomado de [20]. Énfasis nuestro.

[92]En traducción algo libre, "La generalidad con la que opero, en lugar de despistarnos, nos descubrirá las verdaderas leyes de la Naturaleza en todo su esplendor". La frase figura en la tapa de la revista Archive Rat. Mech. Anal.

[93]Tomado de *Geometry and Science*, 1921. Incluido en *Sidelights of Relativity*, Dover, 1983. Traducción propia

[94]Conferencia dada en New York, 1959. Publicada en la revista *Comm. Pure Applied Math.* **13**

HACER Y ENSEÑAR MATEMÁTICAS HOY. Pasamos a comentar los cambios en la manera de "hacer matemáticas", especialmente cuando son aplicadas. La emergencia de la *era del ordenador* ha dado nuevas alas a las matemáticas, *¡podemos calcular!* La capacidad de *cálculo eficaz, rápido y barato* se ha hecho disponible al principio del siglo de XXI para el científico y en medida creciente para el hombre común, y la sociedad pide cada día más. Ello plantea retos y reflexiones.

Los teoremas siempre serán teoremas y una deducción lógica sigue siendo la llave de la correcta comprensión, pero la vía al descubrimiento nunca será ya la misma, como tampoco lo es el *día después:* la implementación numérica es ahora punto importante en muchas de las matemáticas (en todas las matemáticas aplicadas). No se trata de abjurar de Euclides, se trata de desarrollar la parte de Euclides inventor de algoritmos. Los efectos sobre la enseñanza son de lo más drástico, como es de suponer, pero todavía están siendo desarrollados[95].

Con ello llegamos a un importante tema de debate, ¿es la nueva forma de hacer y aplicar las matemáticas meramente instrumental o genera nuevas matemáticas? Este es un debate tan viejo al menos como Arquímedes, que utilizaba la mucha mecánica que sabía para inventar pruebas geométricas o conceptos completamente nuevos. Sostenemos pues que los nuevos campos son fuente inagotable de nuevos problemas, nuevas intuiciones, o visiones sorprendentes de viejos temas que dábamos por perdidos o por agotados. Repasemos tan sólo algunas de las páginas anteriores para ver la sorprendente cosecha geométrica de las teorías de partículas de Donaldson, Witten y compañía. O las consecuencias del poder de cálculo sobre las disciplinas más puras como la teoría de números o el álgebra.

LA MODELIZACIÓN. Un rasgo importante de las matemáticas aplicadas modernas es la modelización matemática, el arte de idear *representaciones sensatas* de los más diversos fenómenos del mundo real en términos matemáticos, basadas en *hipótesis racionales* que simplifican la realidad para hacerla calculable. J. L. LIONS, el matemático francés recientemente fallecido que tanto contribuyó a la presente relevancia de las matemáticas en el mundo industrial europeo, dijo en 1991: *"Ce que j'aime dans les mathématiques appliquées c'est qu'elles ont pour ambition de donner du monde des systèmes une représentation qui permette de comprendre et d'agir"*[96]. Y añadió: *"De toutes les représentations, la représentation mathématique, lorsqu'elle est possible, est celle qui est la plus souple et la meilleure."*[97]

(1960), 1-14.

[95]Internet está poblada de propuestas didácticas maravillosas; junto a otras abominables, claro está

[96]" Lo que me gusta de las matemáticas aplicadas es que ambicionan dar una representación del mundo de los sistemas que permita comprender y actuar".

[97]"De todas las representaciones la matemática, cuando es posible, es la mejor y la más flexible".

Hemos de recordar que un modelo es sólo un modelo y refleja la realidad de la forma contradictoria que Einstein describía. Pero es todo lo que nosotros tenemos, a menos que consideremos un modelo mejor (o incluso una jerarquía de ellos). Esta es la gloria y la debilidad de la modelización, aspecto crucial de la matemática aplicada actual. El público que presencia el acalorado debate sobre las predicciones de los modelos matemáticos del clima acerca del calentamiento global en la Tierra sabe cuán importante es el problema y debe comprender *cuán difícil es llegar a conclusiones nítidas y fiables manejando evidencias parciales, basadas en modelos parciales y apoyadas por enormes bases de datos de compleja interpretación*, y huyendo de juicios a priori por muy verosímiles que parezcan. Pero es también claro que toda conclusión no basada en números y modelos fiables es pura ideología. Lo que nos permite apreciar el mérito de los modelizadores gigantes del pasado, como Newton, Maxwell, Einstein y el grupo cuántico.

PROMESAS Y PLAZOS. Como hemos apuntado, una enorme parte de las mejores matemáticas se ha originado para explicar aspectos del mundo físico, pero rara vez las consecuencias dramáticas de las matemáticas han sido inmediatas. La formulación de los procesos físicos en clave matemática al gusto de Galileo exige un proceso de maduración que tiene sus reglas y ritmos, que van desde varios años a varios siglos[98].

En un nivel más especulativo, el conocido matemático y escritor científico Ian Stewart afirma que es posible que las matemáticas sean eficaces “porque representan el lenguaje subyacente del cerebro humano”. Con lo cual invertimos la apuesta de Galileo, quizá entendemos el mundo en clave matemática porque esa es la clave de nuestra mente. Pero ese es un debate distinto.

PUNTOS PARA UN DEBATE. Resumiré a continuación las opiniones básicas que me he formado en años de estudio y curiosidad por el mundo de la matemática. Espero que sea mínimamente útil en el eterno y necesario debate:

- Sólo las buenas matemáticas pueden ser buenas matemáticas aplicadas. Las Matemáticas Aplicadas como arte diferente y separado de la Matemática propiamente dicha, simplemente no existen[99]. Pero al poner las matemáticas a trabajar, la aplicación las cambia, las enriquece y les abre nuevas vías.

- La Matemática sólo es aplicada de verdad si ataca un importante problema de la ciencia, la tecnología, la economía, o más generalmente, de la sociedad. Ya hemos visto cuán variados estos problemas pueden ser.

- Si bien podemos llegar a juzgar con cierto grado de fiabilidad qué es importante hoy, la tarea de predecir qué rama de la matemática será importante mañana

[98] Sería una bendición si la administración y las autoridades educativas fueran conscientes de este hecho en su toma de decisiones.

[99] Tomo en parte esta idea radical de A. Rényi, [34], quién la atribuye en su relato a Arquímedes.

(la llamada planificación estratégica) excede la capacidad de las personas sensatas, salvo que simplemente contestemos: "las buenas matemáticas importarán" o "las matemáticas del mundo real importarán siempre". Las hipótesis autorizadas y opiniones sobre temas específicos son humanas y pueden ser útiles como orientación personal, pero cuando se trata de decisiones y prioridades la prudencia es de rigor.

- Desde un perspectiva histórica no se puede afirmar que los grandes matemáticos vivan en una torre de marfil de teorías desconectadas de toda realidad. No decimos que no puedan hacerlo, o que no les resulte interesante, necesario, incluso natural en muchos momentos vivir en la abstracción absoluta; afirmamos que, vista en perspectiva, su actividad ha sido un factor esencial en la comprensión que hoy tenemos del mundo.

- Está además la interesante cuestión de filosofía: es un hecho bien atestado que al enfrentarse a un enigma matemático, al matemático "aplicado" le gusta construir y comparar modelos adecuados, y ansía *resolver el enigma* preciso planteado sea cual sea el daño temporal que se inflija a la perfecta deducción lógica, mientras su colega "puro" se deleita en la prueba lógica; sólo la *demostración* gobierna sus días.

Así pues, ¿son lo mismo las matemática puras y las aplicadas? o más cuidadosamente formulado, ¿son lo mismo en el fondo? Dejemos al amable lector que juzgue por sí mismo. Ya saben mi opinión (más o menos), pero me permito agregar en un tono más relajado una cita de Yogi Berra[100]: "En teoría no hay ninguna diferencia entre teoría y práctica; en la práctica, sí que hay".[101]

12 Breve apunte sobre las Matemáticas en España

España tuvo en un momento dado de la Edad Media tardía un papel importante en la transmisión de la cultura árabe a Occidente e incluso hubo un rey en Sevilla[102] que escribió poesía y promovió las matemáticas (el saber astronómico). Al Andalus, la España musulmana, tenía sólidos intereses científicos, en particular en medicina y astronomía, con sabios de renombre como AZARQUIEL (o Al-Zarkali, activo en Toledo) quien compuso tablas astronómicas. El sistema de numeración indio basado

[100]Famoso jugador de béisbol americano, muy conocido por sus cómicas pero atinadas salidas. Esta es la frase original: *"In theory, there is no difference between theory and practice; in practice, there is"*.

[101]He aquí una (medio) broma sobre las diferentes formas de ver las matemática: los ingenieros dicen que las ecuaciones aproximan la realidad, mientras los físicos piensan que la realidad aproxima las ecuaciones; por su lado, los matemáticos se asombran ante la idea de que exista una conexión entre "sus" ecuaciones y la realidad (y se enojan no poco si se les insiste).

[102]Alfonso X el Sabio.

en la posición ya estaba en uso en Al Andalus en el siglo IX. [103] Después de la toma por los Cristianos (1085 d.C.), Toledo, la ciudad de las tres culturas - cristiana, árabe y judía - fue durante siglos un gran centro de saber con su Escuela de Traductores que vertieron al latín los trabajos de autores griegos y árabes[104]. En otra dirección, el mallorquín Raimundo LULIO (Ramón Llull) desarrolló en su *Ars Magna* un entero arte de razonamiento algorítmico en que podemos ver un temprano precedente del Álgebra de Boole y la lógica de las computadoras (Llull, que vivió en el siglo XIII, es al mismo tiempo uno de los clásicos más antiguos de la lengua catalana). Un siglo más tarde, los mapas náuticos llamados *portulanos* de Mallorca eran la cima del arte, y los nombres de SOLER y CRESQUES son muy conocidos. El último, un judío, participó en la organización de la escuela náutica portuguesa que fue el origen del descubrimiento del camino a las Indias alrededor de África, e, indirectamente, también de América.

Luego las cosas fueron a peor por largo tiempo. Las fundadas esperanzas del tardo Medievo y primer Renacimiento fallaron en España, y la matemática (y las otras ciencias) han tenido un humilde devenir durante siglos. Mientras la literatura española y arte están con la crema de la creación mundial desde el siglo XVII hasta nuestros días, está claro que ningún nombre español aparece en los libros de texto afamados en que se aprenden las matemáticas, elementales o superiores. Hay en tales textos numerosos conceptos y resultados nombrados en honor a autores de las diversas naciones con gran tradición científica: franceses, ingleses, alemanes, italianos (e Italia era un país católico), en tiempos más recientes rusos y americanos,.., como también son frecuentes los ejemplos países que, debido a su tamaño y las circunstancias no jugaron un papel tan prominente en la Historia, pero que sí están en el Libro de la Ciencia. Durante estos siglos de desarrollo glorioso, de Galileo a Einstein, no se mencionan nombres españoles. ¿Pudo la historia haber sido diferente? El rey Felipe II comprendió la necesidad de la ciencia y creó una *Academia Matemática* en Madrid (1582) bajo la dirección de Juan de HERRERA, el arquitecto de El Escorial, pero la institución no tomó cuerpo y dejó de existir unos años después, mientras que iniciativas similares dieron nacimiento en el extranjero a la *Royal Society* en Inglaterra, la *Académie des Sciences de Paris* en Francia, y así sucesivamente. Ha habido sin duda ejemplos de ilustres hombres digno de mención, como PEDRO CIRUELO, OMERIQUE, JORGE JUAN y ECHEGARAY, pero son autores aislados, una escuela nunca tomó raíz hasta muy recientemente y ningún gran teorema salió de sus esfuerzos. Hubo en el siglo XVIII un gran esfuerzo de los gobiernos ilustrados por afianzar en el país el amor

[103] La primera escuela andalusí de matemáticas parece haber sido la de Maslama al Magriti, es decir, de Madrid, que floreció en el siglo X en Córdoba. Puede considerarse la primera escuela en la Península en todos los tiempos, y tuvo numerosos discípulos. En el siglo XII el rey Almutamán de Zaragoza fue un notable matemático.

[104] El monasterio de Sta. María de Ripoll en Cataluña también tenía una biblioteca mundialmente conocida.

al estudio y la industria y España participó en la medición del meridiano terrestre, pero las consecuencias matemáticas fueron reducidas.[105] ¿Cuáles son las razones? Difícil cuestión, pero señalemos que durante siglos se prohibió a los estudiantes y profesores españoles viajar y aprender en los países extranjeros, una regla de seguridad bastante estricta que previno con éxito contra la heterodoxia, y al tiempo contra la ciencia y el progreso.

Éste no es lugar para un estudio detallado de la Historia, para lo cual dirigimos al lector a los especialistas[106], así que procederemos señalando cómo se ha llegado en fecha muy reciente a un presente bastante halagüeño. España pareció surgir de su profundo letargo matemático en la primera mitad de este siglo y la figura del insigne J. REY PASTOR sirve como referencia a un esfuerzo notable de poner al día a nuestro país basado en las únicas ideas que podían funcionar: el estudio en los grandes centros del extranjero y la importación de las matemáticas que realmente existen en la comunidad mundial, que es la única que tiene real sentido en la ciencia, al menos en la nuestra. Este método había tenido un éxito fulgurante en la creación de la matemática norteamericana y todo indicaba que había de funcionar en nuestro país. Sin embargo nuestra funesta historia se encargó de disgregar el notable esfuerzo, que daría frutos abundantes en tierras americanas, personificados en figuras como L. SANTALÓ. Con alguna muy honrosa excepción, que la hubo, la actividad matemática hasta los años 60 volvió al ritmo del pasado.

Poco a poco, sobre todo a partir de los años 70, comienza por fin el despertar de España a lo que podríamos llamar la realidad matemática. Tras una década de esfuerzo ingente de una generación que aprendió en las fuentes originales, que enseñó en sus clases los textos más actuales, que organizó seminarios de investigación y que viajó o mandó a sus jóvenes alumnos al extranjero, que empezó a publicar en las revistas internacionales reconocidas y a participar en los grandes eventos, llegan a partir de los años 80 los años dorados de la *creación original*, lo que se traduce en las mil facetas de la vida matemática auténtica y que se reflejan (aunque no se resuman) en la palabra *publicación*: las mejores revistas empiezan a recibir artículos de autores españoles, primero tímidamente, luego en cascada[107]. Las señales de los buenos tiempos se hacen múltiples e inequívocas, y podemos concluir que "España ya no es diferente". Los indicadores oficiales nos permiten poner cifras a esta evidencia de cambio. De ellos se deducen dos hechos que inicialmente han sorprendido a muchos:

(a) Que las matemáticas españolas han pasado de un lugar muy modesto en 1980

[105]El lema de la Academia de Ciencias portuguesa resume el espíritu de esta época: *Nisi vtile est qvod facimvs stvlta est gloria.* "Si lo que hacemos no es útil, tonta es la gloria".

[106]Como Juan Vernet, cuyo trabajo [46] se usa en los párrafos anteriores.

[107]En esta coyuntura conviene evocar las palabras de Galileo sobre la Ciencia que le atribuye B. Brecht en su "Vida de Galileo": *La Ciencia tiene un solo mandamiento: contribuir a la Ciencia.*

(menos del 0.4 % de la producción mundial según la base de datos ISI[108]) a una posición honorable en el momento, inmediatamente después de EE.UU., Alemania, Inglaterra, Francia, Rusia, Italia, Japón y Canadá, con una producción en revistas importantes que se ha multiplicado por un factor de más de 10 y representa en 2001 una proporción mundial de más de 4,18 % (ISI).

(b) Que en el análisis comparativo de la ciencia española, la Matemática figura entre las especialidades bien situadas.

Para más información sobre la investigación matemática en España en el último decenio referimos al lector al informe [21], que refleja en gran detalle los avances realizados.

Otra consecuencia del estado creativo de la matemática española es la presencia de numerosos y valiosos libros de texto y monografías de investigación en prestigiosas colecciones. Digamos además que España, que ha alcanzado una sólida posición en la investigación, también cuenta con una tradición en educación matemática, con un papel muy influyente en el ICMI[109].

Finalmente, la tendencia hacia los aspectos computacionales y aplicados de las matemáticas, junto con el énfasis en las matemáticas como herramienta por excelencia en la modelización, es ahora fuertemente sentida en una comunidad anteriormente ligada casi en exclusiva al pensamiento matemático abstracto. Abrir las ventanas al ancho mundo de ahí fuera es un reto enorme en pro de la salud de nuestra matemática y del bienestar de generaciones futuras, y todos los esfuerzos son bienvenidos. ¡Dejemos entrar el aire fresco!

13 Conclusión

Llegamos al fin de nuestro viaje. Hemos dicho al principio del relato que la "Matemática Aplicada"es la Matemática del "Mundo Real". Puede quedarle al lector cierta duda sobre la esencia de tales conceptos, y se preguntará si han sido suficientemente aclarados en el texto. No ha sido nuestro propósito examinar a fondo este problema más bien filosófico. Siguiendo la práctica usual de los matemáticos aplicados, poco partidarios del exceso de teorización, o quizá movidos por la inmensidad de la tarea y la premura de tantos nuevos hallazgos, hemos seguido una *aproximación constructiva* a ambos conceptos y hemos intentado mostrar su contundente relevancia en la gestación de la sociedad actual y su papel en el futuro que se vislumbra. Lo que

[108] *Institute for Scientific Information.*

[109] *The International Commission on Mathematical Instruction*, presidida durante años por el matemático español Miguel de Guzmán.

no excluye que otros se ocupen de tales temas con un espíritu más discursivo.

Recordando a Galileo, me gustaría concluir así: el *Libro de la Naturaleza* se abre ante nosotros para que lo admiremos con su infinita, cambiante y sorprendente belleza; las matemáticas como lenguaje de la ciencia están ahí para que comprendamos la Naturaleza, y nos permiten además utilizarla y explotarla, estando este aspecto final cargado de promesas y peligros, como todo lo humano. Espero que los matemáticos de hoy día realicemos nuestra parte en el esfuerzo de comprender y mejorar la Sociedad de la Información que nos ha tocado ver nacer. En la era de los ordenadores y la información, *la Realidad está en el Número*, como habría gustado a Pitágoras. O por lo menos un enorme pedazo de ella la explican y la reproducen los números, con la ayuda de nuestros amigos científicos y tecnólogos, y de los ordenadores.

- - • - -

AGRADECIMIENTOS Y COMENTARIO FINAL. La idea de este artículo divulgativo se originó con los esfuerzos de las Sociedades Matemáticas españolas para celebrar el Año Matemático Mundial 2000. El autor está en deuda con los organizadores de aquel evento, con la Sociedad Nuevo Milenio, con los colegas que han suministrado múltiples sugerencias, con la Univ. de Texas en Austin y con la Sociedad Española de Matemática Aplicada que tuvo a bien premiar un extenso escrito en inglés que desarrolla estas ideas y que pueden encontrar en `http://www.uam.es/juanluis.vazquez`.

El apéndice histórico refleja ideas del autor sobre el presente de la Matemática española tomado con mínimos cambios de la referencia [45], sección primera. Más sobre el mismo asunto en [44]. Interesantes fuentes en español son los *Boletines de SEMA*; la *Gaceta de la RSME* (cf. el vol. 3, 1 (2000)) y la *Revista Española de Física*, vol 14, no. 5, consagradas al estado de la Matemática con ocasión de la celebración del Año Mundial Matemático. Cf. también [1, 8, 18, 27, 32, 42]. Las ilustraciones están tomadas del sitio web *The MacTutor History of Mathematics Archive,* de la Univ. de St Andrews, un notable archivo biográfico cuya lectura me ha sido de gran utilidad. Finalmente, la lista de referencias que sigue refleja lecturas del autor durante la preparación de este texto y no significa en modo alguno una selección de las mejores lecturas disponibles.

Referencias

[1] V. ARNOLD, M. ATIYAH, P. LAX, B. MAZUR, “Mathematics: Frontiers and Perspectives”, AMS Publications, 2000.

[2] I. BABUSKA, *Courant Element: Before and After*, in “Finite Element Methods”, edited by Krizek, Neittaanmäki and Sternberg, M. Dekker Inc, New York, 1994.

[3] G. I. BARENBLATT, *George Keith Batchelor and Daniel George Crighton, Applied Mathematicians*, Notices American Math. Soc., vol 48, no 8 (2001), 800–806.

[4] J. L. CASTI, “Five Golden Rules”, John Wiley, New York, 1996. “Five More Golden Rules”, John Wiley, New York, 2000.

[5] G. CHAITIN, “The limits of mathematics”, Springer, Singapore, 1998.

[6] B. CIPRA, “What is happening in the Mathematical Sciences”, vols. 1–4, Amer. Math. Soc, Providence, RI.

[7] COMAP, “Las Matemáticas en la vida cotidiana”. Addison Wesley - Universidad Autónoma de Madrid. 1998. Versión inglesa: S. Garfunkel et al., “Introduction to Contemporary Mathematics”, W.H. Freeman & Co, New York, 1988.

[8] B. ENGQUIST (Editor), W. SCHMID (Editor), “Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond”, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[9] R.P. FEYNMAN, “Feynman Lectures On Physics (3 Volume Set)”, Reading, Mass., Addison-Wesley Pub. Co. [1963-65] ,

[10] R.P. FEYNMAN, “Six Easy Pieces: Essentials of Physics Explained by Its Most Brilliant Teacher”, Helix Books, 1995 (Addison-Wesley Longman, 1996), and “Six Not-So-Easy Pieces: Einstein’s Relativity, Symmetry, and Space-Time”, Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. 1997.

[11] I. FONSECA ET AL., “The Impact of Mathematical Research on Industry and vice versa”, Round Table at 3rd European Congress of Mathematics, Barcelona, july 2000.

[12] A. FRIEDMAN ET AL., “Mathematics in Industrial Problems”, (a 10 volume collection), IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag (1988-1998).

[13] A. FRIEDMAN, J. LAVERY, “How to Start an Industrial Mathematics Program in the University”, SIAM Report, Philadelphia 1993

[14] J. GLEICK, “Chaos: Making a New Science”, Penguin Books, Nueva York, 1987.

[15] G.H. HARDY, “A Mathematician’s apology”, Cambridge, 1940.

[16] E. HERNÁNDEZ, G. WEISS, “A first course on wavelets. With a foreword by Yves Meyer”, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[17] “Mathematical Developments arising from Hilbert Problems”, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII, Amer. Math. Soc, Providence, 1976.

[18] A. JACKSON, *Mathematical challenges of the XXI century*, Notices Amer. Math. Soc., vol. **47**, no 10 (2000), pp. 1271-1273.

[19] S. Jaffard, Y. Meyer, R.D. Ryan, "Wavelets, tools for Science and Technology", SIAM, 2001.

[20] A.I. Khinchin, "Mathematical Foundations of Information Theory", Dover, 1957 (Papers appeared in 1953, 1956 in Uspekhi Mat. Nauk in Russian).

[21] "La investigación matemática en España", informe elaborado por el Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM2000), coord. por C. Andradas y E. Zuazua, Madrid, 2002.

[22] M. Kline, "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", Oxford Univ. Press, 1972.

[23] M. Kline, "Mathematics. The loss of certainty", Oxford Univ. Press, Oxford, 1980.

[24] J. P. Maury, "Galileo, el mensajero de los astros", Claves, Ed. B.S.A., Barcelona, 200.

[25] N. Metropolis, J. Howlett, G. C. Rota, eds., "A History of Computing in the Twentieth Century", Academic Press, 1980.

[26] P. A. Meyers, "Encyclopedia of Modern Physics", Academic Press, San Diego, 1990.

[27] Mitteilungen der Deutschen Math. Vereinigung (es decir, *Notices of the German Math. Union)*, 2-1998. Contiene un informe sobre el futuro de las Matematicas por D. Mumford, A. Friedman, L. Lovász, Yu. Manin, G.C. Rota, R.B. Jensen y R. Penrose.

[28] K. Moriyasu, "An elementary primer in Gauge Theory", World Scientific, Singapore, 1983.

[29] J. Muñoz Santonja, "Newton, el umbral de la ciencia moderna", col. La Matemática en sus personajes, vol. 3, Nivola ed., Madrid, 1999.

[30] S. Nasar, "A beautiful Mind: A Biography of John Forbes Nash, Jr", Simon & Schuster, New York, 1998. En castellano "Una mente prodigiosa. Historia de John Forbes Nash", Grijalbo Mondadori, 2001.

[31] I. Newton, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", Pepys, London, 1687. En castellano: "Principios matemáticos de la Filosofía Natural", Alianza Ed., Madrid, 1987.

[32] Obra Colectiva, "Fotografiando las Mathematics", Carroggio SA de Eds, Barcelona 2000.

[33] J.T. Oden et al., "Research directions in computational mechanics", Report of the US National Commitee on Theoretical and Applied Mechanics, Washington DC, 2000.

[34] A. Rényi, “Dialogues on Mathematics”, Holden-Day, San Francisco,1967.

[35] Revista Española de Física, vol 14, no. 5, año 2000. Special number “La Física y las Matemáticas”.

[36] J. M. Sánchez Ron, “El siglo de la ciencia”, Taurus, Madrid, 2000.

[37] M.M. Schiffer, L. Bowden, “The role of Mathematics in Science”, The Math. Assoc. of America, New Math. Library vol. 30, 1984.

[38] J. Simmons, “The scientific 100”, Citadel Press, Kensington Publ. Corp, Nueva York, 1996.

[39] S. Singh, “The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography”, Doubleday & Company, 1999.

[40] W. Smith, Mapping and Sequencing the Human Genome: A Beginner's Guide to the Computational Science Perspective, “ACM Crossroads Student Magazine”, `http://www.acm.org/crossroads/ xrds4-1/genome.html`.

[41] D. Stauffer, H.E. Stanley, “From Newton to Mandelbrot, A Primer in Theoretical Physics”, Springer, Berlin, 1991.

[42] I. Stewart, “The Problems of Mathematics”, Oxford Univ. Press, 1992.

[43] M. Tanur, F. Mosteller et al., ”Statistics: A Guide to the Unknown”, Brooks/Cole, 1989.

[44] J.L. Vázquez, *Las Matemáticas y los objetivos del año 2000. Un llamamiento a los matemáticos españoles*, Gaceta de la Real Soc. Matemática Española, vol. 3, 1 (2000), pp. 9-22. Cf. also `http://dulcinea.uc3m.es/ceamm`.

[45] J.L. Vázquez, *Mathematical Events in Spain in the Year 2000*, Intelligencer, Springer-Verlag, July 2000, pp. 12-14.

[46] J. Vernet Ginés, “Historia de la Ciencia Española”, Editorial Alta Fulla, 1998.

[47] M. S. Waterman, “Introducción a la Biología Computacional”, Chapman & Hall, 1995.

Dirección:
Juan Luis Vázquez, Dpto. de Matemáticas,
Univ. Autónoma de Madrid, 28049 Madrid, España
Tel. 34-91-3974935, FAX 34-91-3974889
Correo electrónico: `juanluis.vazquez@uam.es`
`htpp://www.uam.es/juanluis.vazquez`

UNIBERTSITATE-GIZARTE

ELKARGUNEA

ENCUENTROS

UNIVERSIDAD-SOCIEDAD

Recopilación de Intervenciones en los

"Encuentros Universidad-Sociedad"

EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
MATEMATIKAREN BETEKIZUNA ENPRESAN

"UNIBERTSITATE-GIZARTE ELKARGUNEA" HITZALDIEN BILDUNA

Palacio Euskalduna – Bilbao, 21 de Febrero de 2000

Euskalduna Jauregia – Bilbao, 2000ko otsailaren 21ean

eman ta zabal zazu

universidad del país vasco

euskal herriko unibertsitatea

Gizarte Kontseilua - Consejo Social

Gran Vía 38, 6ª 48009 Bilbao
Tel. 94 435 46 10 Fax 94 424 11 37
E-mail: bozconse@lg.ehu.es

Edita / Argitaratzailea :

Secretaría Técnica del Consejo Social de la UPV/EHU

UPV/EHUko Gizarte Kontseiluaren Idazkaritza Teknikoa

Imprimaketa / Impresión: Lankopi

Paper erreziklatuan imprimatu da

Impreso en papel reciclado

Tirada / Ale kopurua: 1500

ENCUENTROS UNIVERSIDAD-SOCIEDAD

UNIBERTSITATE-GIZARTE ELKARGUNEA

“El papel de las Matemáticas en la Empresa”
“Matematikaren betekizuna Enpresan”


ELKARGUNEA
ENCUENTROS
EL PAPEL DE LAS MATEMATICAS EN LA EMPRESA
MATEMATIKAREN BETEKIZUNA ENPRESAN

Participantes en el debate sobre

"El papel de las Matemáticas en la Empresa"

Pedro Mª Altuna, Miembro del Consejo Social en representación de ELA

Juan José Anza, Departamento Matemática Aplicada, Escuela de Ingenieros Industriales y de Ingenieros de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

Javier Barrondo, Director de Planificación y Selección de IBERDROLA

Agustín Berasaluce, Subdirector General del Departamento de Investigación Comercial, BBVA

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Matemáticas

Carlos Bertrand, Departamento de I+D, SIDENOR

Ignacio Caminos, Responsable de Planificación y Control, Bilbao Bizkaia Kutxa

Antonio Corral, Director de Area, Consultora IKEI (Instituto Vasco de Estudios e Investigación)

Javier Duoandikoetxea, Director del Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Miembro del Comité en el País Vasco para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas en el País Vasco

Mª Pilar Elorrieta, Secretaria Técnica, Consejo Social UPV/EHU

Manuel Errezola, Director de Información, Docencia e Investigación Sanitaria, Departamento Sanidad, Gobierno Vasco

Fernando Espiga, Director de la Unidad Mecánica, LABEIN (Laboratorio de Ensayo e Investigación Industrial)

Mª Jesús Esteban, Profesora Universidad de París

Alberto Fernández, Director de la UET, SPRI (Sociedad de Promoción y Reconversión Industrial)

Eva Ferreira, Departamento de Economía Aplicada III, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Bilbao, UPV/EHU

Purificación González, Directora del Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S. Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

José A. Jainaga, Director General SIDENOR

Pedro Larrea, Presidente Consejo Social UPV/EHU

Juan Andrés Legarreta, Director Gerente de EUSKOIKER y Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Ingenieros de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

Iñaki Les, Departamento de I+D, SIDENOR

Mikel Lezaun, Director del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Coordinador del Comité en el País Vasco para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas

José Antonio Lozano, Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Facultad de Informática, UPV/EHU

Lourdes Llorens, Directora del Instituto Vasco de Estadística EUSTAT

Gabriel de Mariscal, Letrado Asesor del Consejo Social, UPV/EHU

Juan V. Martín, Director del Departamento de Máquinas y Motores Térmicos, E.T.S. de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

David Maza, Departamento de I+D, SIDENOR

Patricia Pérez, Jefe de Equipo, CORITEL, S.L

Gloria Pérez, Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación, Facultad de Ciencias, UPV/EHU

Gonzalo Rubio, Departamento de Fundamentos del Análisis Económico, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, UPV/EHU

Josu Sagastagoitia, Director Gerente de Metro Bilbao

Luis Angel Seco, Profesor Universidad de Toronto

José Manuel Tarela, Departamento del Electricidad y Electrónica, Facultad de Ciencias, UPV/EHU

Manuel Tello, Decano de la Facultad de Ciencias y Miembro del Consejo Social

Arantza Urkaregi, Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Miembro del Consejo Social

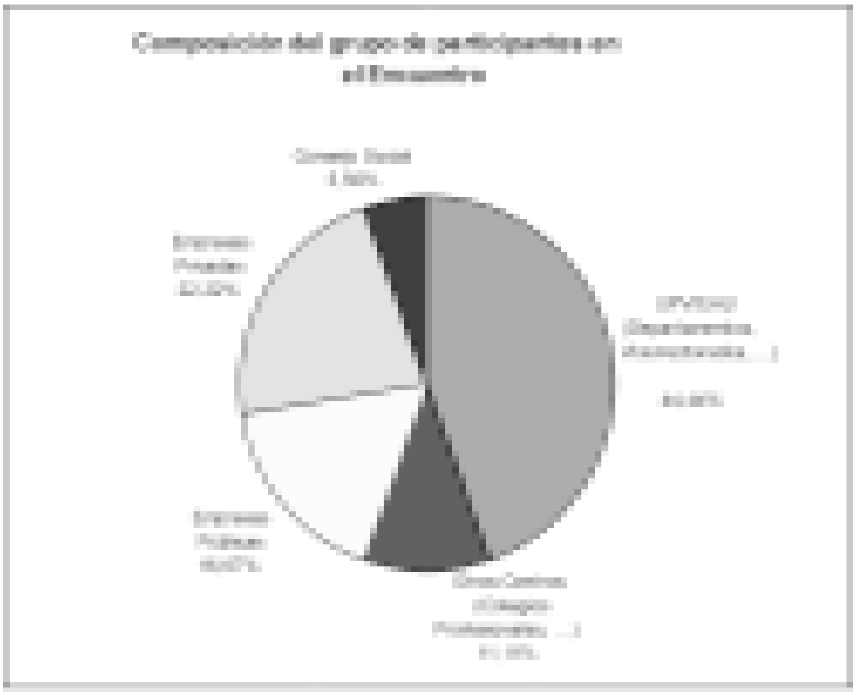
Enrique Urrutia, Profesor del Instituto Miguel de Unamuno y Ex-miembro del Consejo Social de la UPV/EHU

Javier Urrutia, Director de Promoción de I+D, Vicerrectorado de Relaciones Universidad Empresa, UPV/EHU

José Roman Ustarroz, Representante del Igualatorio Médico Quirúrgico

Luis Vega, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UPV/EHU

José M. Zarzuelo, Director del Departamento de Economía Aplicada IV, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, UPV/EHU



El cuestionario de satisfacción ha sido respondido por 22 de los asistentes (64,70 %).

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO (notas medias)

1. ORGANIZACIÓN DE LOS ENCUENTROS
   - a. La comunicación e información previa a las Jornadas: 6,95
   - b. La duración: 8,18
   - c. El horario: 8,09
   - d. Medios utilizados: equipos, material, traducción simultánea,... 7,88

2. CONTENIDOS
   - a. Contenidos tratados: 7,59
   - b. Cantidad temas abarcados: 7,04
   - c. Claridad, amenidad en la exposición: 7,45
   - d. Ponente: 8,50

3. SUGERENCIAS
   - a. Valoración general del Encuentro: 7,75

Indice

“El papel de las Matemáticas en la Empresa”

Pedro Larrea, Presidente del Consejo Social

Buenos días a todos. Bienvenidos a este Encuentro y muchas gracias por su asistencia. Una asistencia cualificada y equilibrada en el sentido de que aproximadamente la mitad de los aquí presentes procedéis del mundo académico y estáis involucrados en actividades docentes y de investigación en torno a las matemáticas y el 50% restante somos gente del mundo de la empresa, tanto pública como privada. Esta composición así de equilibrada promete dar bastante juego en el coloquio de este Encuentro.

Tras una breve presentación del ponente, a cargo de Manuel Tello, Presidente de la Comisión de Relaciones con la Sociedad, Alfredo Bermúdez de Castro expondrá su ponencia, en torno a 30 ó 40 minutos, a partir de esa hora tenemos tiempo hasta las dos, para debatir. Yo os pido que habléis de manera absolutamente libre, siguiendo algún hilo conductor que os haya parecido interesante seguir.

La importancia del tema no hay que enfatizarla. Por propia experiencia profesional yo puedo asegurar que muchas veces me he quedado bloqueado por falta de una mayor formación matemática en el desarrollo de algunos asuntos. En cualquier caso, hay aquí suficientes representantes de la empresa como para podernos confirmar si esto es así. Espero que la parte académica sepa vender a la empresa hasta qué punto la utilización de los instrumentos de análisis matemático pueden permitir una gestión más profesional de las organizaciones empresariales.

Os recuerdo que la documentación entregada contiene un resumen de la introducción que va a realizar el ponente, una publicación que recoge las intervenciones de la jornada anterior de estos Encuentros y el programa de las charlas que el Comité del País Vasco ha organizado para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas durante el mes de marzo. También quiero recordar que podéis hacer llegar al ponente las preguntas que deseéis y en el momento que queráis hacerlo, haciendo uso de unas hojas que a este efecto tenéis encima de la mesa.

Por último, decir que a mi derecha está el profesor Bermúdez de Castro. También nos acompaña el profesor Lezaun, que es el Coordinador del Comité en el País Vasco para los eventos del Año Mundial de las Matemáticas y, como sabéis, profesor de la UPV/EHU; a mi izquierda está la Secretaria Técnica del Consejo, Pilar Elorrieta y, el profesor Tello, Presidente de la Comisión de Relaciones de la Sociedad y Decano de la Facultad de Ciencias.

Sin más cedo la palabra al profesor Tello.

Manuel Tello, Decano de la Facultad de Ciencias y Miembro del Consejo Social

Buenos días. La Jornada de hoy se va a desarrollar en torno a la ponencia que va a dar el profesor Bermúdez de Castro. El profesor Bermúdez de Castro es Catedrático en la Universidad de Santiago de Compostela. Inició su formación postgraduada en París en el laboratorio que en aquel momento dirigía el profesor Lyons, posteriormente Presidente de la Academia de Ciencias francesa. Es interesante recalcar que los franceses llaman laboratorio a un departamento de matemáticas donde se investiga en matemáticas. Al terminar su Doctorado volvió otra vez a Santiago donde se dedica a trabajar en ámbitos diversos de las matemáticas. Para los fines de este encuentro debemos destacar su dedicación a las aplicaciones de las matemáticas a temas de desarrollo industrial e impacto económico de los entornos. Así, ha trabajado en temas relacionados con la industria metalúrgica, con la industria aerospacial y con la industria medioambiental haciendo análisis de impacto medioambiental, sistemas de corrección, etc. El trabajo profesional del profesor Bernúdez de Castro nos demuestra que el mundo de las matemáticas no es simplemente el de suministrar una herramienta que necesitan las demás áreas del conocimiento sino, que es una ciencia que tiene contenido en sí misma y que, además en las sociedades avanzadas tiene un interés creciente para el sector productivo. Desde su incorporación a la Universidad de Santiago ha dirigido una docena de tesis doctorales y ha formado parte, prácticamente, de todas las iniciativas que han surgido en España y muchas de las que han aparecido en Europa relacionadas con la Aplicación de las Matemáticas a Entornos Industriales. Así pertenece a la Sociedad Española de Métodos Numéricos e Ingeniería, y a la Sociedad Española de Matemática Aplicada, desde su creación. Además es miembro de varias Comisiones Europeas dedicadas exactamente al mismo tipo de problemas. Entre ellas destaca, su participación en una red europea de excelencia (son redes que se crean para intentar incrementar la competitividad de Europa) dedicada a las matemáticas, a la computación y a la simulación para la industria. Y lo que le da valor a su personalidad como docente y como científico es el hecho de, dedicándose a temas tan aplicados no deja de ser valorado en ámbitos mucho más restringidos a ciencias básicas. Una prueba de ello es la reciente concesión del Premio de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Esto quiere decir que también los temas aplicados pueden ser de valor, pueden tener valor y además, en una sociedad innovadora, deben de tener valor. Y sin más les dejo con él, que es quien realmente nos va a dirigir la sesión.

CONFERENCIA

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

En primer lugar quiero agradecer la invitación. Cuando hace unos días los profesores y amigos Mikel Lezaun y Luis Vega contactaron conmigo para ver si participaba en estas Jornadas, debo confesarles que experimenté sensaciones contradictorias. Por un lado el tema me agradaba mucho, pero por otro lado suponía un desafío para una persona que es de profesión matemático y que por lo tanto está más acostumbrado a hablar de ecuaciones y de teoremas, que a participar en un foro como éste, con una presencia importante de personas que, conociendo las matemáticas, no son realmente especialistas... En fin, creo que de todas formas la misión del ponente no es más que recopilar una serie de elementos para suscitar un debate y estoy seguro que la alta cualificación de todos ustedes va a suplir todas las carencias de mi intervención.

La charla va a tener dos partes: en una primera voy a hablar, de forma muy general, de las aplicaciones de las matemáticas, de cuál es la situación en nuestro país y de qué cambios habría que introducir para mejorarla; porque yo creo que se puede mejorar. En la segunda parte voy a intentar ilustrar algunos aspectos de la primera contándoles experiencias que ha llevado a cabo nuestro grupo de investigación en la Universidad de Santiago de Compostela con algunas empresas. De manera que la primera idea clave es que las matemáticas son útiles para el sistema productivo. Yo diría que son útiles en dos vertientes bastante diferentes, la primera se deriva del hecho de que estudiar matemáticas forma a la persona y le confiere una serie de aptitudes genéricas como son: capacidad de análisis, capacidad para detectar y analizar problemas y por lo tanto para intentar resolverlos, capacidad para comunicar, para formalizar, es decir, lenguaje, rigor, etc. Yo creo que esto es algo de lo que todos los aquí presentes somos conscientes y, sin duda, es lo que lleva a algunas empresas, a contratar matemáticos, no necesariamente en puestos de matemáticos, no necesariamente para hacer cálculos, sino para integrarse en equipos en el ámbito, por ejemplo, de la organización. Pero, además de esta vertiente hay otra de la que yo querría hablar más aquí, y es que las matemáticas sirven para resolver problemas tecnológicos y, en este sentido, entroncan con algo que hoy resulta fundamental en la empresa moderna: la innovación. Las matemáticas, como luego intentaré ilustrar con algunos ejemplos, constituyen un soporte esencial, una valiosa herramienta, para resolver problemas tecnológicos en el ámbito de la innovación; pero también es bien conocido que las matemáticas ayudan a tomar decisiones en el ámbito de la planificación, de la organización de la producción, de la planificación financiera; en el mundo de las modernas finanzas, las matemáticas constituyen un soporte fundamental para la evaluación del precio de los “productos derivados”. Pero, además de ser útiles en la industria, en la empresa en general, las matemáticas son útiles para mejorar la calidad de vida y reducir el impacto que las actividades económicas producen en el medio ambiente. Aquí tenemos tres ejemplos que ilustran este epígrafe que encabeza la transparencia; son ejemplos de índole muy diversa. En primer lugar, cuando uno entra en un hospital y se somete, por ejemplo, a una exploración radiológica, detrás de ese aparato hay matemáticas. El análisis de Fourier está detrás de muchos dispositivos que se utilizan hoy en radiodiagnóstico; los aparatos que se emplean para corregir la miopía con láser utilizan matemáticas. La medicina yo creo que es un ámbito donde en los próximos años las matemáticas van a estar muy presentes. Pero las matemáticas permiten también hacer cosas que están presentes en nuestra vida cotidiana, como es el caso de la predicción meteorológica. Cuando uno observa el mapa del tiempo a través de la televisión todas las noches, el llamado mapa de isobaras, generalmente desconoce que ha sido producto de una simulación en ordenador del comportamiento de la atmósfera. Ese mapa y otros que ayudan a los meteorólogos a predecir el tiempo a corto y medio plazo, se obtienen al resolver un modelo matemático constituido por ecuaciones. Lo mismo ocurre en el estudio de la evolución del clima; cuando se dice "si las actividades humanas no permiten reducir las emisiones de dióxido de carbono en un cierto porcentaje, el planeta se va a calentar tantos grados en el años 2100", es porque existen modelos matemáticos que están indicando este tipo de evolucion. Un último ejemplo que enlaza con un tema de gran interés social: las matemáticas ayudan a evaluar el impacto ambiental. Con ayuda de modelos matemáticos se puede saber si las emisiones de ciertos vertidos, por ejemplo en una ría, van a ser toleradas por el ecosistema o, por el contrario, van a producir aumentos inadmisibles de la contaminación.

Bueno, pues, a pesar de todo esto, a pesar de que las matemáticas son realmente útiles, tanto para el sistema productivo como para mejorar la calidad de vida de los ciudadanos, en España la presencia de matemáticos en la empresa es escasa, a diferencia de países de nuestro entorno como Reino Unido, Francia o Alemania. Los matemáticos están poco en las empresas; los encontramos, fundamentalmente, en la docencia, en la investigación básica, y aunque es cierto que cada vez hay más empresas que contratan a matemáticos yo creo que no los contratan para hacer cálculos, no los contratan para hacer matemáticas en sentido estricto, los contratan la mayoría de las veces para tareas relacionadas con la informática de gestión. Las razones de esta situación son diversas; algunas son de carácter general, podrían aplicarse no sólo a los matemáticos, sino también a físicos, a químicos... Entre ellas está una falta de tradición científica y tecnológica. Los científicos tenemos conciencia clara de que en España ha habido recientemente un enorme avance en la investigación; en el caso de las matemáticas es clarísimo: en los últimos 20 o 25 años ha habido un desarrollo extraordinario, pero también somos conscientes de que no hay nombres relevantes en la historia de las matemáticas que sean españoles. Tenemos, por tanto, una falta de tradición científica que se traduce en una posición débil en el campo de la innovación tecnológica. Es cierto que, como decía, esta situación está cambiando.

Probablemente esta falta de tradición científica lleve a que la mayoría de la población no perciba la importancia que los avances científicos tienen en su bienestar. Antes les ponía un ejemplo en el ámbito de la medicina: estoy convencido de que cuando alguien va a hacerse una exploración radiológica a un hospital va a pensar que el aparato que tiene delante está relacionado con los ordenadores, con la informática; sin embargo, yo creo que no es consiente de que detrás de ese aparato hay algoritmos matemáticos bastante sofisticados. Por lo tanto, resulta lógico que después ese ciudadano no se muestre muy sensible a dar su apoyo a la investigación matemática. En mi opinión ésta es una de las causas por las que en este país no ha habido ningún programa para el desarrollo de la investigación matemática, como los que existen en otros campos de la ciencia o la tecnología La situación se refleja también en la poca presencia que los temas matemáticos, y en general los científicos, tienen en los medios de comunicación; de nuevo aquí hay una diferencia con los países de nuestro entorno.

Y por último, algo que afortunadamente está cambiando, y es que no existe una tradición de colaboración entre los centros de investigación y el sistema productivo. En este sentido yo creo que foros como éste del Consejo Social ayudan sin duda a que la situación cambie.

Pero además de estas causas de carácter general, yo creo que existen otras que son más específicas, más particulares de las matemáticas; en las que los matemáticos tenemos una responsabilidad especial. Me refiero por ejemplo a la orientación de los planes de estudio de las Facultades de Matemáticas que, en mi opinión, han estado muy polarizados hacia la matemática pura. Nos hemos preocupado de formar profesionales para que investigasen, lo cual ha dado sus frutos: un indicador como son las publicaciones realizadas por españoles en matemáticas en los últimos años, se ha incrementado considerablemente y ha llegado a porcentajes realmente importantes. Sin embargo hemos descuidado otros aspectos, muy importantes también por su transcendencia social, como son las aplicaciones. Lo peor es que esto no sólo ha ocurrido en las Facultades de Matemáticas, sino también en las Escuelas de Ingeniería y ahí el asunto es mucho más grave porque los ingenieros deberían estar especialmente sensibilizados por las aplicaciones de las matemáticas. En muchas ocasiones las matemáticas en la Escuelas Técnicas han jugado un papel de selección: puesto que son asignaturas difíciles, entonces las suspende mucha gente y eso permite que sólo continúen los mejores.

Con objeto de respetar el horario y no superar la media hora o cuarenta minutos, voy a hablar de la modelización de manera muy esquemática. En primer lugar quisiera hacer una observación: como todos sabéis, las matemáticas son muy diversas y en una charla como ésta resulta imposible referirse a todas ellas; por ejemplo no voy a hablar de la estadística, pero creo que es obvio el papel que tiene esta disciplina en muchos ámbitos; tampoco de la matemática discreta y sus relaciones con la informática; yo voy a hablar, fundamentalmente, de la modelización en ingeniería, por lo tanto me voy a restringir a un ámbito importante pero no el único de la matemática aplicada.

La idea es bien sencilla: el mundo físico se rige por unas leyes que se pueden formular con matemáticas de modo que éstas son, de alguna forma, el lenguaje de las ciencias experimentales; tradicionalmente de la física, pero hoy día también de la biología o las ciencias sociales. Entonces, estas leyes constituyen modelos que permiten simular el comportamiento de los dispositivos o procesos industriales. Generalmente los modelos están constituidos por sistemas de ecuaciones; esas ecuaciones tienen unas incógnitas que son las magnitudes físicas que representan el fenómeno objeto de estudio. Por ejemplo, si se desea conocer lo que pasa en el interior de una caldera de carbón de una Central Térmica, todos somos conscientes de que medir, observar dentro de un recinto donde tienen lugar flujos de gases complejos, temperaturas elevadas, etc., es algo realmente difícil. Entonces una alternativa consiste en recurrir a modelos matemáticos: la física y la química nos han proporcionado ecuaciones que gobiernan fenómenos como el movimiento de los fluidos, la transferencia de calor, las reacciones químicas de la combustión, etc. Pues bien, todas estas ecuaciones se pueden resolver hoy día con ayuda, eso sí, de ordenadores muy potentes y de métodos matemáticos sofisticados. Uno puede determinar, efectivamente, cuál es la temperatura en cada uno de los puntos de una caldera, cuál es la concentración de los diferentes gases, saber si la reacción de combustión progresa adecuadamente o no, si se producen asimetrías en la caldera que puedan provocar un calentamiento excesivo de alguna de sus paredes y por lo tanto escoriaciones, etc. Bueno, es claro que el uso de modelos matemáticos es una herramienta que permite al ingeniero diseñar y también operar adecuadamente una caldera de una Central Térmica. Este ejemplo resulta de alguna forma paradigmático, ya que se puede repetir en muchos otros ámbitos de la industria. Ahora me referiré a algunos ejemplos concretos.

Esta transparencia incluye algunos que son bien conocidos. Por ejemplo, el cálculo estructural con elementos finitos. Se trata de una herramienta que se ha incorporado perfectamente a la industria. Hoy día, el diseño de un avión, tanto en los aspectos estructurales como aerodinámicos, se lleva a cabo en el ordenador antes de construir maquetas y hacer ensayos en túnel de viento. Cabe pensar en lo que esto supone de ahorro de tiempo y dinero, y su importancia en el ámbito de la industria moderna que debe situarse en una economía abierta donde es preciso desarrollar los productos a gran velocidad para mantener la competitividad.

Antes me referí a aplicaciones de las matemáticas a otros campos diferentes al de la empresa industrial. En esta línea querría mencionar, aunque sea de pasada, uno que está experimentando un gran desarrollo en los últimos tiempos: el de las finanzas; concretamente el cálculo de los precios de los llamados productos derivados entre los que se cuentan las famosas “opciones sobre acciones”.

Esta ecuación que ven ustedes en la transparencia se utiliza para calcular el precio de una “opción europea”. Como pueden observar se trata de una ecuación en derivadas parciales que en este caso concreto se puede resolver “a mano” haciendo cálculos matemáticos. Esto es lo que hicieron Black, Merton y Scholes, los dos últimos Premio Nobel de Economía en el año 1997. Pero hoy día hay productos financieros mucho más sofisticados que estas opciones europeas, como las opciones americanas, o las asiáticas y si uno quiere calcular su precio tiene que resolver ecuaciones de este estilo; en muchas ocasiones esto no es posible hacerlo a mano y entonces es necesario ir a métodos numéricos y utilizar el ordenador como herramienta de cálculo.

Después de todo lo que llevo dicho está claro que hay una gran relación entre el modelado matemático y la informática, de hecho si el modelado matemático es cada vez más útil se debe, indudablemente, al avance de los ordenadores. En efecto, los modelos que rigen los procesos que interesan en ingeniería se conocen desde finales del siglo XIX; sin embargo la mayoría son ecuaciones complicadas que hasta la introducción de los ordenadores sólo se podían resolver en casos muy especiales de carácter académico y de escaso interés industrial. El avance de los ordenadores, su abaratamiento, factor muy importante, y el desarrrollo de nuevos métodos de cálculo permiten resolver modelos complejos en tiempos de cálculo razonables. Por lo tanto, los ordenadores están permitiendo que la simulación numérica sea realmente una herramienta útil, y no sólo para la gran empresa. Hace 10 o 15 años, tan solo la gran industria utilizaba modelización matemática. La razón es que, en aquella época, los ordenadores que permitían resolver en tiempos de cálculo razonables los modelos eran superordenadores, por lo tanto, dispositivos muy costosos que requerían instalaciones sofisticadas. Sin embargo, en la actualidad, muchos de estos modelos se pueden resolver en ordenadores personales y esto significa una auténtica revolución porque, la herramienta ya está al alcance de la pequeña y mediana empresa.

Esta transparencia es un poco más técnica y recoge lo que sería la metodología de la simulación y el modelado matemático. Lo primero que hay que hacer es, evidentemente, analizar los fenómenos que uno pretende simular. Por ejemplo, si se quiere estudiar la combustión en una caldera de carbón, hay que pensar, en primer lugar, cuáles son los fenómenos fisico-químicos involucrados. El análisis del proceso va a permitirnos detectar los fenómenos fisico-químicos y por tanto los modelos matemáticos que rigen su comportamiento. El paso siguiente es la construcción del modelo. Después hay una etapa importante que es el análisis matemático de este modelo, quizás uno de los aspectos clásicos del quehacer de los matemáticos. De ella podemos obtener una valiosa información, sobre todo cualitativa, sobre el comportamiento del sistema. Pero las cosas no paran aquí porque ahora existen métodos numéricos y ordenadores potentes que hacen posible resolver la mayoría de los modelos. Este proceso va a producir cantidades ingentes de números y es necesario tener unos sistemas de representación que los haga fácilmente aprehensibles. De nuevo la informática proporciona una herramienta fundamental para la visualización de estos resultados. Finalmente todas estas etapas tienen que ir acompañadas de una validación del modelo, comparando sus predicciones con medidas experimentales. La experimentación sigue siendo necesaria aunque la simulación numérica permita reducirla: en primer lugar se necesita para determinar los parámetros característicos de los materiales, como puede ser un módulo de elasticidad en un cálculo de estructura, pero también, en segundo lugar, la validación de un modelo requiere contrastar sus resultados con medidas experimentales.

Voy a pasar a la segunda parte de la charla, en la que voy a presentarles algunas experiencias que hemos llevado a cabo en mi grupo de investigación, en la Universidad de Santiago, para algunas empresas. Voy a hablar en primer lugar de dos aplicaciones en la industria del aluminio: la simulación de cubas electrolíticas y de coladas; después, del modelado de calderas de carbón de centrales térmicas; a continuación, del diseño de electrodos metalúrgicos y, por último, de la evaluación del impacto medioambiental de vertidos en el mar.

En esta transparencia se recoge de forma esquemática el proceso de producción del aluminio. El aluminio se obtiene a partir de un mineral llamado bauxita, que es hidróxido de aluminio; la bauxita se transforma en óxido de aluminio, en alúmina, en los llamados hornos Bayer. A continuación, ésta sufre un proceso de reducción electrolítica mediante un proceso que fue patentado simultánea e independientemente por Hall en Estados Unidos y por Héroult en Francia, a finales del siglo pasado. Se trata, por lo tanto, de un proceso muy antiguo que a lo largo del tiempo se ha ido mejorando. Una vez que el aluminio en forma líquida se obtiene en las cubas electrolíticas, se transporta a otra nave de la factoría, para proceder a su solidificación en forma de lingotes de diferentes secciones y tamaños, como son las llamadas “placas” y “tochos”. Voy a hablarles brevemente de la simulación de una cuba electrolítica y también del proceso de solidificación de coladas.

Esto son dos fotografías de fábricas donde se muestran series de cubas electrolíticas. Típicamente, en una serie hay decenas de ellas conectadas eléctricamente en serie. Veamos un poco el interior. Aquí tenemos una sección transversal de una cuba; se compone fundamentalmente de un recipiente de acero en cuyo interior se dispone un bloque conductor de la electricidad que lleva embutido una barra de acero y que constituye el cátodo. El otro polo, el ánodo, es de materiales carbonosos y a él llega la electricidad a través de unas agujas metálicas. La cuba contiene además una serie de materiales, ladrillos refractarios y aislantes, para evitar una fuga de calor excesiva. El conjunto deja libre un recipiente en el que se introduce la alúmina disuelta en un electrolito llamado criolita. Entonces, al paso de la corriente eléctrica continua, la alúmina se descompone y se produce el aluminio que queda en fase líquida, depositado en el fondo de la cuba. Posteriormente se extrae y es transportado a la planta de colada, para proceder a su solidificación. Entro un poco en estos detalles porque me interesa contarles cuál es la problemática que tiene el ingeniero de una fábrica de aluminio y que le plantea en un momento dado al matemático. Estas cubas consumen gran cantidad de electricidad, siendo éste un factor muy importante en los costes de producción. Por ello es muy importante conseguir un rendimiento energético óptimo. Pero, además, estas cubas se deterioran con el tiempo y cada cierto tiempo, algunos años, es necesario rehacerlas lo que conlleva también costes importantes. En resumen, el objetivo es doble: conseguir un buen rendimiento energético y alargar la vida de la cuba. Esta última depende, entre otros factores de la forma que tiene el "talud". El talud es un material sólido que se produce en las paredes de la cuba como consecuencia de la solidificación del baño electrolítico. Su posición y tamaño, determina, no sólo el funcionamiento de la cuba sino también su vida, y ello por razones que van a entender inmediatamente. En primer lugar, si el talud fuese demasiado grande y se metiese bajo la "sombra del ánodo", la corriente eléctrica se vería obligada a girar para evitarlo, porque es un material no conductor, y ello produciría una fuerza electromagnética que generaría inestabilidades en la superficie de separación entre el aluminio líquido del baño electrolítico. Estas inestabilidades pueden ocasionar cortocircuitos al tocar el aluminio el ánodo, lo que haría bajar el rendimiento eléctrico de la cuba. Por otro lado, si el talud fuese demasiado pequeño dejaría desprotegida la llamada "gran junta" y el baño, que es muy corrosivo, se infiltraría hacia la parte inferior de la cuba destruyéndola. Lo que el ingeniero desea saber es cuál es el comportamiento térmico de la cuba y, por las razones apuntadas, que forma va a tener el talud. Este conocimiento puede llevarse a cabo mediante simulación numérica. Uno puede escribir un modelo matemático del comportamiento de la cuba, en la que hay fenómenos de transporte de electricidad que se pueden modelar con las ecuaciones de Maxwell y de transferencia de calor que se puede modelar con la ecuación de Fourier; la resolución de esos modelos va a permitirnos representar las temperaturas, y en particular, saber cuál es la superficie del talud, cuál es su posición. Por ejemplo, los ingenieros de Inespal, que es la empresa para la que hemos hecho este estudio, se plantearon en algún momento, modificar el material del bloque catódico para mejorar el rendimiento energético, pero querían saber si ese cambio en el bloque podría alterar el equilibrio térmico de la cuba y modificar la posición del talud. Pues bien, con ayuda de programas de simulación numérica desarrollados por nosotros, fueron capaces de introducir las modificaciones necesarias en la geometría y en las propiedades del aislamiento térmico para que el talud tuviese la forma adecuada.

No voy a entrar en los detalles pero, aunque sea unos segundos, quiero mostrarles el modelo matemático utilizado; como ven hay una serie de ecuaciones que se resuelven mediante algoritmos matemáticos. Todo termina con la escritura de un programa y la elaboración de una aplicación que tiene una ventana principal con una serie de botones y menús desplegables, análoga a las que presentan las aplicaciones que utilizamos frecuentemente en la informática personal. Esto permite a los ingenieros introducir los datos con facilidad y al final obtener resultados como pueden ser los que les muestro en esta transparencia, donde uno puede ver por ejemplo las isotermas en una sección de la cuba, la posición del talud, etc. etc.

Otro proceso, también de la industria del aluminio, en cuya modelización hemos trabajado es la solidificación de coladas. El aluminio líquido se vierte en un molde que dispone de un falso fondo y que está refrigerado por agua que circula en su interior. Entonces comienza a solidificarse en las zonas en contacto con el molde y una vez que el aluminio sólido alcanza un espersor suficiente para contener al que todavía está líquido, se hace descender el falso fondo hasta completar la pieza colada.

Por cuestiones en las que no voy a entrar sobre la forma de cristalización del aluminio, es interesante utilizar una alternativa desarrollada en la antigua Unión Soviética, ya en los años 60, que es la colada electromagnética. En esta colada electromagnética el molde físico al que antes hacíamos referencia, se reemplaza por un molde electromagnético, es decir, por una bobina por la que se hace circular una corriente alterna y que va a generar un campo electromagnético que hace levitar el metal. En este caso son muchos los problemas tecnológicos que aparecen y en los que la simulación numérica puede aportar soluciones. Interesa, por ejemplo, determinar cuál es la intensidad de corriente que debe de atravesar la bovina para obtener una pieza de un tamaño determinado.

Por otro lado, existen problemas debido a las deformaciones que tiene lugar en el proceso de solidificación, por ejemplo, el llamado “talón” sufre una fuerte deformación que después obliga a cortar una parte importante de la pieza colada que hay que refundir. Por otro lado, debido también a que el metal al solidificarse se contrae, es necesario determinar la forma del molde para que, al final, la sección de la pieza sea, por ejemplo, un rectángulo perfecto. Pues bien, a todo este tipo de problemas se puede responder con ayuda de programas de simulación numérica.

Simplemente un apunte sobre la validación de los modelos. Aquí tenemos una comparación de las temperaturas calculadas por el modelo con las obtenidas mediante termopares en coladas reales, en la empresa Inespal. Naturalmente, este excelente acuerdo se obtiene una vez que uno ha hecho un ajuste.

Paso rápidamente a otro ejemplo. Se trata de un proyecto que estamos desarrollando para la empresa Ferroatlántica I+D, una empresa del sector de las ferroaleaciones. En particular, la fábrica situada en el polígono industrial de Savon, cerca de A Coruña, produce silicio-metal que se utiliza para fabricar aleaciones aluminio-silicio. Esto que tienen aquí es un horno de arco que como vemos es un recipiente cilíndrico con tres electrodos que transportan la corriente eléctrica trifásica de alta intensidad. En su extremo inferior se produce un arco eléctrico que libera la energía necesaria para romper la molécula de cuarzo y producir el silicio. La empresa Ferroatlántica, a lo largo de los últimos años, ha desarrollado un nuevo electrodo para este tipo de hornos, que está alcanzando un enorme éxito a nivel mundial, pues permite reducir los costes de producción del silicio en un porcentaje importante. Este electrodo, llamado ELSA, es de tipo compuesto ya que consta de un núcleo de grafito y una corona de pasta Soderberg y constituye una alternativa rentable a los electrodos llamados “precocidos”, formados al unir piezas que se compran a fábricas especializadas. Por el contrario, en el ELSA, la corona exterior se produce in situ, al cocerse una pasta compuesta esencialmente de coque y brea. La idea es que los electrodos precocidos son más caros que la pasta Soderberg, de manera que si podemos cambiarlos por esta corona de pasta estamos abaratando los costes.

En este caso se trataba de simular el comportamiento de este electrodo en sus diferentes aspectos termoeléctricos y termomecánicos. El proceso es como sigue: cada electrodo está rodedo de una corona de cobre por el que entra la corriente eléctrica. Ésta se distribuye por el interior del electrodo y después produce un arco eléctrico en la punta que desencadenará la reacción química de reducción. Uno de los problemas que se plantean es controlar la posición de la isoterma de cocción de la pasta. Si esta isoterma de cocción está demasiado baja, como el electrodo se hace descender periódicamente porque se consume por la punta, corremos el riesgo que la pasta que todavía está líquida, sin cocer, se vierta al exterior. Por otro lado, aunque infrecuentes, a veces se producen roturas del electrodo, originadas por tensiones debidas al peso o a gradientes térmicos.

Con ayuda de la simulación uno puede saber cómo se distribuye la corriente y ver que, por ejemplo, ésta tiene tendencia a entrar hacia el grafito porque es mejor conductor compitiendo de esa forma con el “efecto piel” que era una especie de mito entre los ingenieros del sector, pues creían que el grafito no conducía porque el efecto piel hacía que la corriente se fuese hacia el exterior del electrodo. Esto lo cuento porque puede ser una anécdota representativa del proceso de colaboración con la empresa donde muchas veces la simulación numérica ayuda a eliminar falsas creencias sobre el funcionamiento de los dispositivos.

En esta transparencia se muestra la isoterma de cocción de la pasta y en esta figura vemos las tensiones principales que se producen en la zona de los “nipples”. Este programa ha sido alimentado, previamente, con las temperaturas obtenidas mediante un modelo de transmisión de calor. Aquí podemos ver, por ejemplo, un punto de concentración de tensiones; este resultado está de acuerdo con la experiencia pues buena parte de las roturas de los electrodos se producen a este nivel.

Bien, de este otro tema ya les hablé algo hace un rato. Este es un proyecto que hicimos en el marco del Plan de Investigación y Desarrollo Electrotécnico para la empresa ENDESA, ya hace algunos años. Su objetivo era simular el proceso de combustión de carbón en la caldera de una Central Térmica. En esta transparencia puede verse una caldera; esta es la zona del hogar donde tiene lugar la combustión del carbón pulverizado y esta especie de dedos son los conductos que desembocan en los quemadores. Nosotros desarrollamos un código de simulación que permite, por ejemplo, representar las velocidades de los gases. Aquí tienen las zonas de entrada de los quemadores y cómo es el flujo en el interior de la caldera. Este flujo va a ser determinante para el reparto de la energía y, por tanto, para la distribución de temperaturas en el interior del hogar. Se pueden obtener transparencias como ésta que representa una sección horizontal a nivel de un piso de quemadores; observen las estructuras complicadas de los flujos, esos torbellinos que se producen, por ejemplo, detrás de los chorros y que pueden suponer zonas de remanso donde, eventualmente, puede haber puntas de temperatura y escoriación. En esta transparencia se pueden ver no sólo las velocidades indicadas por flechas sino también las isotermas, las zonas rojas corresponden a las zonas más calientes. Éste es un caso en que las zonas calientes están hacia el interior y eso significa un buen comportamiento.

También el modelo matemático suministra las concentraciones de las diferentes especies químicas que constituyen los gases; por ejemplo, aquí se representa el dióxido de carbono. Vemos cómo a la entrada los valores en azul son menores y después, en las zonas donde se produce la combustión, aumenta su concentración.

Uno podría plantearse, por ejemplo, ¿qué ocurre si se cambian los caudales de aire en los quemadores? ¿Qué ocurre cuando uno de los quemadores está inactivo? ¿Qué consecuencias tiene para el funcionamiento de la caldera?.

Y ya para terminar, una aplicación en la que también estuvimos involucrados, en este caso para la Consejería de Medio Ambiente de la Xunta de Galicia. Se trataba de estudiar el impacto producido por el vertido a través de emisarios submarinos de aguas residuales de origen urbano o industrial en las rías gallegas. En esta transparencia pueden verse las corrientes en la ría de Vigo. Con ayuda de estas corrientes, que han sido obtenidas con modelos matemáticos, se puede saber cómo se distribuyen en la ría las sustancias contaminantes. Aquí tenemos resultados de una simulación; en concreto se representa con diferentes colores la concentración de la "demanda bioquímica de oxígeno" producida por vertidos a través de un emisario submarino situado cerca de la ciudad de Vigo. Analizando estas gráficas uno puede saber, por ejemplo, si se alcanzan valores peligrosos en zonas de cultivos marinos, o en zonas de baños.

Este es un ejemplo de simulación numérica. Pero actualmente estamos aplicando también técnicas de teoría de control, a problemas de gestión de plantas de tratamiento. Supongamos que a una ría se vierten simultáneamente aguas residuales desde diferentes puntos porque hay varias poblaciones o varias industrias. Supongamos que cada uno de ellos tiene una planta de tratamiento aneja, con unos costes que pueden ser diferentes en función del tipo de vertido o de la tecnología empleada. Entonces es posible considerar un modelo global para ver cuál es la situación de la ría cuando están todos vertiendo simultáneamente e intentar gestionar el sistema de manera optima, es decir, establecer una función coste de depuración, y unas restricciones sobre el nivel de contaminación en determinadas zonas y determina cuál es el grado de depuración que hay que hacer en cada planta para que el coste global de tratamiento sea mínimo.

Y ya voy a terminar, porque creo que me he pasado un poco del tiempo asignado, presentando unas conclusiones. Podemos decir que los modelos matemáticos son una herramienta valiosa para la concepción y el diseño de dispositivos y procesos en la industria. Que la ingeniería moderna emplea cada vez más estas técnicas, conocidas a veces bajo el nombre de CAE (Computer Aided Engineering o Ingeniería Asistida por Ordenador). El uso de modelos permite acortar y abaratar el proceso de diseño y, en consecuencia, la salida al mercado de un producto con lo que esto representa de ventaja en una economía competitiva.

Una cuestión importante a la que antes me referí es que la simulación numérica está cada vez más al alcance de las empresas medianas y pequeñas ¿por qué? Pues, esencialmente, porque los ordenadores resultan cada vez más rápidos y menos costosos. Hoy día con un ordenador personal es posible utilizar muchos de las programas de simulación a los que me he referido en esta charla.

Finalmente quisiera decir que los matemáticos pueden colaborar: por una parte, en la escritura de los paquetes informáticos de simulación (porque hemos dicho que ahí lo fundamental son métodos de cálculo para resolver los modelos), pero también en su utilización. Los matemáticos pueden incorporarse a equipos en la industria formados también por ingenieros y físicos, y desempeñar un papel importante en el uso de estas herramientas que a veces, esto es innegable, resultan un poco sofisticadas. Es preciso conocer un poco más que el manejo mecánico del paquete como una caja negra. Los conocimientos básicos que configuran este campo son, por una parte, la modelización, lo que significa esencialmente conocer la física de los medios continuos, y por otra las ecuaciones en derivadas parciales que son los modelos fundamentales en este ámbito. Además, por supuesto, hay que conocer los métodos numéricos para poder resolverlas. Con estos ingredientes tenemos un perfil profesional que puede moverse en este campo y como digo colaborar para el desarrollo de la ingeniería en las industrias.

Y nada más, muchas gracias por vuestra atención.

Pedro Larrea, Presidente del Consejo Social

Bien, muchas gracias, Alfredo. Damos comienzo ahora al debate. Vuelvo a recordar que tenéis por ahí unas hojas para formular preguntas que luego trataremos de ordenar temáticamente a fin de facilitar las respuestas. Entre tanto, yo querría abrir el fuego haciendo una primera pregunta de tipo muy simple, muy mercantil.

Desde vuestra experiencia en Santiago, ¿cómo se establece el contacto con la industria, es decir, cómo vendéis vuestro producto (en el sentido más noble de la expresión), cómo vendéis vuestras capacidades, vuestro saber hacer, cómo conoce la industria cuáles son vuestras capacidades, habilidades para esa cooperación, para esa ayuda?. En definitiva ¿cómo se establece el vínculo oferta-demanda?

Afredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Matemáticas

La pregunta me parece muy pertinente e interesante, es un tema que yo no he tocado pero ya esperaba que saliese en el debate. Si no recuerdo mal, cada uno de estos proyectos de los que os he hablado ha surgido de manera diferente. Desde luego, con carácter general, puedo decir que ha sido muy importante la existencia de instituciones u organismos de transferencia, como la Fundación Empresa-Universidad Gallega (FEUGA), que supongo que será análoga a otras que existen en esta Comunidad Autónoma, y la Oficina de Transferencia de Tecnología de la Universidad de Santiago.

Por ejemplo, las relaciones con Inespal surgieron a través de FEUGA: los ingenieros de la fábrica de A Coruña ya estaban sensibilizados por estas cuestiones de modelización porque en aquellos momentos todavía había una presencia en la compañía de ALCAN, la empresa de aluminio canadiense, que utilizaba la modelización para el diseño de las cubas. Por tanto, ellos tenían ya una motivación previa, y se dirigieron a la Fundación que entró en contacto con nosotros. Después, también pongo otro ejemplo, las relaciones con Ferroatlántica surgieron indirectamente a partir de la colaboración con Inespal. En un momento dado, la Universidad, ya no recuerdo con qué motivo, puso un stand en una feria donde se mostraban una serie de proyectos, entre ellos el nuestro con Inespal. Casualmente un ingeniero de Ferroatlántica que también sentía la necesidad de hacer estudios del electrodo con técnicas de simulación, vió el stand y se puso en contacto con nosotros.

En otras ocasiones algún colega de la Universidad pasa a trabajar en una industria y nos encarga un proyecto, etc. Yo creo que los caminos son muy variados, pero en líneas generales quiero destacar que todos estos organismos de interfaz desempeñan un papel muy importante.

José A. Jainaga, Director General de SIDENOR

Da la impresión que desde que salieron las calculadoras de bolsillo a los chavales se les ha olvidado multiplicar y dividir. Bueno, se les ha olvidado o no saben ya multiplicar y dividir. Con el desarrollo de la informática y de los ordenadores ahora hay tratamientos matemáticos que están al alcance de todo el mundo, incluso de particulares, pero sin embargo se dicen todos los días barbaridades en los periódicos o en las conversaciones sobre una cosa tan sencilla como es una media aritmética o sobre cuándo la diferencia entre dos medias es significativa o no, etc… y nunca se habla de probabilidades, uno se pregunta: ¿realmente hasta dónde se enseña a la gente?, ¿cómo se puede garantizar que la herramienta no sobrepasa al individuo? es decir, ¿somos capaces de conocer los límites de la herramienta?, ¿sabemos cómo utilizarla?, ¿no estarán contribuyendo los ordenadores a que la gente sea todavía más inculta en temas matemáticos?

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

La pregunta me parece muy interesante porque toca una cuestión clave. Efectivamente nos encontramos con herramientas informáticas, en este caso yo he hablado de herramientas de simulación, que son aparentemente fáciles de usar. Y cuando digo que son fáciles de usar me refiero a que en cursillo de tres o cuatro días la empresa suministradora se compromete a explicar cómo hay que desplegar los menús e introducir los datos, y cómo después obtener unos resultados y visualizarlos. Efectivamente, esto da una imagen de que las cosas son demasiado sencillas. Podemos sacar la impresión de que el ordenador es infalible y de que todos los resultados que produce son correctos y conformes a la realidad. Aquí hay un gran peligro porque estas herramientas no son tan fáciles de utilizar como pudiera parecer a primera vista, al menos si uno quiere obtener resultados fiables.

Realmente es necesario saber un poco lo que hay detrás para poder ser críticos con los resultados. No sirve con que a uno le den un cursillo de una semana para utilizar un paquete de elementos finitos en cálculo estructural, hay que saber qué significa un comportamiento elástico o plástico, un cálculo estático o dinámico o un modelo de contacto; en ese sentido yo creo que la participación de los matemáticos puede ser útil. Los matemáticos en modo alguno van a suplantar a los ingenieros en una empresa, pero sí pueden ayudarles a elegir los modelos, a hacer los cálculos y a criticar y analizar los resultados.

Juan Andrés Legarreta, Director Gerente EUSKOIKER y Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

¿Se deben incluir dentro de las “matemáticas” áreas como la geometría, informática o estadística?

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Matemáticas

Sí, sí, por supuesto, como indiqué a lo largo de mi intervención yo he hablado de una parcela de la matemática aplicada que es la que conozco; creo que se trata de una parcela muy importante en la ingeniería, pero indudablemente no es la única. La semana pasada con ocasión de una tesis doctoral estuvo por Santiago, un colega ingeniero que trabaja en este campo. Me decía que, en su opinión, el futuro de la modelización en ingeniería pasa por los modelos estocásticos y los criterios de diseño basados en conceptos probabilísticos. En el ámbito de la estadística, el análisis de datos tiene también una gran importancia en la industria. Muchas industrias tienen cantidades ingentes de datos extraídos de sus procesos de producción. Estos datos contienen mucha información, pero hay que desenmascararla mediante tratamientos matemáticos adecuados. De la informática creo que ya he hablado bastante. Es una disciplina imprescindible para el cálculo matemático. Sin ordenadores los modelos no podrían resolverse.

Eva Ferreira, del Departamento de Economía Aplicada III, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales Bilbao, UPV/EHU

¿Qué tipo de equipos de universitarios suelen estar en esos proyectos a los que te has referido, por ejemplo, matemáticos, ingenieros, algún otro grupo más y qué formación tienen los interlocutores en las empresas?

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Veamos, en nuestra experiencia, inicialmente hemos organizado equipos dentro del Departamento, por tanto equipos de matemáticos; además, nuestros interlocutores en las empresas han sido ingenieros. Tengo que decir que esto ha sido posible, en alguna medida, porque desde hace tiempo nos hemos preocupado de estudiar física. Si esto no hubiese ocurrido es indudable que desde el primer momento habríamos tenido que contar con nuestros colegas de otras áreas científicas o técnicas. Para establecer el diálogo con la empresa es fundamental tener una idea de los fenómenos que se quieren modelar. Generalmente esto significa saber física, pero si uno quiere colaborar con personas que están en el mundo de las finanzas, pues habrá que saber de finanzas. A este respecto yo pienso que los matemáticos, por el tipo de formación que recibimos, estamos bastante bien preparados para aprender otras materias y esa tarea debemos hacerla porque caso contrario se establece una barrera que impide la comunicación y por tanto la colaboración.

Después, con el proyecto en marcha, necesitamos datos experimentales de los materiales y en ese momento hemos involucrado a personas de otros departamentos de la Universidad. Así por ejemplo, en el proyecto con Ferroatlántica del que les hablé también está trabajando un equipo del Instituto de Cerámica y otro del Área de Electromagnetismo, ambos de la Universidad de Santiago.

Con respecto a la formación de los ingenieros de las empresas, debo decir que, por supuesto, nos hemos encontrado con excelentes profesionales pero tengo la sensación de que algunos adolecen de un cierto déficit de conocimientos científicos básicos. Yo comprendo que hay que optar y que resulta difícil cubrir al mismo tiempo la enseñanza de conocimientos básicos y otros muy especializados, pero creo que en estos últimos años, con las reformas de planes de estudios, se han descuidado los primeros. Me refiero por ejemplo a que los contenidos de matemáticas y física han tendido a reducirse; yo estoy acostumbrado a trabajar con ingenieros franceses que, como todos sabéis, tiene una formación básica muy sólida, y echo de menos esa formación en España.

Juan Andrés Legarreta, Director Gerente EUSKOIKER y Profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

Me gustaria plantear una observación, y es una cierta discrepancia del aserto anterior suyo cuando decia que “en las Escuelas Técnicas las matemáticas se han convertido más en un elemento de selección que en una herramienta de aprendizaje propiamente dicha”.

En el año 1964 se produjo en España una drástica reforma de las enseñanzas técnicas. Por decisión ministerial, todas las carreras de Ingeniería Superior dejaron de tener los cursos Selectivo e Iniciación más cinco años de carrera y pasaron a tener, como el resto de las licenciaturas, únicamente cinco cursos. Esto supuso, entre otras cosas, una reducción importante en la formación científica básica que necesita un ingeniero. Hasta entonces las Escuelas de Ingenieros en España habían permanecido fieles a la inspiración de las Escuelas Francesas.

A finales de los años 70, unos 15 años después, todas las Escuelas de Ingenieros cambiaron sus planes de estudios de 5 a 6 años de docencia. En esos años se había impartido menos formación tanto en matemáticas como en otras ciencias básicas. Si incluimos la Estadística y la Informática dentro del campo de las matemáticas y tomando como ejemplo el Plan de Estudios de la Escuela de Bilbao, nos encontramos con un incremento en la formación matemática del Ingeniero Industrial que alcanzaba el 28% del total de su formación. A esto se había llegado por el convencimiento del profesorado de la necesidad de una sólida formación matemática en los futuros ingenieros.

El prestigio que han podido alcanzar los ingenieros españoles que han ido por ejemplo a Estados Unidos para realizar cursos de especialización ha estado basado en la preparación científica que tenían y, especialmente, matemática. Y por lo menos en la Escuela de Bilbao y en las Escuelas en las que he estado y conozco, en todas se hace la misma valoración sobre la necesidad de una sólida formación matemática. Yo creo que no se puede mantener el que las matemáticas en las Escuelas se han convertido más en un elemento de selección que en una herramienta fundamental para resolver problemas de ingeniería. Cualquier docente y cualquier ingeniero docente en una Escuela es consciente de la necesidad de la formación matemática porque si no la hay, no puede haber un conocimiento científico y técnico riguroso.

Juán José Anza, del Departamento de Matemática Aplicada, Escuela de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/ EHU

Soy profesor del Departamento de Matemática Aplicada pero soy ingeniero industrial, lo cual ya significa algo de las cosas que estamos hablando. En este segundo cuatrimestre estoy impartiendo una asignatura que se llama Ampliación de Análisis Numérico, donde lo que tratamos es la resolución de las ecuaciones diferenciales, y la introducción al curso coincide en un 80% con la introducción que ha hecho usted hoy. Es otro dato para saber cómo estamos trabajando puesto que toda esta importante evolución que hay con el tema de ordenadores, etc., también afecta a las Escuelas de Ingeniería.

Los departamentos de matemática aplicada en las Escuelas de Ingenieros para mí son un campo de confluencia de matemáticos y de ingenieros. Cuando hablamos de matemáticas no debemos de pensar solamente en las matemáticas de las Facultades de Ciencias Exactas que son muy importantes sino en las matemáticas que se utilizan como herramienta en otras Escuelas, en otras Facultades, por ejemplo en las Escuelas de Ingeniería. Quizás, también porque otro de los asuntos que se ha tratado hoy es la formación de equipos, y la formación de equipos precisa interlocución, y la interlocución precisa sensibilidad por las cosas, etc. En resumen estoy muy de acuerdo con todo lo que se está diciendo aquí y mi intervención es sólo para ampliar campos, que en estos asuntos estamos mucha gente haciendo estas cosas.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Gracias. Me parece muy oportuna vuestra intervención para matizar algo que yo dije con carácter general y que probablemente hoy día ya no sea cierto, como vuestros ejemplos muestran. Yo tengo la impresión, pero, claro, es una impresión que quizás ya esté un poco obsoleta, de que hace algunos años los matemáticos que acudieron a las Escuelas Técnicas a explicar matemáticas lo hicieron de una forma muy parecida a como explicaban las matemáticas en las Facultades. Esto creo que hizo mucho daño, porque cuando hablo con ingenieros de mi edad, o incluso más jóvenes, tienen un recuerdo de aquellas asignaturas de matemáticas como de algo completamente estratosférico, es decir, algo que ellos no relacionaban con su ingeniería. Sufrieron las matemáticas porque las tenían que sufrir, tenían que aprobar aquellas asignaturas para hacer la carrera y realmente es una experiencia triste que al cabo de los años, cuando interaccionan con nosotros, se den cuenta de que las matemáticas son útiles; entonces se plantean, bueno, ¿por qué estas cosas no nos las contaron? Está claro que hoy día las circunstancias están cambiando y que hay una sensibilidad distinta en el profesorado de matemáticas de las Escuelas Técnicas. Nosotros, por ejemplo, en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago, impartimos asignaturas de la Facultad de Química, de la Escuela de Óptica, de la titulación de Ingeniería Química, etc. y hemos hecho un gran esfuerzo por aproximar la docencia a las necesidades reales y a las sensibilidades de estos Centros.

Javier Barrondo, Director de Planificación y Selección de IBERDROLA

No se trata solo de percepción. Hay muchos matemáticos en la enseñanza, incluso en las Escuelas de Ingeniería. En consecuencia se está tendiendo cada vez más a enseñar matemática especulativa en detrimento de la matemática aplicada con la pérdida de imagen asociada.

¿No habría que forzar más la opinión de la Empresa?

¿Qué papel puden o deben jugar las Fundaciones en la relación Universidad-Empresa?

¿Hasta qué punto falta marketing y comunicación al exterior?

Quería hacer un matiz previo en la línea que estaba marcando el ponente: las asignaturas las hace el profesor, es decir, son un poco a imagen y semejanza de quien las da. El ponente ha dicho algo así como “Que hay una sensación general de que los que estudian matemáticas sólo son para enseñarlas o para crear más matemáticas” Y esto ha sido una realidad, hay un montón de gente de exactas dando clase incluso en las Escuelas de Ingeniería. En consecuencia en las Escuelas de Ingeniería durante unos años se ha hecho una matemática especulativa, una matemática mucho más pura en contra de la matemática aplicada de la ingeniería. En este sentido iba mi pregunta ¿qué podemos hacer? ¿qué piensa el ponente?

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Pues, yo creo que un papel muy importante. Yo no sé si nuestros amigos aquí presentes de las empresas, conocen la situación de los departamentos universitarios, de matemáticas o de otra cosa, es decir, qué medios tienen, qué misiones se les encargan, etc. Los profesores tenemos que dar clase, eso todo el mundo lo tiene claro, pero en los últimos años se nos piden además otras cosas. Se nos pide que hagamos investigación; incluso parte de nuestro salario está en relación con la investigación que producimos. Pero, además, en los últimos tiempos se nos pide que hagamos transferencia, se nos pide que intentemos acercar la universidad a la sociedad; y casi siempre sin que se nos den los medios necesarios. En muchos departamentos universitarios no existe una secretaría que sirva de soporte cuando, por ejemplo, uno tiene que mecanografiar un documento para presentar a una empresa. Las Universidades, tal vez por el sistema de gobierno que poseen, tienen una gran dificultad para discriminar a la hora de asignar recursos y decir, por ejemplo: "puesto que la misión de la Universidad también es hacer transferencia a las empresas de los resultados de la investigación, entonces vamos a apoyar a los departamentos que la hacen". Veamos otro ejemplo. Existe un problema serio y es que la asignación de profesores, con todas las excepciones que ahora me podáis relatar, se hace por criterios de docencia exclusivamente; se dota una plaza de profesor en un departamento solo si hay unas horas de docencia por cubrir. Ahora bien, esto es un poco absurdo: si la Universidad tiene una serie de misiones, y modernamente, no sólo la docencia sino la investigación, la transferencia, los desarrollos para las industrias, etc., pues entonces la asignación de recursos tendría que tener en cuenta todas esas misiones.

A mí me parece importante que la Universidad asuma este papel con todas sus consecuencia, si es que realmente cree que debe asumirlo. Yo veo que en este momento ya existe un discurso institucional, que incorpora estas actividades, pero después la política del día a día no lo sigue. Creo que en este sentido el Consejo Social debe hacer una labor para cambiar este tipo de hábitos.

Volviendo al tema de la pregunta, creo que las Fundaciones y los Centros de Transferencia de Tecnología de la universidades son de gran utilidad, pero si se quiere impulsar a los equipos de investigación a trabajar para las empresas hay que dotarlos de recursos singulares siempre que estén dispuestos a hacer el esfuerzo.

Carlos Bertrand y David Maza del Departamento de I+D, SIDENOR

¿En qué medida absorben hoy en las empresas los ingenieros y físicos el papel de los matemáticos? Y en este sentido, ¿qué podrían aportar, realmente de diferencia los matemáticos para convencer a los responsables de selección de personal de las empresas de que tienen que contratar también a este tipo de profesionales?. Otra pregunta más ¿se puede pensar que estamos en un momento en el que las matemáticas se están ya acercando a la fase de diseño industrial a todo nivel (esto tendría que ver con los ejemplos de modelización que has puesto), pero todavía están alejadas del momento del proceso productivo en sí, algo así como el día a día de las operaciones donde todavía se emplea mucho el método de prueba error y seguir funcionando?.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Con respecto a lo primero, vamos a ver, es una pregunta un poco difícil de responder y algo comprometedora para mí. Ingenieros, físicos, también matemáticos, bueno... depende. Me explico: un físico que tenga una buena preparación en matemáticas, como generalmente tiene una buena preparación en modelización, es indudable que puede hacer un gran papel. Ahora, yo tengo alguna experiencia en manejar paquetes de simulación, por ejemplo en mecánica de fluidos o en mecánica de sólidos no lineal, bueno y existen aspectos realmente sofisticados que uno necesita conocer cuando utilice ese paquete; me refiero a los que tienen que ver con los algoritmos numéricos, con el proceso de cálculo; para éstos, en principio, los matemáticos están mejor preparados.

Pero esta pregunta me lleva también a plantear otro tema que de alguna forma esbocé en mi exposición: ¿es adecuada la formación que le damos a los matemáticos en las Facultades? Yo estoy convencido de que los matemáticos pueden jugar un papel complementario del de los ingenieros o los físicos en temas como la simulación numérica donde el cálculo es fundamental, pero siempre y cuando en las Facultades de Matemáticas se haga un esfuerzo por adaptar los planes de estudio. Si queremos colocar a los matemáticos en este sector es necesario que los planes de estudio incluyan, por ejemplo, la mecánica de los medios continuos o el electromagnetismo. En este sentido, por si puede servir de ejemplo, puedo contaros nuestra experiencia en la Universidad de Santiago. Hace unos 8 años creamos una especialidad que se llama "matemática aplicada" y que pretende formar profesionales en el campo de la modelización matemática en ingeniería y que incluye entre sus asignaturas estas materias. Si ustedes me hablan de matemáticos que no conocen los modelos de la mecánica, la transferencia de calor, etc. probablemente sea preferible incorporar físicos o ingenieros, pero si me hablan de matemáticos que tiene conocimientos de modelización e informática, entonces creo que tenemos un profesional realmente interesante para las empresas. En este sentido también lanzaría un mensaje a mis colegas matemáticos: en mi opinión sería muy conveniente que este aspecto de la matemática como herramienta de modelización se incorporase a toda la enseñanza desde el principio, es decir, que cuando uno está explicando en los primeros cursos de la carrera los teoremas de existencias de las ecuaciones diferenciales, también se informe a los estudiantes de que ciertas ecuaciones diferenciales son modelos para un circuito eléctrico o un sistema mecánico, etc.

Josu Sagastagoitia, Director Gerente de Metro Bilbao

¿Cuál sería la aportación de un matemático a una empresa de servicios tan concreta como puede ser una empresa de explotación ferroviaria, un metro como el metro de Bilbao?. ¿Qué es lo que puede aportar un matemático, en un caso como éste?.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Voy a atreverme a contestar aunque intuyo que el campo de aplicación, en este caso al Metro, no es precisamente en el que yo trabajo. Indudablemente hay unas disciplinas, relacionadas con la matemática discreta, teoría de colas, transporte, programación entera, teoría de grafos, etc. que suelen incluirse en la llamada “investigación operativa”, y que son adecuadas para todos los problemas de opimización de rutas, de gestión de coches, etc. que pueda haber en el Metro, es decir, sin lugar a dudas un experto en estadística e investigación operativa sería muy conveniente en una empresa como la suya de explotación de un sistema de transporte.

Antonio Corral, Director de Area, Consultora IKEI

¿Hacia dónde se dirige hoy la investigación matemática? ¿Qué tipo de problemas se tratan de resolver? ¿No ocurre que la investigación tecnológica es la que está marcando el camino?

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Es una pregunta que como “matemático aplicado” me resulta difícil de contestar. Yo puedo hablar de investigaciones en curso en torno a los modelos, a las ecuaciones en derivadas parciales, a los métodos numéricos, temas en los que en estos últimos años hay una gran actividad, pero las fronteras de la investigación matemática más innovadora tal vez estén en otros campos, más relacionados con la topología o con el álgebra. En ese sentido, con motivo del Año Mundial, se encargó a un Comité que estableciese un listado de problemas que presumiblemente van a ocupar el quehacer de los matemáticos en este siglo; algo análogo a lo que hizo Hilbert en el famoso Congreso de principios del siglo XX. Ahí figuran una serie de problemas abiertos alguno ya propuesto por Hilbert, y todavía sin cerrar. Son problemas que se encuadrarían en la matemática pura y ahora aprovecho, ya que hemos hablado tanto de la matemática aplicada, para decir que la sociedad no debe olvidarse de la investigación básica, porque la investigación básica de hoy es la base para la investigación aplicada del futuro. Cuestiones que en principio han sido de lo más abstracto y alejado de la realidad, con el paso del tiempo han tenido aplicaciones muy importantes. Pensemos en temas de teoría de números, de criptología que hoy en día se utilizan en las telecomunicaciones y que aparecieron en el ámbito de la matemática pura; campos como la teoría de grupos, o la geometría de Riemann, que ha sido tan importante para la teoría de la relatividad; en resumen, la investigación básica hay que mantenerla y el llamamiento que hago a mis colegas de las Facultades es que intenten preservarla a toda costa. Es necesario que en los planes de estudio haya una vía para que la gente pueda al acabar hacer una investigación matemática de altura. Ese es un objetivo al que no debemos renunciar. Yo creo que el problema es encontrar un equilibrio: la sociedad nos exige que al mismo tiempo que financia esa investigación básica, que va a tener unos retornos a más largo plazo, obtenga resultados a más corto plazo para algunas demandas del día a día. Creo que muchas veces a los matemáticos nos ha faltado esa capacidad para acercarse a problemas que a lo mejor desde ciertas corrientes se consideraban secundarios, de segunda fila, porque estaban más relacionados con el cálculo y menos, a lo mejor con las teorías abstractas y porque resultaban menos interesantes desde el punto de vista de la investigación. Insisto, pienso que es una cuestión de equilibrio y ese equilibrio también lo deben recoger los planes de estudios.

Pedro Mª Altuna, Miembro del Consejo Social en representación de ELA

¿Hasta qué punto cuando la Administración o las grandes empresas anuncian sus previsiones económicas sobre el IPC, magnitudes macro, crecimientos, beneficios, etc. hay rigor matemático detrás de todo eso o más bien se hace con criterios propagandísticos?.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Es una pregunta a la que yo no le puedo responder. Está claro que los modelos econométricos, son fundamentales para la predicción económica y estoy seguro de que en el Ministerio de Economía se utilizan con mucha frecuencia, o en el Banco de España, etc. etc., eso es indudable. Ahora bien, es obvio que los resultados que proporciona un modelo matemático dependen de los datos con que se alimenta, tanto en el caso de la ingeniería como en el caso de la economía: si uno está haciendo el cálculo de una estructura y resulta que introduce mal el módulo de Young del material, las tensiones que calcule el modelo serán incorrectas. Y esto ocurre igual en la economía. Evidentemente el hecho de que este tipo de técnicas estén muy distantes de los conocimientos habituales de los ciudadanos, permite que sean más manipulables. Y a veces diciendo “No, no, porque esto lo dice el modelo X”. El modelo X no es un absoluto, depende de cómo lo haya utilizado.

Luis Vega, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UPV/ EHU

A propósito del tratamiento de datos en las empresas, ¿es verdad que hay carencias?, ¿cómo se podrían solventar?

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

En este tema del tratamiento de datos yo antes os contaba la experiencia que tuve con Ferroatlántica. Su director me dijo en una ocasión: "Mira yo tengo aquí muchos datos obtenidos día a día en la planta, estoy convencido de que esos datos encierran mucha información, pero no sé cómo extraerla; intuyo que eso es una labor de matemáticos, tu qué opinas?" Yo les puse en contacto con colegas del Departamento de Estadística y elaboraron un proyecto que en este momento ya está dando resultados. Creo que este tema del análisis de datos es común a muchas empresas industriales y no siempre se sabe que hay unos profesionales con conocimientos para extraer información a través del análisis de esos datos. Por supuesto también en las Administraciones Públicas. Así, por ejemplo, actualmente se están empleando estadísticos en los hospitales para el tratamiento de datos. No sé si esto responde a tu pregunta, Luis...

Luis Vega, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UPV/ EHU

Me gustaría preguntar a los empresarios que hay aquí, si esto es una realidad o es algo que nos imaginamos y también qué es lo que demandan.

Agustín Berasaluce, Subdirector General del Departamento de Investigación Comercial, BBVA

Yo puedo contestar a esa pregunta. Nosotros tenemos mucha información del comportamiento de nuestros clientes y de cómo operan con nosotros, por qué canales, qué productos, y evidentemente es una labor muy importante. Yo creo que todos estos temas son muy importantes para muchas industrias, en general, y para todas aquellas en particular que tiene muchos clientes; para todas las empresas de servicios, desde servicios financieros, hasta servicios de telefonía por ejemplo. Yo creo que todas aquellas empresas que tienen muchos clientes y prestan servicios, estamos en un grado de desarrollo intermedio y a mí una cosa que también me extraña de este tema es que todos los softwares, todas las sistemáticas de análisis para usuarios de datos, son extranjeras y normalmente americanas. Es decir, esto es algo que está viniendo de otros países y nosotros estamos utilizándola como usuarios y con desarrollos internos salvo algunas cosas específicas que estén haciendo, que estén haciendo ad hoc para alguna empresa. Pero no se sabe, es un poco una visión del tema.

Yo lo que quería preguntar es si el papel de las matemáticas en la empresa aumenta, pues yo creo tenemos las empresas que contratar muchos más matemáticos y eso era un poco también se solapa alguna pregunta que ha habido antes de cómo se posicionan los licenciados matemáticos porque creo que mucha de la exposición se está haciendo muy dirigida hacia la investigación o hacia, digamos, la gente que se dedica a investigar dentro de la Universidad, pero un licenciado de la Universidad con muchas inquietudes y muchas lagunas respecto a lo que es el mundo de la empresa.

Para que se contraten más matemáticos yo creo que la propia Universidad debe posicionar a sus individuos, no sé, hacia áreas concretas. La pregunta concreta era: ahora hay un boom de determinados sectores, la nueva economía, internet, los mercados financieros, son sectores que están demandando bastante análisis numérico, cualitativo y también bastante sofisticado y a mi me gustaría saber si, en conjunto, hay un planteamiento de la ciencia matemática, decir, ¡oye!, mis licenciados que salen de aquí van a estar bien posicionados en estas áreas y van a poder competir con los físicos, los economistas o lo que sea. ¿Cómo se plantea la propia Universidad que sus licenciados puedan estar presentes en todo este mundo de la nueva economía?.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Bueno, como la pregunta es muy general pediría que otros contertulios interviniesen. Yo voy a referirme a dos aspectos que has tocado. Por un lado, la parte relacionada con la informática. Todos sabéis que en España existe una titulación de Ingeniería Informática, pero también hay otras ingenierías que están muy cerca de la informática y sobre todo de las comunicaciones; me refiero naturalmente a la Ingeniería de Telecomunicación. También físicos y matemáticos tienen en sus planes de estudio varias asignaturas de informática donde los estudiantes aprenden lenguajes de programación, sistemas operativos, informática gráfica, etc. Por tanto es éste un campo donde los matemáticos pueden competir perfectamente con otros titulados, incluidos los titulados de informática.

Después tocaste un campo que es el de las modernas finanzas donde yo sinceramente creo que tenemos ventaja frente a otros titulados. Creo que en temas como la gestión de riesgo, de las carteras, la evaluación de los productos financieros “derivados”, todos ellos tan importantes hoy día, se requieren matemáticas y matemáticas nada sencillas que incluso superan los contenidos que se imparten en la Licenciatura. Un estudio a fondo de estas cuestiones pasa por la teoría de la probabilidad, los procesos estocásticos, las ecuaciones en derivadas parciales y su resolución numérica, etc. Estos temas son, de principio a fin, matemáticos, por eso creo que los matemáticos tienen ventaja incluso frente a los economistas que, en general, tiene una formación matemática probablemente suficiente para lo que era el contexto tradicional de la carrera de económicas pero creo que demasiado escasa para abordar este tipo de problemas. Una anécdota a este respecto, en Inglaterra hay grupos de matemáticos que estaban haciendo investigación en mecánica de fluidos que se han pasado a trabajar en matemática financiera; ¿por qué?, pues en buena medida porque esas ecuaciones de la mecánica de fluidos, son practicamente las mismas que aparecen a la hora de valorar una “opción”. Me comentaba un colega francés, de la Universidad de Lyon, que daba un curso de modelización en física e ingeniería y que un año incorporó tímidamente unas cuantas lecciones sobre matemática financiera. Pues bien, de la noche a la mañana, no sólo se incrementó el número de sus alumnos sino que empezó a ver como los titulados, se empezaban a colocar en la banca.

Mikel Lezaun, Director del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Coordinador del Comité en el País Vasco para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas

Quisiera hacer algunos comentarios desde mi perspectiva como profesor de la Facultad de Ciencias.

En la exposición que nos ha hecho Alfredo, las colaboraciones industriales que ha presentado, son con grandes empresas y se puede llegar a pensar que estos proyectos sólo pueden hacerlos estas empresas de gran tamaño. Sin embargo, yo creo que hay muchas posibilidades de colaboración y de participación, también, en proyectos con pequeñas empresas y esto dentro del Programa Nacional de I+D. En este sentido, nosotros tenemos una experiencia de colaboración con una empresa de ingeniería agroalimentaria que, entre otras actividades, desarrolla tecnología para el cultivo hidropónico en invernadero. Esta empresa de ingeniería es INKOA y en el proyecto también participa un centro de investigación agraria, NEIKER, y una empresa productora, BARRENETXE, S. Coop.

En este proyecto, efectivamente, ha habido que hacer una modelización del clima en un invernadero siguiendo todos los pasos que ha comentado Alfredo. Se han identificado las variables climáticas controlables (radiación solar, humedad, temperatura), a partir de ellas se ha establecido un modelo matemático para el cálculo de la evapotranspiración, se ha pasado luego a identificar la situación óptima del cultivo (desarrollo más o menos rápido) y se ha establecido un mecanismo de control de las variables para dirigir el cultivo en el sentido deseado. Además, ha habido que modelizar el comportamiento del sustrato en lo que respecta a la retención de agua, para así precisar la dosis de riego. Todo este proceso ha habido que completarlo con un cálculo experimental de las variables de cultivo (superficie foliar, LAI), según la edad, tipo o época del cultivo. Bien, aquí tenemos un ejemplo concreto de colaboración con una empresa pequeña dentro del Programa I+D y en él se observa la importancia de las matemáticas en un dominio que podría parecer lejano, como es el del cultivo en invernadero. El resultado de todo esto ha sido un paquete informático y una serie de mecanismos físicos de control del clima (de la temperatura, la humedad, la radiación solar) y del riego en un cultivo hidropónico en invernadero, que ya está en el mercado.

Otro aspecto que quisiera resaltar es que desde las matemáticas no podemos presentar proyectos propios de I+D, sino que tenemos que participar en proyectos que tienen que plantearse desde las empresas. Hay que resaltar que su desarrollo y resolución será muy productivo para todas las partes.

Pasemos ahora a la Estadística. Nosotros estamos convencidos que muchas grandes empresas y la Administración tienen montones de datos y no los utilizan, no extraen la información contenida en ellos. En concreto, hemos tenido relaciones con Sanidad y Osakidetza y en muchos casos ocurre así. Por ejemplo, recogen datos de contaminación en las playas y estos casi van al cajón, como mucho hacen un recuento. Lo mismo podemos decir de campañas de salud dental de los escolares de los años tal, tal y tal, los datos están en un cajón. Nos parece que esto mismo ocurre en grandes empresas. En este sentido, me parece oportuno indicar que nuestro Departamento ha establecido una colaboración permanente con Osakidetza, en concreto con el Hospital de Cruces y el Hospital de Galdácano. Esta colaboración no es sólo para tratar los datos que ya tienen, sino también para el diseño de experimentos. Muchas veces el propio experimento está mal diseñado ya que puede que el tamaño de la muestra no sea el adecuado, o que no se hagan las preguntas pertinentes, o que no se obtengan los datos adecuados para poder extraer la información que hay detrás. Tengo que notar que una de las responsables, Arantza Urkaregi, está aquí presente.

Por último está el aspecto de la matemática financiera, que nosotros no lo tocamos. Ahora bien, hay compañeros de Sarriko que están trabajando en este dominio y que tienen relaciones con instituciones financieras.

Resumiendo, nos parece que también en empresas pequeñas hay necesidad de matemáticas y que éstas son las que tienen que empezar dando pasos para localizar y perfilar las posibles aportaciones de las matemáticas en sus proyectos de I+D. Todo ello pasa por un conocimiento mutuo de la Universidad y el mundo empresarial.

Arantza Urkaregi, Departamento Matemática Aplicada, Estadística e Inv. Op., Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Miembro del Consejo Social

Volviendo al tema de análisis de datos, ¿No crees que se puede plantear el mismo problema que antes se ha planteado con los paquetes de simulación?. Dado que hay paquetes estadísticos, existe la idea de que cualquier persona, ingeniero, economista, etc. puede utilizarlos y sin embargo, para realizar un buen análisis de datos, es necesaria buena formación en estadística.

Alfredo Bermúdez de Castro , Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Totalmente de acuerdo. Creo que lo que antes decía con carácter general, se aplica indudablemente al caso de los paquetes de análisis de datos, de los paquetes estadísticos. Utilizar un paquete es una cosa y hacerlo con capacidad crítica y con conocimiento de causa otra muy distinta; esto último requiere unos conocimientos muy importantes. No hay que confundir la facilidad en el uso formal de un paquete, con un conocimiento fundamentado de lo que está haciendo y de cómo lo está haciendo. Sólo de esta forma se puede hacer una utilización adecuada, es decir, fiable.

Javier Duoandikoetxea, Director del Departamento de Matématicas, Facultad de Ciencias, UPV/EHU y del Comité Organizador para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas en el País Vasco

Quisiera intervenir ya que antes Alfredo ha pedido la colaboración de otros colegas académicos en las respuestas.

Mencionaré un par de cosas que se han dicho hace un momento y que me parecen interesantes. Se ha dicho que la formación de los matemáticos, de lo que específicamente se llaman matemáticos, que son los licenciados en matemáticas, es más bien teórica y también se ha indicado que el papel de las matemáticas en la empresa no sólo viene, y no sólo tiene que venir, de los licenciados en matemáticas.

Es verdad y es una tradición de muchos años que la carrera de matemáticas está sobre todo dedicada a la enseñanza. Una de las razones fundamentales es que la enseñanza demandaba muchos licenciados y eran muchos los que se colocaban, así que todos entrábamos en la Facultad con ese objetivo y no con vistas a un trabajo en la industria o en otro lugar. La formación ha sido muy teórica y cuando se ha desarrollado la posibilidad de investigación en matemáticas, que ha tenido un gran avance en España durante los últimos 20 años, seguimos reproduciendo el mismo esquema porque también la investigación matemática en la unviersidad ha sido más bien teórica. Pero ahora estamos en una situación en la que soplan vientos de cambio, sobre todo por necesidad, porque la enseñanza ya no absorbe tanto ni mucho menos. Y es una realidad que últimamente los licenciados en matemáticas han encontrado salidas distintas de la enseñanza, pero son casi siempre ante un ordenador y no trabajando directamente en matemáticas.

¿Va a producir la situación actual del mercado un cambio real en los planes de estudio?. Hace unos días, este fin de semana concretamente, ha habido una reunión de directores y de decanos de matemáticas en Santiago y era frecuente oir propuestas en esta línea, pero yo no veo que se vaya a producir a corto plazo una evolución drástica de la carrera de matemáticas. Puede haber alguna especialidad más acercada a las aplicaciones, pero se seguirá formando a la gente sobre todo en el aspecto teórico. Yo creo que existe una diferencia fundamental en la actitud de los estudiantes desde la propia entrada, el que entra en la Escuela de Ingenieros piensa que cuando termine la carrera va a ser ingeniero, el que entra a una licenciatura de matemáticas todavía posiblemente piense que va a enseñar matemáticas o algo parecido, pero no entra con la mentalidad de que se va a formar para después estar en la industria, o en una empresa, o en un banco, o en otro lugar. Seguramente tenemos que conseguir cambiar ese punto de vista para cambiar la carrera, aunque se puede discutir cuál de las dos cosas debe venir antes. Mirado desde los departamentos de matemáticas que estamos en Facultades de Ciencias formando matemáticos, una dificultad es que tendríamos que hacer los cambios personas que hemos sido formados al estilo tradicional y hay poca gente en los departamentos tiene un conocimiento de los problemas prácticos como los que ha presentado Alfredo Bermúdez de Castro. Es decir, todavía puede haber muchos profesores que se sientan más cómodos en una situación como la actual.

Entonces, ¿qué puede pasar? ¿hay salidas posibles para este problema?. En algunos sitios se están haciendo experiencias de formación de postgrado que son muy importantes y prometedoras. Seguiremos formando matemáticos teóricos y además es interesante que exista esta formación básica porque corremos el peligro que indicaba al principio el representaante de SIDENOR, de que lo mismo que ahora la gente parece haber olvidado a multiplicar por culpa de las calculadoras, si no tiene una formación básica no sepa interpretar lo que dan los aparatos. Ahora bien, después de recibir la formación básica se pueden aprender muy rápido y en poco tiempo cosas más específicas. Ya hay experiencias iniciales, por ejemplo, en matemáticas financieras en las que hay masters con bastante participación y con implicación de los bancos. En Barcelona hay uno en la Universidad Autónoma que este año tiene 25 estudiantes, pero además hay bancos dispuestos a contratar durante 4 meses en prácticas a las 25 personas inscritas y pagarles el equivalente a lo que cuesta el master. En la misma universidad se está haciendo este año por primera vez una experiencia parecida con un master de matemáticas aplicadas a la industria y ahí también hay industrias que se comprometen a recoger durante un período a las personas que realizan esa formación de postgrado y pagarles el tiempo de prácticas de modo que recuperen la inversión inicial del master. Así que también hay una implicación directamente por parte de la industria. Creo que en este tipo de formaciones de postgrado destinadas a estudiantes de matemáticas los departamentos de matemáticas tendremos una participación posiblemente pequeña porque la preparación teórica ya se la hemos dado antes. Ahí es donde deberían intervenir desde Departamentos de Economía o Departamentos de Ingeniería hasta profesionales de fuera de la Universidad que pueda presentar el aspecto práctico de cómo se trabaja en la industria, en la empresa, en las finanzas, etc. Porque, insisto, los alumnos que entran a la carrera de matemáticas no suelen tener como objetivo este tipo de actividad y, si ven que hay nuevos caminos, los estudiantes ya podrían entrar con esa mentalidad. En algún momento se podrá pensar que la profesión de matemáticas sirve para algo que no sea dar clase.

Y para terminar otro comentario: ¿quién es el que le da prestigio a la matemática? Antes, se ha hablado de los planes de estudio de escuelas técnicas y ha habido una pequeña discusión de si las matemáticas eran sólo para seleccionar o servían para otra cosa y de si se habían rebajado o no las exigencias. Yo no voy a poner un ejemplo de los ingenieros, que están en un departamento distinto del nuestro, hablaré de nuestra Facultad. Nosotros, en la Facultad de Ciencias, además de a los matemáticos damos clase a físicos, químicos, biólogos y geólogos. En biología es un hecho evidente que las matemáticas se han reducido y se han reducido drásticamente, la formación matemática de un biólogo es muy escasa y los alumnos de biología, en realidad, estarían muy contentos si incluso quitásemos ese poquito. ¿Por qué? Porque los profesores de biología o los biólogos profesionales, que son los que después deberían utilizar las matemáticas, o no ven la necesidad, o no la tienen, o por lo menos no la prestigian suficientemente. Es verdad que hemos estado enseñando muy mal esos cursos porque hemos estado dando un punto de vista demasiado teórico, inadecuado para los biólogos. Pero si hay necesidad de matemáticas, el biólogo profesional debería hacérselo sentir al alumno y él mismo o el alumno debería venir a nosotros y decirnos que el curso está mal dado pero que necesitan ese curso bien hecho.

Volviendo a los ingenieros, yo creo que la cuestión no es tanto, cuántas matemáticas enseñan los profesores de matemáticas en Ingenieros, sino cuántas matemáticas utilizan los ingenieros que no son profesores de matemáticas. Ellos deberían decir a los profesores de matemáticas “Esto es lo que queremos que enseñéis” y además decirle al alumno “Esta es la matemática que yo utilizo y esa es la que quiero que sepas y además, aprende mucha más, porque si sabes más matemática que yo, seguramente, podrás utilizarlas mejor”.

Lourdes Llorens, Directora del Instituto Vasco de Estadística EUSTAT

Me gustaría por alusiones, hablar un poquito de lo que has comentado sobre la información; sobre la cantidad de información que existe en el Gobierno. Realmente, hay muchísima información, obviamente está organizada para utilizar no solamente en la Universidad, sino en el propio Gobierno; para hacer política. Pero a mí me gustaría echar un poquito en cara a la Universidad que dedica muchos de sus esfuerzos a la investigación teórica. En el Instituto llevamos 17 ó 18 años recogiendo información, tenemos una cantidad de información impresionante y creo que se usa muy poco. Se usa muy poco por parte de la Universidad y yo animo desde aquí, a utilizarla más. Quizás sea culpa nuestra; que nosotros no sabemos vendernos; que no sabemos vender nuestra información, pero creo que la Universidad, en concreto las Facultades de Económicas y de Matemáticas, la usan muy poco, y yo creo que el tema los modelos de simulación necesitan datos. Muchas gracias.

Luis Vega, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UPV/ EHU

¿Cómo es de grave que en gran medida el software sea extranjero?.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Este tema siempre me ha interesado y sobre el que he reflexionado un poco. Concretamente me he preguntado cómo un país como Francia, con una investigación científica y tecnológica muy sólida, y de larga tradición, apenas ha producido software de simulación comercial. Como todos sabéis Francia es un país que tiene un gran nivel en matemáticas, y donde esta disciplina que tiene un enorme prestigio social. Por cierto, ese prestigio social en buena medida viene del hecho de que las matemáticas son la puerta para entrar en las “Grandes Écoles”, lo que permite alcanzar los puestos más elevados en la escala social. Es un país donde existe una gran inversión en investigación matemática, en matemática pura, y en matemática aplicada, hay medallas Fields, en fin, es una de las grandes potencias mundiales, probablemente sea el segundo país del mundo. Sin embargo, en este campo de la simulación Francia no ha producido apenas grandes paquetes comerciales; como antes se decía la mayoría de los paquetes son norteamericanos. Por lo tanto, no hay una correlación entre potencial matemático y software, y eso es porque hay otros elementos que juegan, que son de política científica y también culturales. Muchos de los paquetes comerciales de simulación numérica, estoy pensando en paquetes de mecánica de fluidos o paquetes de cálculo estructural con elementos finitos, han surgido de grupos universitarios, de departamentos que en un momento dado desarrollaron una investigación en el campo que les llevó a generar software como un subproducto. En un momento dado, miembros de ese grupo dan un salto y crean una empresa para hacer la comercialización de ese software. Porque, efectivamente, hay un salto cualitativo, no es lo mismo estar desarrollando códigos de cálculo simplemente para ilustrar con ejemplos numéricos las publicaciones en revistas, que hacer un producto que hay que vender. Bien, pues este salto en países como Gran Bretaña o Estados Unidos se ha hecho, pero mucho menos en otros como Frania o España, y yo creo que tiene que ver con una cierta cultura de los países anglosajones que proporciona una mayor permeabilidad entre los ámbitos de lo público y de lo privado. Por eso no se ve mal que miembros de un grupo universitario, creen una empresa y, con todos los mecanismos de transparencia que sean necesarios, acabe comercializando un producto que han desarrollado, en una primera etapa, en el seno de la Universidad. En los años 80, el INRIA, (Instituto Nacional de Informática y Automática de Francia), se planteó potenciar el trasvase de sus resultados de investigación al sector productivo y entonces creó empresas filiales; pero estas empresas no las crearon los investigadores sino el Instituto como tal; fueron creadas “desde arriba” y, en cierto modo, como cualesquiera otras, con participación de sociedades de capital riesgo, de bancos, etc. de manera que se constituyeron como estructuras separadas, sobre todo de los investigadores. Ésta característica hizo que la experiencia no fuera del todo positiva, al menos en el ámbito de la simulación numérica que es el que más conozco de cerca.

El resultado es que, en este momento, un país como Francia, que ha desarrollado una investigación en el campo de la mecánica de fluidos computacional de primera magnitud, donde grupos de investigación muy solventes han desarrollado códigos para AEROSPATIALE, para Avions Marcel Dassault, etc., no ha conseguido competir en el mercado con códigos que han surgido en universidades inglesas o norteamericanas. Después está el problema del mercado. Estos productos requieren desarrollos muy costosos, pero también mantenimiento y actualización porque enseguida resultan obsoletos, y también formación y soporte a los clientes, porque son difíciles de utilizar. Por lo tanto es necesario trabajar con vistas a todo el mercado mundial. Tal es el caso de FUENT, un paquete de mecánica de fluidos norteamericano, que en este momento tiene sus clientes repartidos a partes iguales entre Asia, Europa y América.

Esto que digo es para el mercado de los grandes paquetes de propósito general, pero hay otro mercado que es el de los pequeños paquetes, o mejor el de las aplicaciones a la carta para resolver necesidades concretas de las empresas. Yo creo que los departamentos de las universidades, en particular los de matemáticas, pueden desarrollar una labor interesante en este terreno, haciendo programas de simulación, que no resuelve todos los problemas del mundo, pero que dan una respuesta mucho más ajustada a necesidades concretas.

José Antonio Lozano, Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Facultad de Informática, UPV/EHU

¿Cuál es la sensación del ponente acerca de la disponibilidad de la empresa a colaborar con la Universidad?. Hacía esta pregunta por lo siguiente, nosotros hemos colaborado con diferentes empresas de mayor o menor tamaño en cuestión de optimización o análisis de datos y la sensación que a uno le queda es que es difícil colaborar con las empresas, en el sentido de que no se las ve muy dispuestas a ello. Parece que tienen un cierto reparo a colaborar con la Universidad y están más orientadas a resolver los problemas del día a día que a trabajar en cosas cuyo beneficio a veces no está claro. Esa es la pregunta más o menos.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Yo creo que en general existe una cierta desconfianza sobre el interés de colaborar con la Universidad, probablemente porque en algunos momentos han podido existir experiencias negativas. Antes comentábamos que ahora en los discursos institucionales, cualquier rector asume que esto de la transferencia tecnológica es un tema muy importante para la Universidad, para su financiación y para la mejora de su imagen en la sociedad; pero esto es relativamente reciente y muchos departamentos todavía no disponen de infraestructura, o bien tienen una excesiva carga de trabajo, docente, investigadora, burocrática, etc., y esto les impide dar una respuesta adecuada a las empresas. Pero creo que la situación está cambiando rápidamente y cada vez es mayor la credibilidad de que gozan entre las empresas algunos grupos universitarios.

Después hay otra cuestión que ya atañe más a las empresas: tengo la impresión de que se camina hacia un modelo en el que las empresas, incluso la grandes, no tengan que tener grandes departamentos de investigación y desarrollo. Incluso en países donde hay una gran tradición de innovación y por tanto de investigación tecnológica se camina en la dirección de encargar la investigación, e incluso el desarrollo, a Institutos y Universidades. De nuevo un ejemplo francés: como sabéis Electricidad de Francia es una empresa estatal de producción y distribución de energía que tiene en su interior un gran centro de investigación cubriendo disciplinas científicas diversas, desde la combustión al electromagnetismo, pasando por la hidráulica. Pues parece que la tendencia es a ir cambiando el modelo, reduciéndolo. Así por ejemplo, el Laboratorio Nacional de Hidráulica, que pertenecía a EDF, ha dejado de existir como tal recientemente. Yo no sé si esto es bueno o malo, pero en todo caso parece que es algo impuesto por las nuevas corrientes de la economía globalizada y está claro que es una tendencia que puede favorecer el desarrollo de la investigación en la Universidad. Aún así es imprescindible, que las empresas destinen a alguna persona para detectar y canalizar sus necesidades de I+D a las Universidades y Centros de Investigación y después asumir la interlocución con los investigadores. Además esta persona debería encargarse de una misión importante para la empresa: conseguir fondos públicos para financiar los proyectos de I+D. Como todos sabéis, tanto el Gobierno Central como las Comunidades Autónomas tienen programas para este fin, aparte de las exenciones fiscales que permiten rebajar la cuota del impuesto de sociedades entre un 30 y un 50 por ciento de los gastos en I+D.

Un caso que responde a este modelo y que está funcionando muy bien, es el de Ferroatlántica. Este grupo constituyó hace algunos años una empresa llamada Ferroatlántica I+D, para desarrollar y comercializar la tecnología que va produciendo en torno a la metalurgia del silicio y de las ferroaleaciones. En particular Ferroatlántica I+D se dedica a mejorar y a comercializar el electrodo ELSA del que os hablé. Para ello establecen relaciones con grupos universitarios con los que contratan trabajos de investigación que tienen por objeto mejorarlo.

Juán José Anza, del Departamento de Matemática Aplicada, Escuela de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones de Bilbao, UPV/EHU

...en línea con lo que está explicando el profesor Bermúdez, me gustaría poner un ejemplo: sobre los equipos de investigación, la interacción Empresa-Universidad, Centros Tecnológicos, etc. que no solamente tiene que ver con la matemática aplicada, sino probablemente con el problema global de I+D, etc. Tengo una experiencia de 5 años trabajando en un Centro Tecnológico que está hoy aquí representado también y tuve en el 94 una experiencia en un proyecto europeo que voy a contar. Este proyecto europeo era en el seno de la CECA y la empresa que lideraba el proyecto era ARBED, que creo que ahora también está aquí en el País Vasco, y funcionaba de la siguiente manera: ARBED tenía un pequeño departamento de I+D, orientado al campo que abarcaba este proyecto que eran fluidos, estructuras, etc. y en ese departamento de I+D había un jefe y dos ingenieros jóvenes que trabajaban. Entonces, ARBED acudía a los proyectos de la CECA, extraía proyectos que tenían para ellos interés tecnológico, definía las especificaciones, lo que quería sacar de esos proyectos y entonces formaba un equipo donde había Centros Tecnológicos y Universidad. El núcleo fuerte de trabajo lo hacían los Centros Tecnológicos y a la Universidad en parte la tenían como consultores. Es decir, el Centro Tecnológico está organizado más como empresa, tiene más mano de obra, sin embargo, en el día a día muchas veces el Centro Tecnológico no le permite profundizar, eso se hace en las Universidades, en tesis doctorales, etc. A mí me parece que fueron proyectos que funcionaron muy bien, yo no los acabé, y precisamente la persona que los acabó del Centro Tecnológico, está también aquí, y podría, comentar algo al respecto, es Fernando Espiga de LABEIN. Me parece muy importante saber hacer equipos, y esa cultura no existe, no existe en el I+D en España. Desde la Universidad queremos hacer todo, queremos coger un proyecto, le decimos a la empresa que podemos solucionarle cualquier cosa y luego, al final, hay decepción. A veces, los Centros Tecnológicos dicen que son capaces de hacer investigación básica y tampoco. Y hay otro elemento importante que es el tema de inversión, que va un poco en la línea de lo que decía el profesor Bermúdez, al final para la empresa requiere un esfuerzo, si quiere instalar simulación mediante paquetes, tiene que comprar el paquete, tiene que contratar a gente que aprenda a utilizar esos paquetes y que se mantenga ahí, y si además quiere también interlocución con Centros Tecnológicos, con Universidad, etc. pues, esa persona no puede estar cambiando continuamente. Hay poca cultura de inversión I+D en la medida en que progresemos en esta línea es cuando las cosas serán más reales en investigación en España.

Arantza Urkaregi, Departamento Matemática Aplicada, Estadística e Inv. Op., Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Miembro del Consejo Social

Estoy de acuerdo en la necesidad de adaptar la formación de los Matemáticos a la aplicación práctica, dado que todo el mundo no pueda saber de todo, pero ¿no crees que sería positivo impulsar equipos de investigación multidisciplinar en función del campo de trabajo?. Por ejemplo matemáticos y médicos o matemáticos, físicos e ingenieros, etc.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Indudablemente, y yo creo que la forma de hacer eso es partiendo de un proyecto, es decir, creo que esa colaboración y la creación de los equipos se puede hacer con relativa facilidad si hay un objetivo concreto desde el principio, si hay un proyecto. Se citaba la colaboración de matemáticos y médicos; es un campo clarísimo, todos los temas de tratamiento de imágenes, de medios de diagnóstico, de la llamada ingeniería biomédica en general, requieren muchos algoritmos de modo que es un campo interdisciplinar para médicos, ingenieros, físicos, matemáticos,...

Arantza Urkaregi, Departamento Matemática Aplicada, Estadística e Inv. Op., Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Miembro del Consejo Social

He realizado esta pregunta porque creo que se ha planteado antes la dificultad que hay de formar matemáticos desde el punto de vista práctico. Javier Duoandikoetxea también ha planteado las dificultades que hay incluso entre los propios alumnos que, igual no lo ven, pero es cierto lo que tú planteas. Esos equipos tienen que estar enfocados en un problema concreto. Yo lo digo por propia experiencia, nosotros tenemos un convenio firmado con OSAKIDETZA, para un tema concreto de aplicación de la estadística al campo médico. Entonces, tú misma te vas dando cuenta de las necesidades y de las deficiencias que tienes, pero es un estímulo tanto a nivel de investigación como a nivel de docencia y lo que está claro es que las personas matemáticas tenemos una formación, tú también lo has dicho en tu exposición, que nos permite adaptarnos a un montón de cuestiones. En ese sentido creo puede ir cambiando un poco la formación matemática. Podría ser a través de esos equipos de investigación multidisciplinar que podrían llevarnos a un cambio en nuestra propia docencia. El problema que se ha planteado respecto a la reforma de los planes de estudio es algo más a medio plazo y a veces cuenta con más dificultad.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Estoy completamente de acuerdo con lo que has dicho. Yo introduciría también un elemento nuevo, que conecta con un comentario anterior. La Universidad establece una serie de objetivos recogiendo las misiones que le encarga la sociedad, pero muchas veces no es coherente y me voy a referir a un tema concreto que me parece que está relacionado con lo que tú dices. Se trata del coste que supone para un matemático incorporarse a un equipo multicisciplinar. Un matemático está trabajando en un campo de investigación, probablemente de carácter teórico; está consiguiendo una productividad que plasma en artículos, comunicaciones a congresos, etc. y que le van a permitir su promoción profesional: si se presenta a unas oposiciones de profesor, le van a pedir que tenga un curriculum investigador, que haya publicado en revistas, cuanto más prestigiosas mejor. Y de repente, un buen día se le plantea dar un giro de noventa grados y meterse en un equipo interdisciplinar, cuando eso le supone que va a estar unos años probablemente sin producir artículos. Estoy plenamente convencido que la universidad española tenía un déficit de investigación y por lo tanto ha sido muy importante que durante estos últimos años la investigación se haya primado especialmente. Pero todo es cuestión de equilibrio, de medida, de proporciones. Yo creo que la Universidad va a tener que valorar también estos otros costes que suponen las reconversiones, en este caso de los matemáticos, el que una persona esté durante unos años formándose en otro campo interdisciplinar donde probablemente va a ser muy útil, pero a corto plazo su actividad no se va a traducir en publicaciones que le vayan a permitir ganar unas oposiciones. Yo creo que la Institución, manteniendo con claridad que un profesor universitario debe hacer una investigación de calidad, debe también valorar este otro tipo de tareas. Esto creo que animaría a que, en este caso los matemáticos, se integrasen con más facilidad en otros equipos para los que van a ser muy valiosos.

Pedro Larrea, Presidente del Consejo Social

Nos estamos acercando ya al final, si hay alguna nueva pregunta …

José Antonio Lozano, Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Facultad de Informática, UPV/EHU

Yo, como vengo de la Facultad de Informática, y aquí se está hablando de matemáticos, de ingenieros, de físicos, tengo que decir que también me gustaría que se tuviese en cuenta a los ingenieros informáticos, que tienen una base matemática bastante importante y en este tipo de grupos interdisciplinares tendrían un papel que jugar, porque el desarrollo software se hace con este tipo de aplicaciones.

Son campos en los que ellos son expertos y la base matemática les confiere también un poder de interrelación con matemáticos, con ingenieros, con físicos o con otra gente con una formación matemática.

Manuel Tello, Decano de la Facultad de Ciencias y Miembro del Consejo Social

Quisiera plantearle al ponente una reflexión final. En la discusión se han puesto de manifiesto dos opciones: primera, trabajo usual con paquetes comerciales; segunda, aplicaciones más avanzadas de los paquetes comerciales. Para la primera parece que ha quedado claro que es suficiente con incorporar la formación adecuada en matemáticas a las titulaciones de ingeniero, físico, etc. Los matemáticos entrarían en la segunda. Sin embargo las ventajas competitivas vienen de opciones nuevas no contempladas en lo que se vende. En los ejemplos de la exposición creí ver algo en este sentido.

Primera pregunta: ¿Podría darnos, en base a su experiencia, su opinión sobre el futuro en esta dirección, así como una comparación con su experiencia internacional?.

Y la segunda es: ¿Puede extender sus comentarios a la posibilidad de desarrollar tecnología avanzada con bajo coste de creación gracias a la aportación de los matemáticos? Por ejemplo, tecnología basada en lo no lineal.

Alfredo Bermúdez de Castro, Director del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de compostela, Facultad de Matemáticas

Sobre la primera parte diría que los paquetes comerciales son productos dinámicos que experimentan continuas mejoras y desarrollos, no sólo para incluir cada vez más modelos sino también nuevos algoritmos: existe una investigación de carácter estrictamente matemático, para mejorar los métodos de cálculo y cualquier paquete que se precie va a seguir vivo y abierto para incorporar todas estas mejoras. Por lo tanto en el desarrollo de los grandes paquetes también hay una contribución de los matemáticos.

Sobre la segunda pregunta creo que algo ya he comentado también en mi charla. La simulación numérica permite desarrollar tecnología con mayor rapidez y menores costes. Por ejemplo una empresa que fabrica volantes recibe un encargo para un nuevo automóvil. La forma tradicional de proceder consiste en hacer un primer diseño que se somete en laboratorio a los ensayos del “cuaderno de cargas”. Si alguno no se satisface es necesario modificar este primer diseño y volver a empezar. Este proceso lleva tiempo y tiene unos costes importantes. Por el contrario, si uno dispone de un modelo del comportamiento mecánico de ese volante, puede someterlo a todos los test del cuaderno de cargas en el ordenador y, si fuese necesario, modificarlo con ayuda de un programa de “diseño asistido por ordenador” (CAD). Por supuesto el que pase los test en el ordenador es suficiente, pues las normas de homologación requieren los ensayos en laboratorio, pero la ventaja es que el número de prototipos se reduce considerablemente.

Pedro Larrea, Presidente del Consejo Social

Muchas gracias a todos. Damos por finalizado el debate. Ahora muy brevemente, Mikel Lezaun nos presentará los actos del Año Mundial de las Matemáticas.

Mikel Lezaun, Director del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias, UPV/EHU y Coordinador del Comité en el País Vasco para la celebración del Año Mundial de las Matemáticas

Como casi todos ustedes ya saben, este año 2000 es el Año Mundial de las Matemáticas. El inicio de esta conmemoración se remonta a mayo del 92, fecha en la que la Unión Matemática Internacional, reunida en Río, declaró el año 2000 como el Año Mundial de las Matemáticas, con los objetivos de determinar los grandes desafíos matemáticos del siglo XXI, proclamar a las matemáticas como una de las claves fundamentales para el desarrollo e impulsar la presencia sistemática de las matemáticas en la sociedad de la información. A su vez la UNESCO, en su Conferencia General de noviembre de 1997, acordó su apoyo y patrocinio del año 2000 como el Año Mundial de las Matemáticas, señalando además el papel clave de las matemáticas en todos los niveles del sistema educativo.

A comienzos del año pasado, se reunieron en Madrid todas las sociedades matemáticas españolas y tomaron una actitud decidida a utilizar el Año Mundial de las Matemáticas, para dar a conocer las matemáticas a la sociedad. Una de las primeras propuestas fue la aprobación en febrero de un Proyecto no de Ley en el que el Congreso de los Diputados resaltaba la importancia de las matemáticas y apoyaba todos los actos conmemorativos del año 2000. El 22 de enero de este año hubo una Jornada Matemática en el Congreso de los Diputados que fue presidida por D. Federico Trillo y en la que intervino el profesor francés Jacques Louis Lions, que en el año 92 era Presidente de la Unión Matemática Internacional. Por su parte el Senado ha montado una exposición que fue inaugurada por su Presidenta Dª Esperanza Aguirre, titulada "Las Medidas y las Matemáticas. La Introducción del Sistema Métrico Decimal en España" y ha editado en facsímil "El libro de los relojes solares". Siguiendo con actividades institucionales, el Parlamento de Cataluña, el Parlamento de Galicia, el Parlamento de Valencia y el Parlamento de Andalucía han aprobado declaraciones referentes al Año Mundial de las Matemáticas 2000.

Desde aquí, desde el País Vasco, el año pasado nos reunimos profesores de diferentes departamentos que tienen relación con las matemáticas y convenimos en la necesidad de organizar distintos actos conmemoraticos de este Año Mundial de las Matemáticas. Desde un principio pensamos que en los actos conmemorativos había que desarrollar tres aspectos: la presencia de las matemáticas en la sociedad y sus relaciones con otros sectores de la sociedad, la investigación matemática y por último la enseñanza de las matemáticas.

Dentro del primer apartado, el primer acto es éste que ha organizado el Consejo Social. Tengo que hacer notar que desde el momento en que vinimos a informar al Consejo Social de que éste es el Año Mundial de las Matemáticas, su interés ha sido constante y de ellos ha partido esta iniciativa. También en este apartado, hemos organizado un ciclo de conferencias de carácter divulgativo en la Biblioteca de Bidebarrieta titulado "La irrazonable eficacia de las Matemáticas". Este ciclo va a empezar el martes y durará cinco martes consecutivos. Con respecto de este ciclo, pensamos que teníamos que ofrecer este marco a personas que hablaran de matemáticas pero que no fueran del mundo académico de las matemáticas. Así, empezaremos con una conferencia de "Matemáticas y Física", tendremos otra que se titula "El Uso de las Matemáticas en los Mercados Financieros", una tercera se titula "La Concepción Matemática en la Música del Siglo XX", otra conferencia será "Algunas Aplicaciones de las Matemáticas a la Ingeniería" y la última se titula "La Eficacia de la Programación

Matemática en el Mundo Empresarial”. Está claro que la primera estará dada por un físico, Enrique Alvarez, la segunda la impartirá el responsable de la Mesa de Nuevos Productos del BBVA, Eloy Fontecha, el tercer conferenciante es un compositor y musicógrafo, Carlos Villasol, el cuarto es Enrique Castillo Ron y el último el Director de Sistemas de Apoyo a la Decisión, Laureano Escudero. Tendremos pues cinco conferencias divulgativas con el enfoque que ya he comentado antes. También, dentro de este apartado, se han programado para finales de agosto dos cursos de verano en la Universidad de Verano de San Sebastián que se titulan “Matemáticas en el Mundo Real”. Voy a leer varios títulos para que vean la orientación de estos cursos: “Sistemas de reacción-difusión, una clase de modelos matemáticos en biología”, “Procesos Estocásticos, ¿realmente son útiles en finanzas?”, “La Estadística, problemas y métodos”, “Caos en el movimiento del Sistema Solar”, ”Análisis Numérico, aplicación a problemas reales”, “Codificación de la Información”.

En el apartado de las matemáticas desde las matemáticas, el acontecimiento más importante que va a haber este año se celebrará en Barcelona y es el tercer Congreso Europeo de Matemáticas, que tendrá lugar el mes de julio. Ya aquí, en Bilbao, va a haber un Congreso muy importante de Geometría Diferencial en memoria de Alfred Gray, que era un profesor de Maryland que estando de visita en la Universidad del País Vasco murió de un infarto. Su viuda quiso que el congreso homenaje se realizara en Bilbao y éste se va a celebrar en septiembre. Hay que resaltar que vienen dos “medallas Fields”, que podríamos decir que es el máximo galardón que puede obtener un matemático.

Por último, en lo referente a las matemáticas y la educación, lo vamos a dejar para el comienzo del curso que viene. Dos o tres personas tenemos el compromiso de organizar una o dos jornadas-debate con profesores de enseñanzas medias y también alguna jornada universitaria en el ámbito, por lo menos, de la Facultad de Ciencias. Esta última jornada sería alrededor de San Alberto, que es nuestro patrón, ya que, debido a los exámentes, es más fácil hacerla a principio que al final de curso.

Estos serían, en resumen, los actos que tenemos previstos para conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas 2000. Muchas Gracias.

Pedro Larrea, Presidente del Consejo Social

Muchas gracias Mikel. Nos gustaría terminar estos Encuentros con algún resultado tangible, que sea fruto del debate. Para ello, el Consejo Social va a trasladar al Parlamento Vasco la necesidad de que inste al Gobierno, en línea con otras iniciativas adoptadas por otros Parlamentos a los que acaba de hacer referencia Mikel Lezaun, para que favorezca programas de investigación en el ámbito de las matemáticas, sean didácticos o de aplicación científica e industrial, empresarial o tecnológica, y segundo, para que se divulguen las matemáticas en los medios de comunicación de titularidad pública. Por otra parte, a mí me gustaría hacer una reflexión final. Es muy fácil querer trasladar la responsabilidad a las instancias sociales diciendo: ”Es que no nos piden, es que están muy distantes de nosotros. No somos todo lo útiles que podríamos ser porque desde el otro lado no hay ningún intento de acercamiento. De la misma manera, este mismo esquema puede operar, y a veces opera, desde las empresas o desde estamentos sociales: “Es que la Universidad no se acerca a nosotros. La Universidad no es consciente de los problemas reales que tiene la sociedad”.

Bien, yo creo que una forma, si no la única por lo menos la más expeditiva para solucionar este distanciamiento entre unos y otros, es aproximar la oferta a la demanda. En este sentido, la idea de una Fundación, como la que el Consejo Social viene proponiendo con poco éxito, desde hace seis años, sigue siendo una idea válida.

Sé que en los equipos de las tres candidaturas que pasado mañana compiten por el rectorado, hay sensibilidades muy distintas a este respecto. Desde el Consejo tenemos que ser exquisitamente neutrales ante el proceso pero en cualquier caso, sí os diré que al nuevo equipo rectoral le vamos a plantear la fundación Universidad-Sociedad. Con esto prentendo haceros partícipes de nuestras intenciones. Me dirijo a todos los académicos, pero también a la representación empresarial, para que cuando nosotros tomemos la iniciativa nos apoyéis. Porque repito, creo que es una herramienta realmente útil como se ha demostrado en otras Universidades de Galicia, Madrid o Cataluña.

Para que esta aproximación sea más estrecha, y para que realmente la Universidad aporte más a la sociedad y al mismo tiempo resuelva el problema de financiación que tiene planteado, todas estas iniciativas pueden ser realmente útiles.

Muchas gracias a todos por su participación y por sus aportaciones a este debate.