Optimización Matemática: Ejemplos y aplicaciones

Juan J. Salazar González

Profesor Titular de Estadística e Investigación Operativa
Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación
Universidad de La Laguna

http://webpages.ull.es/users/jjsalaza

Resumen

Se introducen aquí diversas aplicaciones de la Optimización Matemática, tanto de la Lineal Continua como de la Entera. El objetivo es mostrar algunas de las tantas situaciones reales que demandan métodos de optimización. En cada situación se propone un *Modelo Matemático*, punto de partida fundamental para intentar afrontar su resolución mediante Programación Matemática. En la charla veremos además algunas herramientas que permiten encontrar soluciones para los problemas a partir de los modelos.

1. Introducción

La Programación Lineal Continua trata sobre la resolución de problemas de optimización que pueden modelizarse en la forma

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{para todo } i = 1,\dots,m,$$

donde n representa el número de variables, m el número de restricciones, x_j $(j = 1,\dots,n)$ las variables del problema, y a_{ij}, c_j, b_i $(i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$ números reales dados. Al número c_j se le llama *costo* asociado a la variable j-ésima $(j = 1,\dots,n)$, mientras que al número b_i se le llama *recurso* asociado a la restricción i-ésima $(i = 1,\dots,m)$. Utilizando notación vectorial, el problema anterior puede ser representado en la *forma compacta* siguiente:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

siendo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{A}$ una matriz con m filas y n columnas. Observemos que la región factible es un poliedro.

Cualquier problema de Programación Lineal puede reescribirse de la siguiente forma, llamada *forma estándar*:

$$
\begin{aligned}
\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}& \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq 0,
\end{aligned}
$$

aunque la transformación desde otra forma puede alterar el número de variables y/o restricciones del problema.

En general, la conversión puede llevarse a cabo como sigue:

1. Una función objetivo de tipo "$\max$" se convierte en "$\min$" cambiando de signo los valores c_j (y de signo la nueva función).
2. Una restricción de tipo $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b_i$ se convierte en ecuación añadiendo una variable $x^h \geq 0$, creando $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + x^h = b_i$. Esta variable x^h se llama *variable de holgura*. Una restricción de tipo $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b_i$ se convierte en ecuación añadiendo una variable $x^h \geq 0$, creando $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - x^h = b_i$.
3. Una variable x_j no limitada en signo se convierte en dos variables $x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$ mediante la sustitución $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

Mediante pautas similares a las anteriores puede demostrarse que las siguientes formas son equivalentes:

1. $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
2. $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$
3. $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$
4. $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
5. $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$

También hay otras formas similares. Sin embargo, ninguna es equivalente a la forma $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, ya que la región factible de ésta es un subespacio afín o el conjunto vacío, y no hay siempre alternativa para hacer desaparecer todas las desigualdades de un sistema lineal de ecuaciones e inecuaciones. Precisamente ésta es una de las grandes dificultades que afronta la Programación Matemática, y que proceden de las ineludibles limitaciones de recursos existentes en muchos problemas del Mundo Real.

Dado que las variables x_j son números reales, no necesariamente enteros, se dice que los modelos anteriores pertenecen a la Programación Lineal *Continua.* Cuando las variables x_j deben ser necesariamente números enteros, entonces se dice que los modelos son de Programación Lineal *Entera.*

En lo que sigue veremos diversos ejemplos concretos que demuestran las numerosas aplicaciones de la Programación Matemática, tanto Lineal Continua como Entera. Es conveniente observar que dado un problema real puede haber varios modelos matemáticos asociados, pudiendo resultar algunos menos útiles que otros para la resolución práctica del problema. En este sentido avisamos al lector de que en los ejemplos hemos optado sólo por modelos simples de presentar.

2. Problema de optimizar mezclas

Problema real

En la refinería de Santa Cruz de Tenerife (*C.E.P.S.A.*) se producen 3 tipos de gasolinas que describimos a continuación:

Tipo	**Variedad**	**Octanaje**
A	STAR-98	98 Oct.
B	Sin Plomo	95 Oct.
C	Súper	97 Oct.

Para ello se mezclan cuatro productos base, que representaremos con un número, y cuyo costo y disponibilidad son:

Producto	**Disponibilidad**	**Costo/unidad**
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4
4	1000	5

Para la clasificación de la mezcla en uno de los tres tipos de gasolina se atiende a la proporción de los productos que la componen según la siguiente tabla:

Producto	**Prod. 1**	**Prod. 2**	**Prod. 3**	**Prod. 4**	**Beneficio/Unidad**
A	$\leq 30\%$	$\geq 40\%$	$\leq 50\%$	s.l.	5,5
B	$\leq 50\%$	$\geq 10\%$	s.l.	s.l.	4,5
C	$\geq 70\%$	s.l.	s.l.	s.l.	3,5

donde "s.l." significa que no importa la proporción de ese producto.

Modelo matemático

Consideremos las siguientes variables:

- $y_A \equiv$ Cantidad de gasolina de tipo A (STAR-98).
- $y_B \equiv$ Cantidad de gasolina de tipo B (Sin Plomo).
- $y_C \equiv$ Cantidad de gasolina de tipo C (Súper).
- $z_1 \equiv$ Cantidad de producto 1.
- $z_2 \equiv$ Cantidad de producto 2.
- $z_3 \equiv$ Cantidad de producto 3.
- $z_4 \equiv$ Cantidad de producto 4.
- $x_{ij} \equiv$ Cantidad de producto $i \in \{1,2,3,4\}$ invertido en $j \in \{A,B,C\}$.

Entonces, un modelo matemático es:

$$\max 5{,}5\, y_A + 4{,}5\, y_B + 3{,}5\, y_C - 3 z_1 - 6 z_2 - 4 z_3 - 5 z_4$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} y_A &= x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} \\ y_B &= x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} \\ y_C &= x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_1 &= x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \\ z_2 &= x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \\ z_3 &= x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \\ z_4 &= x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &\le 3000 \\ z_2 &\le 2000 \\ z_3 &\le 4000 \\ z_4 &\le 1000 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{1A} &\le 0{,}3\, y_A \\ x_{2A} &\ge 0{,}4\, y_A \\ x_{3A} &\le 0{,}5\, y_A \\ x_{1B} &\le 0{,}5\, y_B \\ x_{2B} &\ge 0{,}1\, y_B \\ x_{1C} &\ge 0{,}7\, y_C \end{aligned}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \text{para todo } i \in \{1,2,3,4\} \text{ y para todo } j \in \{A,B,C\}.$$

Notemos que un simple análisis del modelo nos permite eliminar las variables z_i y las variables y_j haciendo uso de las ecuaciones. Es siempre muy importante realizar este proceso de simplificación (generalmente llamado *preproceso*).

3. Problema de planificar una cosecha

Problema real

Un agricultor tiene 500 hectáreas de terreno para cultivar próximamente y desea planificar tal cultivo. Sabe que necesitará disponer de 200 toneladas de trigo y 240 toneladas de maíz para alimentar a su ganado, lo que puede obtener mediante su propia cosecha o mediante compra en el mercado. Lo que produzca, y que no dedique a su ganado, lo puede vender. Los precios de venta son de 170 euros y 150 euros por cada tonelada de trigo y de maíz, respectivamente. Los precios de compra son un 40% superior debido a las ganancias de intermediarios y a los costos de transporte.

Otro cultivo posible es el de caña de azúcar, que se vende a 36 euros cada tonelada producida. Sin embargo, normas de la Comisión Europea imponen una cuota máxima para la producción de azúcar, lo que conlleva que cada tonelada de caña de azúcar producida sobre tal cuota tendrá un precio de venta de 10 euros. Para el próximo cultivo se espera que tal cuota sea 6000 toneladas.

Basado en experiencias anteriores, el agricultor conoce que la producción media es 2,5, 3 y 20 toneladas por hectárea de trigo, maíz y caña de azúcar, respectivamente. El costo de plantar una hectárea de trigo, maíz y caña de azúcar es de 150, 230 y 260, respectivamente.
Plantear un modelo matemático cuya solución pueda ayudar al agricultor en su deseo de maximizar sus beneficios.

Modelo matemático

Consideremos las siguientes variables:

- $x_1 \equiv$ hectáreas que dedicará a trigo,
- $x_2 \equiv$ hectáreas que dedicará a maíz,
- $x_3 \equiv$ hectáreas que dedicará a azúcar,
- $y_1 \equiv$ toneladas que comprará de trigo,
- $y_2 \equiv$ toneladas que comprará de maíz,
- $w_1 \equiv$ toneladas que venderá de trigo,
- $w_2 \equiv$ toneladas que venderá de maíz,
- $w_3 \equiv$ toneladas que venderá de azúcar a 36 euros,
- $w_4 \equiv$ toneladas que venderá de azúcar a 10 euros.

Un modelo matemático es:

$$\max -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 - 238y_1 - 210y_2 + 170w_1 + 150w_2 + 36w_3 + 10w_4$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

$$2{,}5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200$$

$$3x_2 + y_2 - w_2 \leq 240$$

$$w_3 + w_4 \leq 20x_3$$

$$w_3 \leq 6000$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0.$$

Este modelo pertenece a la Programación Lineal, y mediante algún método de resolución es posible concluir que una solución óptima es:

$$x_1 = 120,\ x_2 = 80,\ x_3 = 300,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,$$

$$w_1 = 100,\ w_2 = 0,\ w_3 = 6000,\ w_4 = 0,$$

con beneficio óptimo 118600. Esto significa que el agricultor deberá dedicar 120 hectáreas a trigo, 80 a maíz y 300 a caña de azúcar, y con ello se espera que venderá 100 toneladas de trigo y la cuota máxima de azúcar (es decir, al precio más favorable), obteniendo un beneficio total de 118600 euros.

Dada la sencillez del ejemplo, resulta evidente que también se puede obtener esta misma decisión (óptima) mediante una simple regla lógica: “dedicar cada hectárea de terreno a la producción que más beneficio conlleve”. Así, tras producir lo que el ganado necesita, el resto conviene considerarlo en el siguiente orden: azúcar al precio favorable, trigo, maíz, azúcar al precio reducido. Este tipo de técnicas de resolución (que se denominan *heurísticas*) no siempre proporcionan una solución óptima de un problema si éste tiene otras restricciones adicionales más complejas.

4. Problema de optimizar músicos

Problema real

Una banda de músicos consta de 9 músicos (A,B,C,D,E,F,G,H,I) y debe repetir cada tarde un repertorio de 7 sinfonías (1,2,3,4,5,6,7). No todas las sinfonías necesitan de todos los músicos y cada músico recibe un salario proporcional al número de sinfonías en las que está presente (tocando o no su instrumento) desde la primera hasta la última en la que interviene. Ningún músico recibirá sueldo por sinfonías en las que esté presente antes de la primera en la que sea necesario ni después de la última en la que sea necesario, pero sí por todas las demás. La tabla 1 muestra las sinfonías en las que cada músico debe tocar su instrumento, así como el sueldo que recibe por cada sinfonía en la que tenga necesariamente que estar presente. ¿Cómo debe ordenar el director las sinfonías para minimizar el coste total de los salarios?

Músico	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Sinfonías	1,7	2,4,7	1,2,5,7	1,3,5	2,3,5,6	1,2,4,6,7	3,5,7	4,6	1,2,3
Coste/sinfonía	2	3	3	2	1	2	2	1	2

Tabla 1. Sinfonías y coste por músico.

Modelo matemático

Sea c_k el coste por sinfonía del músico k. Notemos que para cada músico el coste de las sinfonías en las que toca su instrumento es un valor constante. Por ejemplo, para el músico A su coste concerniente con las dos sinfonías en las que interviene es 4, y luego habrá que añadir dos unidades de coste adicional por cada sinfonía que el director decida colocar entre las sinfonías 1 y 7. Por tanto, el problema equivale a minimizar el costo por las sinfonías en las que el músico no toca y que están entre dos en las que sí toca.

Consideremos la matriz $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ donde cada fila i corresponde con una sinfonía y cada columna k con un músico. Mediante la tabla 1 es fácil notar que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, el problema puede ser entendido matemáticamente como el problema de reordenar las filas de $\mathbf{A}$ de manera que sea mínima la suma del número de ceros entre unos en una misma columna k por el costo de dicha columna c_k.

Un posible modelo consiste en definir, para cada sinfonía i y cada posible posición j en la ordenación final, la variable decisional

$$x_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si la sinfonía } i \text{ se toca en la posición } j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Para cada músico k también consideramos la variable u_k representando la posición en la ordenación final de la primera sinfonía donde es necesario, y la variable w_k representando la posición en la ordenación final de la última sinfonía donde es necesario, siendo $k \in \{A,B,C,D,E,F,G,H,I\}$. Entonces, un modelo matemático es:

$$\min \sum_{k \in \{A,\ldots,I\}} (w_k + 1 - u_k)c_k = 18 + \sum_{k \in \{A,\ldots,I\}} (w_k - u_k)c_k$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\{1,\ldots,7\}} x_{ij} &= 1 && \text{para todo } i \in \{1,\ldots,7\}\\
\sum_{i\in\{1,\ldots,7\}} x_{ij} &= 1 && \text{para todo } j \in \{1,\ldots,7\}\\
x_{ij} &\in \{0,1\} && \text{para todo } i,j \in \{1,\ldots,7\}\\
\sum_{j\in\{1,\ldots,7\}} j\, x_{ij} &\geq u_k && \text{para todo } i \in \{1,\ldots,7\},\ k\in\{A,\ldots,I\} : a_{ik}=1\\
\sum_{j\in\{1,\ldots,7\}} j\, x_{ij} &\leq w_k && \text{para todo } i \in \{1,\ldots,7\},\ k\in\{A,\ldots,I\} : a_{ik}=1.
\end{aligned}
$$

Nótese que $v_i := \sum_{j\in\{1,\ldots,7\}} j\, x_{ij}$ es la posición donde conviene tocar la sinfonía i. Dado que cuando $x_{ij} \in \{0,1\}$, v_i será automáticamente entera y, por el carácter de la función objetivo, también sucede que

$$
\begin{aligned}
u_k &= \min_{i\in\{1,\ldots,7\}:a_{ik}=1} v_i\\
w_k &= \max_{i\in\{1,\ldots,7\}:a_{ik}=1} v_i
\end{aligned}
$$

para todo músico $k \in \{A,\ldots,I\}$.

Conviene observar que este modelo se basa fuertemente en la condición $x_{ij} \in \{0,1\}$, es decir, en lo que distingue a este modelo de Programación Lineal Entera del modelo de Programación Lineal Continua que resulta de prescindir de tal condición. En algunas aplicaciones ambos modelos producen la misma solución; en otras suelen estar próximos (permitiendo que muchas técnicas para la Programación Lineal Entera se apoyen en técnicas de Programación Lineal); sin embargo, en este caso no es así. Es fácil notar que olvidando la integrabilidad de las variables x_{ij} (es decir, manteniendo sólo que deben asumir valores reales no negativos) se obtiene una solución óptima del problema lineal con valor objetivo cero (todas las u_k y w_k son iguales). Por tanto, el modelo matemático presentado es malo si se pretende abordar la resolución de este problema mediante técnicas que usen el modelo lineal.

Otra alternativa de modelo matemático es la siguiente. Añadamos una sinfonía ficticia 0 que hará el papel de apertura y cierre pero que no necesita de ningún músico (¡es música de cassette!). Para cada par de sinfonías $i, j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ distintas ($i \neq j$) consideremos la variable decisional

$$
y_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si cuando acaba } i \text{ comienza inmediatamente } j\\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}
$$

y la variable t_i que representa el instante en el que debe ser interpretada la sinfonía i ($t_0 := 0$ y $t_i \in \{1,...,7\}$). Además usamos las variables u_k y w_k antes definidas. Entonces, otro modelo matemático (también de Programación Lineal Entera) es:

$$\min \sum_{k \in \{A,..,I\}} (w_k - u_k) c_k$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \{0,1,...,7\} \setminus \{i\}} y_{ij} &= 1 \quad \text{para todo } i \in \{0,1,...,7\} \\
\sum_{i \in \{0,1,...,7\} \setminus \{j\}} y_{ij} &= 1 \quad \text{para todo } j \in \{0,1,...,7\} \\
y_{ij} &\in \{0,1\} \quad \text{para todo } i,j \in \{0,1,...,7\} \quad (i \neq j) \\
t_0 &:= 0 \\
t_j &\geq t_i + 7y_{ij} - 6 \quad \text{para todo } i,j \in \{0,1,...,7\} \quad (i \neq j, j \neq 0) \\
t_i &\geq u_k \quad i \in \{1,...,7\}, k \in \{A,...,I\} \ : \ a_{ik} = 1 \\
t_i &\leq w_k \quad i \in \{1,...,7\}, k \in \{A,...,I\} \ : \ a_{ik} = 1
\end{aligned}$$

Aunque innecesaria para el modelo de Programación Lineal Entera, la siguiente restricción debe también verificarse:

$$\sum_{i \in S, j \notin S} y_{ij} \geq 1 \qquad \text{para todo } S \subset \{0,1,...,7\},$$

ya que las variables y_{ij} deben definir una secuencia de las sinfonías.

Otro modelo diferente aparece al considerar también las variables y_{ij} con el sentido antes indicado, y para cada par de sinfonías i, j sea la variable z_{ij} que representa el número de las sinfonías que faltan por tocar cuando acaba i y empieza j. Además usamos las variables u_k y w_k antes definidas. Entonces, otro modelo matemático (también de Programación Lineal Entera) es:

$$\min \sum_{k \in \{A,..,I\}} (w_k - u_k) c_k$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\{0,1,\ldots,7\}\setminus\{i\}} y_{ij} &= 1 && \text{para todo } i \in \{0,1,\ldots,7\} \\
\sum_{i\in\{0,1,\ldots,7\}\setminus\{j\}} y_{ij} &= 1 && \text{para todo } j \in \{0,1,\ldots,7\} \\
\sum_{i\in S,\, j\notin S} y_{ij} &\geq 1 && \text{para todo } S \subset \{0,1,\ldots,7\} \\
y_{ij} &\in \{0,1\} && \text{para todo } i,j \in \{0,1,\ldots,7\} \quad (i \neq j) \\
\sum_{j\in\{0,1,\ldots,7\}} z_{0j} &= 7 && \\
\sum_{j\in\{0,1,\ldots,7\}\setminus\{i\}} (z_{ji} - z_{ij}) &= 1 && \text{para todo } i \in \{1,\ldots,7\} \\
\sum_{j\in\{1,\ldots,7\}} z_{ij} &\geq u_k && i \in \{1,\ldots,7\},\, k \in \{A,\ldots,I\} : a_{ik} = 1 \\
\sum_{j\in\{1,\ldots,7\}} z_{ij} &\leq w_k && i \in \{1,\ldots,7\},\, k \in \{A,\ldots,I\} : a_{ik} = 1 \\
0 \leq z_{ij} &\leq 7 y_{ij} && \text{para todo } i,j \in \{1,\ldots,7\} \quad (i \neq j) \\
z_{i0} = 0 \quad \text{y} \quad z_{0i} &= 7 y_{0i} && \text{para todo } i \in \{1,\ldots,7\}
\end{aligned}
$$

Al igual que el modelo anterior, este modelo puede ser “fortalecido” mediante restricciones adicionales notando que las variables y_{ij} deben definir una secuencia ininterrumpida cíclica de todas las sinfonías.

Dejamos propuesto al lector comparar la resolución de este problema mediante el uso de cada uno de los tres modelos. Una solución óptima de este problema viene dada por la secuencia 5,7,2,8,1,4,6,3, lo que produce 6 huecos.

5. Problema de optimizar la banda de una matriz

Problema real

Consideremos cualquier matriz cuadrada simétrica de dimensión $n \times n$. Las diagonales de una matriz se numeran atendiendo a su distancia con respecto a la diagonal principal. Así la diagonal principal tiene la etiqueta 0 mientras que las esquinas de la matriz que no están en la diagonal constituyen diagonales con etiqueta $n-1$. Se llama *ancho de banda* de $\mathbf{A}$ a la mayor etiqueta de alguna diagonal que contenga algún coeficiente no nulo. Por ejemplo, la matriz

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

tiene ancho de banda igual a 3. Encontrar una reordenación que, aplicada tanto a las filas como a las columnas, produzcan una nueva matriz con menor ancho de banda.

Modelo matemático

Consideremos la variable decisional x_{ij} que asume el valor 1 si la fila i (y la columna i) es colocada en la j-ésima posición y 0 en otro caso. Entonces, un modelo matemático es:

$$\min z$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\{1,\dots,5\}} \sum_{l\in\{1,\dots,5\}} |j-l|\, x_{ij}\, x_{kl} \le z &\quad \text{para todo } i,k \in \{1,\dots,5\} : \quad a_{ik} \neq 0 \\
\sum_{j\in\{1,\dots,5\}} x_{ij} = 1 &\quad \text{para todo } i \in \{1,\dots,5\} \\
\sum_{i\in\{1,\dots,5\}} x_{ij} = 1 &\quad \text{para todo } j \in \{1,\dots,5\} \\
x_{ij} \in \{0,1\} &\quad \text{para todo } i,j \in \{1,\dots,5\}.
\end{aligned}$$

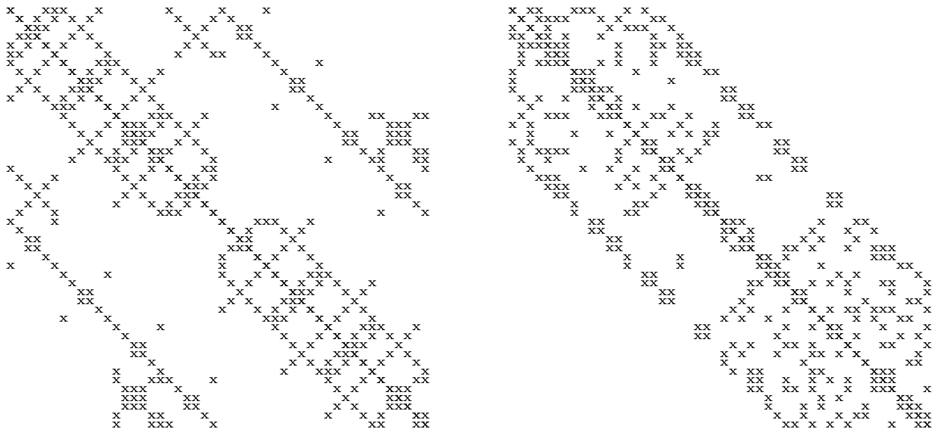
Éste es un ejemplo de un modelo matemático que *no* pertenece a la Programación Lineal Entera. Para presentar un modelo matemático de Programación Lineal Entera basta notar que la posición final de un elemento i cuando se conocen las asignaciones x_{ij} viene definida por $\sum_j jx_{ij}$. En consecuencia, otro modelo es:

$$\min z$$

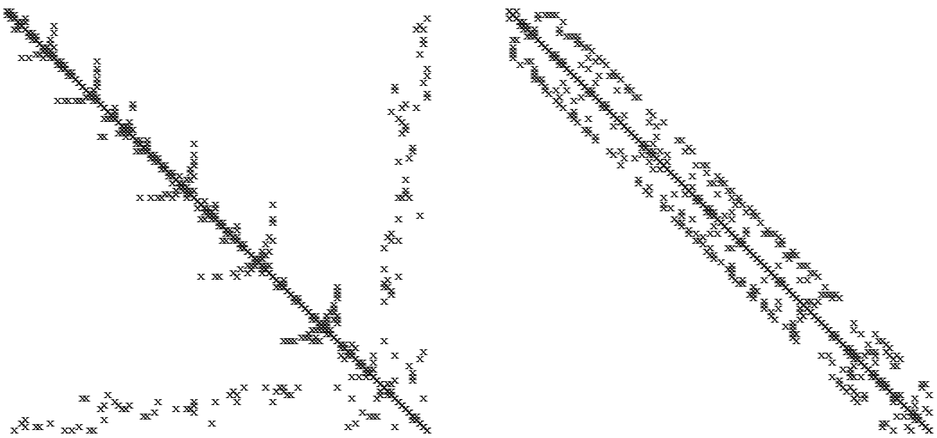
sujeto a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\{1,\dots,5\}} j(x_{ij} - x_{kj}) \le z &\quad \text{para todo } i,k \in \{1,\dots,5\} \ : \ a_{ik} \neq 0 \\
\sum_{j\in\{1,\dots,5\}} x_{ij} = 1 &\quad \text{para todo } i \in \{1,\dots,5\} \\
\sum_{i\in\{1,\dots,5\}} x_{ij} = 1 &\quad \text{para todo } j \in \{1,\dots,5\} \\
x_{ij} \in \{0,1\} &\quad \text{para todo } i,j \in \{1,\dots,5\}.
\end{aligned}$$

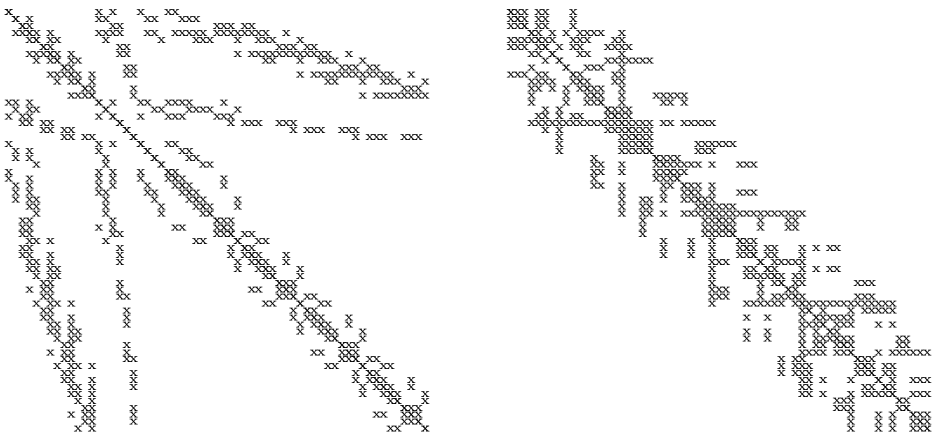
Usando este modelo es posible permutar las filas y columnas de algunas matrices dando lugar a otras matrices análogas con menor banda. La figura 1 muestra tres matrices de la colección *MatrixMarket* en su formato original y en el formato de banda mínima obtenido mediante el modelo matemático anterior.



Matriz “bcsstk01” de la colección *MatrixMarket*: en la izquierda tiene banda 35, en la derecha 16.



Matriz “bcspwr03” de la colección *MatrixMarket*: en la izquierda tiene banda 115, en la derecha 12.



Matriz “can___61” de la colección *MatrixMarket*: en la izquierda tiene banda 50, en la derecha 13.

Figura 1. Tres matrices en formatos original (izquierda) y con banda mínima (derecha).

6. Problema de optimizar una inversión

Problema real

El *C.D. Tenerife* ha puesto sus acciones en bolsa y un inversor ha descubierto la clave para sacar el beneficio que en el terreno de juego el resto de los accionistas no han obtenido en toda la temporada. El funcionamiento es el siguiente: al inicio de la temporada se puede invertir en ella una cantidad cualquiera de x euros, al comenzar la siguiente temporada se debe invertir adicionalmente $x/2$ euros, y luego pasada otra temporada se obtienen $2x$ euros. Lo obtenido en esas acciones al final de una temporada puede ser reinvertido de nuevo en dichas acciones al principio de la siguiente, si se desea. Si en el momento actual el inversor dispone de 100000 euros, ¿cuál debe ser su plan de inversión en tales acciones para disponer de un máximo capital dentro de 6 años?

Modelo matemático

Consideremos la variable x_i asociada a la temporada i-ésima ($i = 1,\ldots,6$), representando el dinero invertido al inicio de dicha temporada. Es claro que, por las condiciones de las acciones, conviene que $x_5 := x_6 := 0$, ya que dichas inversiones no producen beneficios dentro de las 6 temporadas. Entonces, un esquema de inversión es:

Temporadas	**Nueva Inversión**	**Inversión adicional**	**Beneficios**
0	x_0	——	——
1	x_1	$x_0/2$	——
2	x_2	$x_1/2$	$2\,x_0$
3	x_3	$x_2/2$	$2\,x_1$
4	x_4	$x_3/2$	$2\,x_2$
5	——	$x_4/2$	$2\,x_3$
6	——	——	$2\,x_4$

Por tanto, un posible modelo matemático es el definido por las restricciones:

1 $^{\text{er}}$ año: $x_1 + x_0/2 \le (100000 - x_0)$.

2 $^{\text{o}}$ año: $x_2 + x_1/2 \le (100000 + x_0/2 - x_1)$.

3 $^{\text{er}}$ año: $x_3 + x_2/2 \le (100000 + x_0/2 + x_1/2 - x_2)$.

4 $^{\text{o}}$ año: $x_4 + x_3/2 \le (100000 + x_0/2 + x_1/2 + x_2/2 - x_3)$.

5 $^{\text{o}}$ año: $x_4/2 \le (100000 + x_0/2 + x_1/2 + x_2/2 + x_3/2 - x_4)$.

$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$
$$x_3 \ge 0$$
$$x_4 \ge 0,$$

y su función objetivo viene dada por la maximización de la función lineal:

$$6^{\text{o}} \text{ año}: \quad 100000 + x_0/2 + x_1/2 + x_2/2 + x_3/2 + x_4/2,$$

equivalente (como función para maximizar) a $2x_0 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$.

6. Problema de optimizar un divisor de tensión

Problema real

A la hora de diseñar un circuito electrónico hay que tener presente que sus componentes están caracterizadas por diversos parámetros, cada uno de los cuales tiene asociada una cierta *tolerancia*. Por ejemplo, una resistencia de 48 ohmios puede tener una tolerancia de $\varepsilon = \pm 10\%$, debido a temperatura, tiempo en uso, etc. Al valor dado por el fabricante del componente (en el ejemplo, el número 48) lo llamaremos valor *centrado*. Las tolerancias también suelen venir dadas por el fabricante. Es importante tener presente estas tolerancias al tiempo de diseñar un circuito, y no sólo los valores centrados, ya que ellas nos permitirán controlar mejor los límites bajo los cuales el circuito se mantiene operativo, y en consecuencia optimizar el rendimiento del mismo.

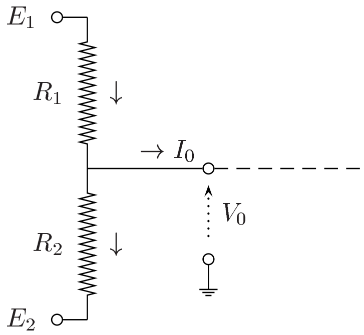


Figura 2. Divisor de tensión.

Consideremos el divisor de tensión de la figura 2. En él se asumen dos generadores de tensión, cada uno de los cuales produce una fuerza electromotriz de E_1 y E_2 voltios, respectivamente. Asumiremos que $E_1 > E_2$ para que el trozo de circuito representado en la figura mueva corriente en el sentido indicado por las flechas. También se asumen conocidas las tolerancias asociadas a dichos potenciales, es decir, se asumen dados valores mínimos E_1^-, E_2^- y máximos E_1^+, E_2^+ para E_1, E_2, respectivamente. Se desea determinar los valores centrados de las resistencias R_1 y R_2 de manera que la impedancia resistiva del divisor de tensión sea mínima y el potencial de salida V_0 se mantenga siempre dentro de un intervalo predeterminado $[V_0^{\min}, V_0^{\max}]$ cuando la corriente I_0 que se desea sacar del divisor (al conectar algún componente adicional) está entre un mínimo igual a $I_0^{\min}$ y un máximo igual a $I_0^{\max}$. Se asumen conocidas las tolerancias que tendrán las resistencias y que $E_1^- \geq V_0^{\max} \geq V_0^{\min} \geq E_2^+$.

Modelo matemático

La impedancia resistiva total del divisor viene dada por el valor:

$$R_0 := \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

ya que las dos resistencias están colocadas en paralelo. A fin de obtener un modelo lineal en las variables (las resistencias), conviene trabajar con las admitancias asociadas, es decir, con los valores

$$G_i := 1/R_i \text{ para todo } i \in \{0,1,2\}.$$

Con esta notación la admitancia total del divisor es $G_0 := G_1 + G_2$. Representemos con $+$ y $-$ el mayor y menor valor, respectivamente, del valor de cada característica del circuito al considerar su tolerancia.

El objetivo del problema propuesto equivale a minimizar el mayor valor R_0^+ que puede alcanzar la impedancia, o alternativamente a maximizar el menor valor que puede alcanzar su admitancia $G_0^- = G_1^- + G_2^-$. Si denotamos por $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$ los valores centrados de las admitancias G_1 y G_2, respectivamente, es decir, valores tales que $G_1^- := (1-\varepsilon_1)\overline{G}_1$ y $G_2^- := (1-\varepsilon_2)\overline{G}_2$ para ε_1 y ε_2 dos tolerancias conocidas, entonces el objetivo es:

$$\max \qquad (1-\varepsilon_1)\overline{G}_1 + (1-\varepsilon_2)\overline{G}_2 \qquad (1)$$

Para expresar las restricciones sobre las variables $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$, observemos que

$$V_0 = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 - I_0}{G_1 + G_2}.$$

Esto es fácilmente deducible mediante la figura 3, donde se representa el mismo circuito con fuentes de intensidad (la figura 2 dio una representación del circuito con fuentes de voltaje).

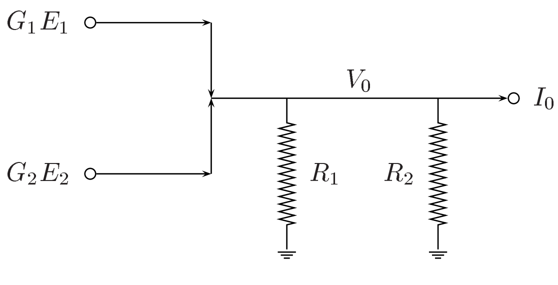


Figura 3. Circuito equivalente con fuentes de intensidad.

Nótese que de esta representación alternativa se deduce que, si mantenemos fija R_2, V_0 aumenta cuando R_1 disminuye, es decir, cuando G_1 aumenta. En efecto, analíticamente también se deduce esta misma conclusión observando que la derivada parcial de V_0 respecto de G_1 es:

$$\frac{\partial V_0}{\partial G_1} = \frac{G_2(E_1 - E_2) + I_0}{(G_1 + G_2)^2} > 0.$$

De igual forma, V_0 aumenta cuando G_1 se mantiene y G_2 disminuye. Consecuentemente, V_0 asumirá su menor valor posible (que se desea sea no inferior a $V_0^{\min}$) cuando G_1 asuma su menor valor G_1^-, G_2 asuma su mayor valor G_2^+, y la corriente que se extraiga I_0 sea $I_0^{\max}$. De este modo la restricción $V_0 \geq V_0^{\min}$ equivale a imponer

$$\frac{E_1^- G_1^- + E_2^- G_2^+ - I_0^{\max}}{G_1^- + G_2^+} \geq V_0^{\min},$$

o, alternativamente,

$$(1-\varepsilon_1)(E_1^- - V_0^{\min})\overline{G}_1 + (1+\varepsilon_2)(E_2^- - V_0^{\min})\overline{G}_2 \geq I_0^{\max}. \tag{2}$$

Análogamente la restricción $V_0 \leq V_0^{\max}$ equivale a imponer

$$(1+\varepsilon_1)(E_1^+ - V_0^{\max})\overline{G}_1 + (1-\varepsilon_2)(E_2^+ - V_0^{\max})\overline{G}_2 \leq I_0^{\min}. \tag{3}$$

La unión de las expresiones (1), (2) y (3), junto con la no negatividad de las variables $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$, configuran un modelo matemático de Programación Lineal.

8. Problema de descubrir datos ocultos

Problema real

Supongamos que el Instituto Nacional de Estadística publica la tabla de datos recogida como tabla 2 con distintos gastos medios de diversos colectivos de una región. Nótese que se dan tanto datos concretos como sumas marginales y totales. Sin embargo, algunos datos se consideran confidenciales, ya que su publicación revelaría información privada. Por ejemplo, se considera que el dato referente al gasto medio en "vicios" de los "obispos" de una región es información confidencial, porque en dicha región sólo hay 1 obispo y, por ello, su publicación estaría revelando información de un individuo con nombre y apellidos conocidos. No ocurre igual con otros colectivos porque tienen más miembros. No obstante, algunos deben igualmente ser suprimidos para proteger el caso anterior. Los datos suprimidos son los que aparecen marcados con asterisco. Si sólo sabemos que ninguno de los datos ocultos puede ser negativo, ¿cuál es el rango más estrecho de valores que esta tabla revelará a un posible *curioso* sobre el gasto del obispo en vicios?

	policía	**profesor**	**maestro**	**vigilante**	**obispo**	**estudiante**	**TOTAL**
lectura	5	345	130	15	212	105	812
vicios	52	*	212	234	*	234	953
gimnasia	432	*	45	*	7	32	726
ropa	34	90	85	*	*	52	271
TOTAL	523	576	472	447	321	423	2762

Tabla 2. Gastos de diversos colectivos según distintos conceptos.

Modelo matemático

Consideremos una variable x_{ij} asociada a cada celda (es decir, a cada fila i y a cada columna j) representando el verdadero valor en la tabla. Es claro que las variables no son independientes entre sí, sino que están atadas por ecuaciones: una por cada fila y por cada columna. Así cualquier tabla de valores posibles para esta tabla debe cumplir:

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16} &= x_{17} \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26} &= x_{27} \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36} &= x_{37} \\
x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46} &= x_{47} \\
x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56} &= x_{57} \\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &= x_{51} \\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &= x_{52} \\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &= x_{53} \\
x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &= x_{54} \\
x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45} &= x_{55} \\
x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46} &= x_{56} \\
x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47} &= x_{57} \\
x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{56}, x_{57} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Además hay variables que en realidad son parámetros (aquellas asociadas a celdas cuyos verdaderos valores serán publicados) y hay otras de las que sólo sabemos que son no negativas. Por ello, el conjunto de todas las posibilidades que además son compatibles con la tabla publicada cumplirán:

$$\begin{aligned}
x_{22}+x_{25} &= 221 \\
x_{32}+x_{34} &= 210 \\
x_{44}+x_{45} &= 10 \\
x_{22}+x_{32} &= 141 \\
x_{34}+x_{44} &= 198 \\
x_{25}+x_{45} &= 102 \\
x_{22}, x_{25}, x_{32}, x_{34}, x_{44}, x_{45} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Ahora el problema planteado consiste en resolver dos problemas lineales, minimizando y maximizando la variable x_{25}, respectivamente. Ambos valores óptimos definen el rango dentro del cual debe estar el valor no publicado de la celda en fila 2 y columna 5.
Este tipo de problemas se llama *problema del curioso*, y es particularmente relevante en el control de la privacidad durante la publicación de tablas estadísticas. En este contexto aparecen numerosos problemas diferentes de optimización, como el que se plantea un instituto de estadística cuando desea encontrar las celdas que no debe publicar en una tabla estadística para asegurar ciertos niveles de protección en algunas celdas consideradas “sensibles”.

9. Problema de redondeos en una tabla

Problema real

Supongamos que el anterior Instituto Nacional de Estadística dispone de la tabla con totales marginales que se muestra como tabla 3, y desea publicarla tras redondear cada valor numérico fraccionario a su entero por exceso o por defecto. Ahora bien, no se admiten cualesquiera redondeos, sino que deben ser tales que en la tabla redondeada se mantengan las mismas relaciones de suma entre las celdas internas y marginales que en la tabla original. Las tablas 4 y 5 son dos posibles tablas redondeadas para la tabla 3 original. En caso de haber varias posibles tablas redondeadas correctas, el Instituto Nacional de Estadística desearía una que minimice la suma de las diferencias entre los valores redondeados y los valores originales. Plantear un modelo matemático para resolver el problema.

	hombre	**mujer**	**TOTAL**
infantil	1,666666	2,666666	4,333332
adulto	2,000000	4,750000	6,750000
anciano	1,250000	4,250000	5,500000
TOTAL	4,916666	11,666666	16,583332

Tabla 3. Tabla a redondear.

	hombre	**mujer**	**TOTAL**
infantil	2	3	5
adulto	2	5	7
anciano	1	4	5
TOTAL	5	12	17

	hombre	**mujer**	**TOTAL**
infantil	2	2	4
adulto	2	4	6
anciano	1	5	6
TOTAL	5	11	16

Tablas 4 y 5. Posibles tablas redondeadas.

Modelo matemático

Consideremos una variable decisional x_{ij} asociada con la celda (interna o marginal) de la tabla en la fila i y columna j, representando

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el redondeo en la celda } (i,j) \text{ es por exceso} \\ 0 & \text{si el redondeo en la celda } (i,j) \text{ es por defecto.} \end{cases}$$

Entonces, toda solución al problema puede identificarse con valores para las variables cumpliendo:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{primera fila}: & (1+x_{11})+(2+x_{12}) & = & (4+x_{13}) \\
\text{segunda fila}: & (2)+(4+x_{22}) & = & (6+x_{23}) \\
\text{tercera fila}: & (1+x_{31})+(4+x_{32}) & = & (5+x_{33}) \\
\text{cuarta fila}: & (4+x_{41})+(11+x_{42}) & = & (16+x_{43}) \\
\text{primera columna}: & (1+x_{11})+(2)+(1+x_{31}) & = & (4+x_{41}) \\
\text{segunda columna}: & (2+x_{12})+(4+x_{22})+(4+x_{32}) & = & (11+x_{42}) \\
\text{tercera columna}: & (4+x_{13})+(6+x_{23})+(5+x_{33}) & = & (16+x_{43}) \\
\text{integrabilidad}: & x_{11},x_{12},x_{13},x_{22},x_{23},x_{31},x_{33} & \in & \{0,1\},
\end{array}
$$

y la función objetivo consiste en minimizar, para cada celda, la contribución del redondeo considerado, es decir:

$$
\begin{gathered}
0,666666(1-x_{11})+0,333334x_{11}+0,666666(1-x_{12})+0,333334x_{12}+ \\
0,333332(1-x_{13})+0,666668x_{13}+0,75(1-x_{22})+0,25x_{22}+0,75(1-x_{23})+ \\
0,25x_{23}+0,25(1-x_{31})+0,75x_{31}+0,25(1-x_{32})+0,75x_{32}+0,5(1-x_{33})+0,5x_{33}+ \\
0,916666(1-x_{41})+0,083334x_{41}+0,666666(1-x_{42})+ \\
0,333334x_{42}+0,583332(1-x_{43})+0,4166668x_{43}.
\end{gathered}
$$

Puede demostrarse que cuando la tabla original es de tipo bidimensional la condición de integrabilidad

$$x_{ij} \in \{0,1\} \text{ para toda celda } (i,j)$$

puede sustituirse simplemente por

$$0 \le x_{ij} \le 1 \text{ para toda celda } (i,j),$$

con lo que el modelo propuesto pertenece a la Programación Lineal y además tiene siempre una solución óptima entera.

Bibliografía

A.V. Aho, J.E. Hopcroft, J.D. Ullman: *Data Structures and Algorithms*. Addison-Wesley, Reading (Massachusetts), 1983.

M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, H.D. Sherali: *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, New York, 1990.

V. Chvátal: *Linear Programming*. Freedman, New York, 1983.

W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, A. Schrijver: *Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York, 1998.

G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey: *Integer and Combinatorial Optimization.* John Wiley & Sons, New York, 1988.

C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz: *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice-Hall, New Jersey, 1982.

J.J. Salazar: *Programación Matemática.* Díaz de Santos, Madrid, 2001.

H.A. Taha: *Investigación de Operaciones, una introducción.* Prentice Hall, México, 1998.

H.P. Williams: *Model Building in Mathematical Programming.* John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

L.A. Wolsey: *Integer Programming.* John Wiley & Sons, New York, 1998.

En Internet

http://neos.mcs.anl.gov
NEOS Server for Optimization
Servidor web sobre Optimización.

http://www.caam.rice.edu/~mathprog
MPS
Mathematical Programming Society.

http://www.euro-online.org
EURO
Asociación de las Sociedades Europeas de Investigación Operativa.

http://www.informs.org
INFORMS Online
Institute for Operations Research and the Management Sciences.

http://mat.gsia.cmu.edu
Michael Trick's Operations Research Page

http://www.dash.co.uk
Dash Optimization - Home of Xpress-MP optimisation software
Software comercial para Optimización.

http://www.lindo.com
LINDO Systems
Software comercial para Optimización.

http://www.ilog.com/products/cplex
ILOG CPLEX
Software comercial para Programación Matemática.