

## ***Física y Matemáticas***



*Daniel Alonso Ramírez*

Profesor Titular de Física Aplicada  
Departamento de Física Fundamental y Experimental, Electrónica y  
Sistemas  
Universidad de La Laguna

<http://eru.dfis.ull.es>

### ***Resumen***

En este seminario se discutirán algunas relaciones que existen entre la Física y las Matemáticas a través de algunos ejemplos en el contexto de la Física y el papel de las Matemáticas en su desarrollo y formalización.

En el estadio inicial de una teoría física el papel de las Matemáticas es, fundamentalmente, el de un lenguaje, aquél en el que se expresan las ideas e intuiciones del científico. En un estadio posterior, la teoría necesita de una mayor formalización y por tanto de un mayor rigor en la definición de las hipótesis de partida y su ulterior desarrollo. En este punto el carácter generativo de las Matemáticas pasa a un primer plano, ampliando las capacidades de la teoría desde el punto de vista metodológico y fundamental.

El paso desde una teoría primigenia hasta su completa axiomatización en unos cuantos elementos requiere de las Matemáticas. No obstante, sería algo radical pensar que las Matemáticas son un lenguaje que contiene todo lo que la Física ha descubierto, de la misma forma que algún diccionario histórico de nuestra lengua contiene seguramente todas las palabras que están en el Quijote, pero no contiene *El Quijote*.

Nos interesaremos en particular en algunos sistemas físicos cuánticos, algunos mecánico-estadísticos y algunos fenómenos no lineales, intentando poner énfasis en la relación que existe entre la definición de las nociones físicas y los objetos matemáticos asociados a dichas nociones.

### ***1. Introducción***

Si a cualquier científico se le pregunta por la relación de las Matemáticas con el campo científico en el que ejerce, encontrará multitud de elementos matemáticos que emplea con asiduidad, de modo que afirmaría con facilidad que las Matemáticas son, en algún sentido, importantes en su área. Se podría elegir cualquier parcela de la ciencia, acudir a las publicaciones donde se comunican los resultados más novedosos del área y se vería cómo todo está de una forma u otra lleno de fórmulas. Por supuesto, en algunas áreas el número de fórmulas es mayor que en otras, pero en todas encontraríamos expresiones matemáticas. El por qué esto es así tiene una respuesta simple pero ampliamente aceptada. Las Matemáticas son un lenguaje, y las ciencias expresadas en ese lenguaje resultan más comprensibles, más útiles, más potentes. Ahora bien, el por qué las Matemáticas resultan ser el lenguaje apropiado en el que *hablar* en ciencia no es en modo alguno una cuestión sencilla de responder.

Decía E.P. Wigner, un conocido físico, que no entendía *el irracional éxito de las Matemáticas en la descripción de la Naturaleza*, y si se piensa en ello uno no puede sino maravillarse ante los hechos. En la historia de la Física se tienen ejemplos de dos situaciones típicas. La primera es la de Matemáticas motivadas por la necesidad de dar una descripción de ciertos fenómenos físicos. Un ejemplo clásico es el desarrollo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton para dar una descripción de los fenómenos gravitatorios. En este sentido, una disciplina de las Matemáticas se crea y desarrolla motivada por la Física. No obstante, también se dan casos en el sentido opuesto. En el caso de la relatividad general, A. Einstein encontró en las Matemáticas de la Geometría Diferencial de Riemann, Levi-Civita y otros el lenguaje más apropiado para expresar la relatividad general. El primer caso podría parecer menos sorprendente que el segundo; a fin de cuentas, se desarrollan unas matemáticas que se ajusten a la descripción de una realidad física tangible, mientras que en el segundo la teoría matemática estaba allí antes de que los físicos tuviesen noticias de que existían fenómenos que podían ser expresados por ella.

No obstante, un trabajo en Física no se reduce a su expresión matemática. De hecho, en la génesis de una teoría física a menudo se prescinde de elementos que el rigor matemático exigiría considerar y se emplean objetos que adolecen de una definición matemática precisa. Además, con frecuencia se desprecian cantidades que a priori habría que considerar.

En un estadio inicial las Matemáticas cumplen la función del lenguaje, y la Física se expresa en términos matemáticos. En un estadio posterior, las Matemáticas pasan a jugar un papel más importante en la formulación más rigurosa de la teoría. Así, una vez que las ecuaciones están escritas pueden desarrollarse resultados nuevos. Sin embargo, no se puede deducir toda la Física desde un conjunto de ecuaciones. La manipulación matemática de estas ecuaciones, prescindiendo de su origen y significado, puede llevar a resultados incorrectos. Citando a Alain Connes, un matemático dedicado al Análisis y la Geometría y galardonado con la medalla Field, *decir que las Matemáticas son un lenguaje que contiene exactamente lo que la física ha descubierto es algo exagerado*.

Es el flujo en ambas direcciones, entre Matemáticas y Física, lo que es fructífero y en gran medida el objeto de nuestro seminario. Una conclusión simple puede ser que, de algún modo, las Matemáticas son un elemento crucial en el desarrollo de la ciencia. Una discusión general de todos los aspectos relevantes está fuera de los objetivos que aquí perseguimos. Lo que nos proponemos hacer es explorar a través de problemas concretos la relación que existe entre algún dominio de la Física y las Matemáticas que se emplean.

En nuestra presentación vamos a realizar un pequeño viaje. Para realizar este viaje elegiremos un indicador. En una presentación de hechos históricos elegiríamos el tiempo, el cronómetro comenzaría en algún lugar de la historia y emprenderíamos el vuelo. En nuestro caso, aunque puede ser una opción el elegir el tiempo, prefiero elegir otro. El ordenador que estoy empleando para transcribir este seminario tiene unos cuarenta centímetros de ancho, unos treinta de profundidad y unos dos centímetros de altura<sup>1</sup>. Lo que está al alcance de mi vista está en las mismas escalas *espaciales* que mi ordenador. Si de alguna forma pudiese reducir mis dimensiones físicas en unos cien millones de veces (¡manteniendo mi integridad física!) las cosas cambiarían bastante: el universo a esa escala es distinto, es el reino de los átomos, electrones, fotones y otras muchas partículas. Si continuase *menguando* otros ocho órdenes de magnitud, las cosas volverían a cambiar: estaría en el mundo de los núcleos atómicos. Podríamos seguir descendiendo hasta que nuestra regla tuviera como unidad fundamental segmentos de talla del orden de  $10^{-33}$  centímetros. Pero no podría decir mucho sobre lo que

---

<sup>1</sup> ¡Quizás en el futuro tales dimensiones se consideren mastodónticas para un ordenador!

ocurre: no tenemos una teoría que nos diga lo que pasa.

Por supuesto, se podría realizar un viaje inverso, creciente en tamaño, y nos adentraríamos en el universo a gran escala. En cada caso elegiremos una teoría física que describa algún fenómeno que nos interese.

Un viaje así es necesariamente incompleto, de modo que sólo visitaremos tres estaciones. La primera se refiere a lo que tiene nuestras dimensiones, nuestro *mundo*. La segunda será el mundo microscópico, donde los átomos y electrones son responsables de gran parte de los fenómenos físicos que tienen lugar. Y como último ejemplo nos acercaremos al comportamiento de la luz en la vecindad de agujeros negros.

En todos los casos hay un primer estadio en el que la teoría física, aunque escrita en lenguaje matemático poco riguroso, está basada en hipótesis que son difíciles de precisar en un principio. A posteriori aparece una mayor formalización y rigor, siendo en este punto donde el poder generativo de las Matemáticas permite una consolidación y clarificación de las hipótesis, dando lugar a extensiones de la teoría. Las Matemáticas involucradas abarcan el Cálculo Diferencial más elemental, la Teoría de Operadores Lineales en espacios de Hilbert y extensiones a Tripletes de Gelfand, Análisis Asintótico, Geometría Diferencial, Integración Funcional, Procesos Estocásticos y Geometría Fractal, entre otras.

**1.1. El mundo microscópico: El reino de la mecánica cuántica.** A medida que nuestras habilidades y técnicas nos lo han permitido hemos accedido a la observación de fenómenos que tienen su explicación en el comportamiento de la materia a escalas muy pequeñas respecto a nuestras escalas cotidianas. La descripción física para este mundo microscópico se apoya en la Mecánica Cuántica. En el contexto de la Mecánica Cuántica, la descripción de un conjunto de  $N$  partículas es algo diferente a lo que se haría si las partículas se moviesen acorde a las leyes de Newton. El objeto de partida es una función compleja  $\Psi$  que depende de  $N$  coordenadas y el tiempo  $t$ , es decir

$$(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \rightarrow \Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N; t) \in \mathbb{C}.$$

Con la información contenida en  $\Psi$  se puede obtener el valor de cualquier observable físico medible en un laboratorio tras un experimento reproducible. En el lenguaje de la Mecánica Cuántica  $\Psi$  se llama *función de ondas*. La evolución temporal de la función de ondas está dada en el dominio no relativista por la ecuación de Schrödinger. Por lo tanto, si se conoce la función de ondas en un instante, sus condiciones de contorno y la solución de la ecuación de Schrödinger, se ha resuelto el problema cuántico planteado. La elaboración de la teoría se hace en lenguaje matemático poco riguroso, aunque su formalización posterior sí que ha requerido una elaboración rigurosa desde el punto de vista matemático. No obstante, existen todavía objetos en la mecánica cuántica que se emplean por parte de los físicos con asiduidad, de los cuales todavía no se tiene una idea clara de a qué objeto matemático corresponden. También abordaremos algunos aspectos de la teoría cuántica de actualidad, como es el fenómeno de *teleportación cuántica*.

Nos centraremos en la discusión de la física de algunos sistemas cuánticos en los que hay una conexión profunda entre algunos objetos matemáticos y físicos. En particular, nos interesaremos en los sistemas cuánticos en régimen semiclásico y sistemas cuánticos en los que aparecen fases geométricas. De nuevo enfatizaremos las Matemáticas que aquí juegan un papel importante, como las propias del Análisis Funcional, Teoría de Números, Análisis Asintótico y Geometría Diferencial.

### 1.2. El mundo macroscópico: Sistemas físicos con un gran número de partículas.

En la terminología habitual de un físico el término *sistema macroscópico* se refiere a sistemas compuestos por un gran número de partículas, típicamente del orden de  $10^{23}$  partículas, y la termodinámica se ocupa del estudio de dichos sistemas. El primer paso para estudiar el comportamiento de un sistema físico es conocer cómo se comportan sus constituyentes. Si nos referimos a los constituyentes de un sistema microscópico tenemos la Mecánica Cuántica como la teoría más refinada para describir la dinámica de las partículas. En cierto límite, que llamamos *límite clásico*<sup>2</sup>, las predicciones de la Mecánica Cuántica coinciden con las predicciones de la Mecánica de Newton, que llamamos Mecánica Clásica. Dependiendo de las condiciones físicas que se consideren podremos emplear bien la Mecánica Cuántica, bien la Mecánica Clásica. Por el momento vamos a pensar que las partículas obedecen las leyes de Newton. Las conclusiones que extraigamos en este contexto son fácilmente extrapolables al caso cuántico.

Cualquier magnitud física medible en un experimento reproducible se puede calcular, en principio, si se conocen las posiciones  $\mathbf{q}_i$  y momentos  $\mathbf{p}_i$  de todas y cada una de las partículas del sistema. Si el sistema tiene  $N$  partículas y está confinado en un espacio tridimensional, la especificación de todas las posiciones y velocidades corresponde a conocer los  $6N$  números,  $3N$  de los cuales corresponden a posiciones y los restantes  $3N$  son momentos. Cuando esta información es especificada se dice que se conoce el *estado* del sistema, es decir:

$$\text{Estado del sistema} \iff \mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N), \mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N).$$

El estado del sistema hay que conocerlo en todo instante, y por lo tanto  $(\mathbf{Q}(t), \mathbf{P}(t))$  es función del tiempo. La dependencia en el tiempo del estado del sistema implica que se debe conocer la dinámica de las partículas. En nuestro caso, las leyes dinámicas son las de Newton.

Para aplicar las leyes de Newton necesitamos conocer cuáles son las fuerzas que actúan sobre el sistema. De forma breve, necesitamos conocer cómo *interaccionan* las partículas entre sí y con su entorno. Supongamos que este es un conocimiento que tenemos, bien obtenido por resultados experimentales o bien porque hemos elaborado un modelo. Con todo esto, al aplicar las leyes de Newton llegamos a la conclusión de que el conocimiento del estado del sistema pasa por resolver un sistema de  $6N$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en general no lineales. La resolución de dicho sistema necesita además el conocimiento del estado del sistema en un instante dado, es decir, se necesita conocer todas las posiciones y momentos de las partículas en el instante inicial.

En estos términos, el problema está formalmente planteado; pero pensemos un poco en la situación que se tiene. Primero hemos de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, que son no lineales para la mayoría de sistemas. Bueno, esto pasa por obtener soluciones bien exactas o aproximadas, y una vez que esto se ha conseguido hemos de sustituir los datos iniciales. También podría optarse por resolver numéricamente las ecuaciones. Vamos a estimar cuánto tiempo podríamos emplear en tener un estado del sistema a partir de los datos iniciales.

<sup>2</sup> El tratamiento matemático de dicho límite en cada sistema requiere tener en cuenta sus condiciones. En el caso de un sistema mecánico cuántico el límite clásico corresponde a considerar que las acciones típicas del sistema son grandes comparadas con la constante de Planck. Formalmente esto equivale a considerar la constante de Planck como un parámetro pequeño. En los sistemas mecánico-estadísticos el límite clásico consiste en considerar que la temperatura es lo suficientemente alta y la densidad suficientemente baja.

En principio se tienen  $10^{23}$  ecuaciones diferenciales acopladas, y supongamos que se tienen las soluciones en términos de funciones conocidas. Si se quiere hacer una predicción, se han de sustituir los datos iniciales y evaluar el valor de las funciones para éstos. Supongamos que deseamos dar un estado posterior al estado inicial. Por simplicidad vamos a pensar que las soluciones son todas funciones polinómicas de sus argumentos, por ejemplo funciones cuadráticas. En ese caso se tienen unas  $N^2$  operaciones que efectuar. Para hacer estos cálculos podríamos emplear un ordenador que hiciese por ejemplo  $10^{12}$  operaciones por segundo. Con estos datos es sencillo concluir que se tendría la respuesta pasados unos  $10^{28}$  años. ¡No creo que podamos esperar tanto! Eso sin contar con el problema de almacenamiento que supone registrar tal cantidad de números. Si cada dato inicial se representa por un número en punto flotante, se trataría de un espacio de unos  $4^{14}$  gigabytes de memoria. ¡Sin duda un trabajo ingente que además llevaría un tiempo enorme!... al menos por el momento. Todo esto sin contar con la dificultad de conocer el estado inicial.

Se debe a Boltzmann, Maxwell, Gibbs y otros el desarrollo de la Mecánica Estadística, la cual pasa por evitar la solución del problema tal y como lo hemos planteado hasta ahora. Una de las primeras observaciones en el contexto de la Mecánica Clásica fue la constatación de que existen funciones de los estados de un sistema  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \rightarrow C(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \in \mathbb{R}$  que son constantes, es decir, si  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  y  $(\mathbf{Q}', \mathbf{P}')$  son dos estados del sistema a dos tiempos distintos, se tiene  $C(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = C(\mathbf{Q}', \mathbf{P}')$ . A las funciones  $C$  se las denomina *constantes de movimiento*. La observación de los padres de la Mecánica Estadística es que las propiedades macroscópicas de un sistema, su comportamiento termodinámico, son consecuencia de unas pocas constantes de movimiento, en realidad un máximo de siete. El resto de variables, hasta un número de  $6N - 7$ , se pueden dejar de considerar si se adopta una descripción estadística de los fenómenos que ocurren.

A lo largo de este seminario se intentará explicar la formulación del problema y su evolución desde su estadio más elemental, en el que las Matemáticas se emplean sólo en la expresión de la teoría, hasta alcanzar un estadio más avanzado en el que el carácter generativo de las Matemáticas hacen de una parcela de la Física un dominio más riguroso y con mayor solidez para avanzar. Nuestro interés pasará por poner en evidencia cómo los fenómenos no lineales que aparecen quedan descritos por objetos matemáticos elaborados en el contexto del Análisis de Operadores y su espectro, Teoría Ergódica y Teoría de la Medida.

**1.3. Agujeros negros.** Como última estación nos detendremos en analizar el comportamiento de la luz en la vecindad de agujeros negros, en este caso en la vecindad de un sistema binario de agujeros negros. La dinámica de los fotones en la vecindad de dicho sistema comienza por fijar la geometría del espacio-tiempo en su entorno. Una vez se tiene la mencionada métrica, la dinámica consiste en el cálculo de las geodésicas en ese espacio-tiempo. Nos detendremos en la descripción de la dinámica de los fotones en dicho sistema, con especial énfasis en cómo las matemáticas desarrolladas en el contexto de la dinámica no lineal son apropiadas para describir los procesos físicos de colisión de fotones con agujeros negros.

Por supuesto, los dominios de la Física en los que las Matemáticas están involucradas en mayor o menor medida son mucho más amplios que los que podemos abordar aquí. Queda al lector iniciar su propia exploración. ¡La diversión está garantizada!

## 2. Mundo clásico

**2.1. Sistemas clásicos y su dinámica. Sistemas caóticos.** Comenzaremos por la descripción clásica de la mecánica de los sistemas de partículas, basada en las leyes de Newton. Es conocido que la dinámica de los objetos materiales está gobernada en última instancia por la mecánica cuántica. No obstante, en ciertas condiciones la descripción que dan ambas ramas de la Física es prácticamente la misma, por lo que emplear la mecánica clásica es lícito.

En el contexto clásico, un sistema de partículas está caracterizado por las posiciones  $\mathbf{Q}$  y los momentos  $\mathbf{P}$  de todas las partículas en un instante de tiempo  $t$ , consideradas éstas como entes puntuales. La evolución dinámica de los momentos y las coordenadas está dada por las leyes de Newton. En una formulación equivalente a la de Newton<sup>3</sup>, llamada *de Hamilton*, las ecuaciones de movimiento de posiciones y momentos se escriben como

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}},$$

donde  $H = H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  es una función que depende de las coordenadas y los momentos [11]. Eventualmente puede depender del tiempo, pero por simplicidad vamos a restringirnos al caso de sistemas conservativos. La función  $H$  se denomina *hamiltoniana* y equivale a la energía del sistema. Además, juega un papel muy importante en el paso a una descripción mecánico-cuántica del sistema. Para resolver el movimiento hay que integrar las ecuaciones de Hamilton y conocer una condición inicial, por ejemplo disponer de los datos  $\mathbf{Q}(t = 0)$  y  $\mathbf{P}(t = 0)$ .

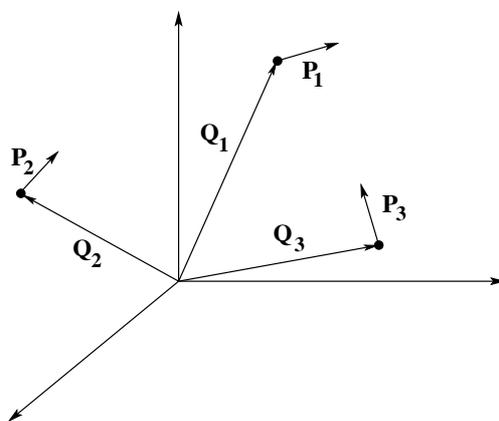


Figura 1. Sistema de partículas y sus coordenadas canónicas.

Si se tiene un sistema de  $N$ -partículas en un espacio tridimensional, se tendría un sistema de  $6N$  ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, y en general no lineales.

<sup>3</sup> Preferimos comenzar por la formulación Hamiltoniana en nuestra presentación. El lector interesado en un desarrollo de los *Principia* de Newton puede encontrar útil la última obra de S. Chandrasekhar *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press (1995).

Una solución del sistema supone una trayectoria que pasa por el punto inicial y traza un gráfico en el espacio de coordenadas y momentos, el *espacio de fases*. Dicha solución es única. Esto es consecuencia de la existencia y unicidad de soluciones para el problema planteado. El concepto de trayectoria en mecánica clásica resulta útil y tiene su reflejo matemático en las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Hamilton. Conocida, pues, la solución, este conocimiento nos permite decir dónde se encuentra el sistema en un instante presente  $t$ , decir dónde estuvo en el pasado y predecir dónde estará en el futuro. Basta seguir la trayectoria solución de nuestro problema.

No obstante, esta afirmación requiere matices que hay que discutir, y para ello vamos a tomar un ejemplo concreto. Supóngase que en un plano se disponen un conjunto de discos en una red regular (ver Figura 2), y sea una partícula puntual que viaja libremente entre discos trazando líneas rectas, tal que cuando alcanza a un disco rebota de forma que la componente de la velocidad en la dirección tangente al punto de contacto con el disco se conserva en la colisión, mientras que la componente de la velocidad en la dirección normal al punto de colisión cambia de signo. Una trayectoria típica podría ser la que se ilustra en la Figura 2.

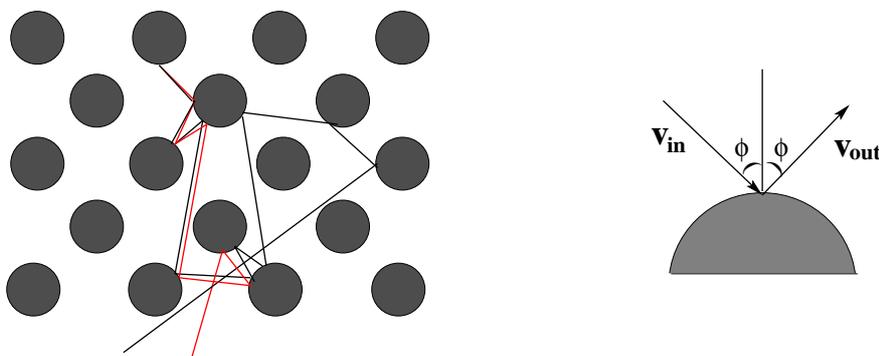


Figura 2. Movimiento de una partícula puntual en un gas de Lorentz.

La trayectoria dibujada representa una de tantas posibles en el sistema una vez dada la posición y momento inicial de la partícula. Vamos a analizar qué ocurre si se considera una trayectoria para la cual la condición inicial difiere ligeramente de la anterior. En ese caso (ver Figura 2) la trayectoria sigue inicialmente un camino muy próximo al de la trayectoria sin perturbar, pero después de algunas colisiones con los discos las dos trayectorias siguen historias diferentes. De hecho, una estimación simple conduce a que si dos condiciones iniciales difieren una de la otra en el  $n$ -ésimo dígito, en  $n$  colisiones las dos trayectorias diferirán en todos los dígitos.

En el ejemplo que nos ocupa las dos trayectorias se separan localmente de modo exponencial, de tal forma que la distancia  $d$  que hay en todo instante entre la trayectoria de referencia y la perturbada va como

$$d \sim e^{\lambda t}.$$

A la cantidad  $\lambda$  se la conoce como *exponente de Liapunov* (ver Figura 3). Un sistema de  $N$  partículas en tres dimensiones posee en principio  $6N$  exponentes de Liapunov. No obstante, si el sistema conserva la energía sólo  $6N - 1$  de ellos son independientes. El máximo

de todos ellos es el que define el ritmo de separación entre trayectorias inicialmente próximas. Las unidades físicas del exponente de Liapunov son *dígitos por segundo* si  $d \sim 10^{\lambda t}$ , *bits por segundo* si  $d \sim 2^{\lambda_{bit} t}$  o *nats por segundo* si  $d \sim e^{\lambda_{nat} t}$ .

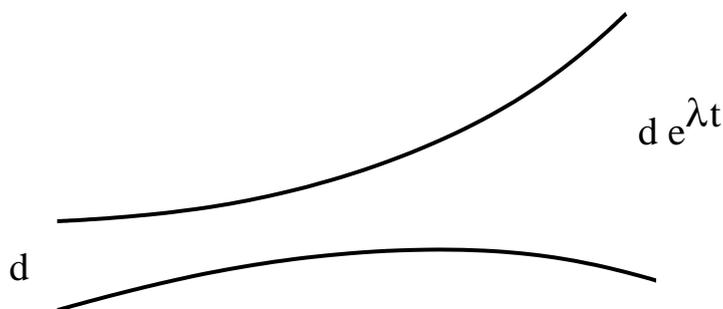


Figura 3. Divergencia de dos trayectorias inicialmente próximas. El gráfico ilustra el concepto de exponente de Liapunov.

Las dimensiones físicas de los exponentes de Liapunov en algunos sistemas se detallan a continuación [7]:

Sistema	$\lambda_{max}$ (dígitos/segundo)
Sistema Solar	$2.8 \cdot 10^{-15}$
Plutón	$7.0 \cdot 10^{-16}$
Oscilaciones químicas caóticas	0.0011
$1 \text{ cm}^3$ de argón a temperatura ambiente	$10^{10}$

De todo lo dicho hasta ahora ya se puede intuir una primera dificultad. Supongamos que hemos resuelto las ecuaciones de movimiento, por ejemplo en términos de funciones conocidas, y además tenemos todos los datos iniciales. Necesariamente estos datos iniciales, como en todo problema físico, los conocemos con cierta precisión, es decir, disponemos de su valor numérico en algún sistema de unidades físicas (por ejemplo, hemos medido posiciones en metros y momentos en metros por segundo y kilogramo). Esos valores estarán sujetos a cierta incertidumbre experimental, es decir, podremos garantizar que son exactos  $n$  dígitos de los datos iniciales, pero los demás son parte del error experimental. Esto tiene como consecuencia que si el sistema que estamos estudiando tiene las mismas características que el ejemplo estudiado con anterioridad, después de cierto tiempo una predicción basada en dos condiciones iniciales equivalentes desde el punto de vista físico (los datos iniciales difieren en el  $(n + 1)$ -ésimo dígito) conducen a predicciones totalmente distintas, *descorrelacionadas*. En Física la condición inicial no es un punto matemático, sino más bien una bola centrada en los datos iniciales con un radio del orden de la incertidumbre experimental. Todos los datos dentro de esa bola son físicamente relevantes. Esta es una de las razones por las que las predicciones atmosféricas actuales tienen una fiabilidad muy corta en el tiempo. A los sistemas que presentan esta *sensibilidad a las condiciones iniciales* se les denomina sistemas *caóticos*. En general, un

sistema clásico se comporta de forma caótica para un conjunto de condiciones iniciales y de forma *regular* para otras. En la Figura 4 se ilustra el espacio de fases típico de un sistema dinámico en el que se aprecian las condiciones iniciales que corresponden a un movimiento irregular y las que corresponden a un movimiento regular.

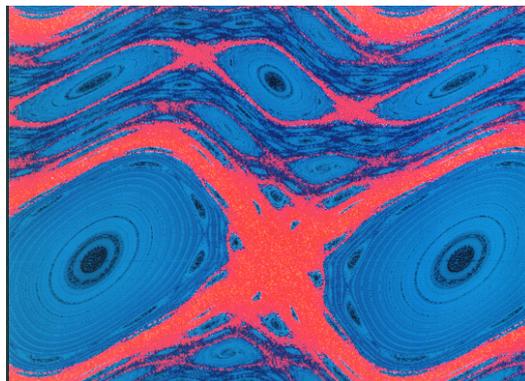


Figura 4. Espacio de fases de la aplicación estándar,  $x_{n+1} = x_n + p_n; p_{n+1} = p_n + K \sin(x_{n+1})$ . Se pueden apreciar claramente las islas de movimiento estable y las zonas de movimiento irregular. Foto extraída del servidor de la Universidad de Maryland [<http://www-chaos.umd.edu/misc/attractorpics.html>].

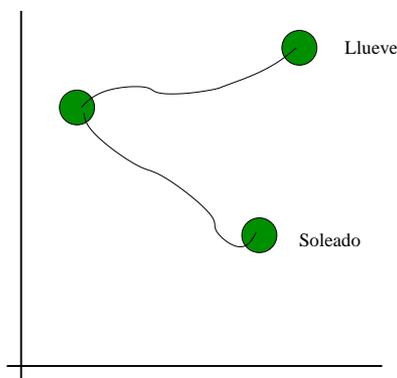


Figura 5. Separación de condiciones iniciales físicamente equivalentes en su evolución temporal.

De todo lo dicho se concluye que para sistemas caóticos el concepto de trayectoria deja de ser útil como herramienta predictiva, aunque esté perfectamente definido desde el punto de vista físico y matemático.

Una descripción alternativa consiste en introducir una función densidad de condiciones iniciales. No nos interesamos en la evolución de una condición inicial individual, sino en la evolución de un conjunto de ellas, distribuidas inicialmente en el espacio de fases acorde a una función  $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t = 0)$ . Esta cantidad, cuando es multiplicada por un elemento de volumen en el

espacio de fases  $d\mathbf{Q}d\mathbf{P}$ , nos da el número de condiciones iniciales contenidas en un volumen elemental  $d\mathbf{Q}d\mathbf{P}$  centrado en  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Si se conociese el valor de la función densidad  $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  en un instante posterior  $t$ , se podría evaluar el *valor medio y momentos superiores* [12] de cualquier variable dinámica  $A(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Por ejemplo, el valor medio de  $A$  en el tiempo sería

$$\langle A \rangle_t = \int d\mathbf{Q}d\mathbf{P} \rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)A(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) / \int d\mathbf{Q}d\mathbf{P} \rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t). \quad (1)$$

Vemos cómo en el contexto clásico aparece una descripción probabilística para realizar predicciones producidas por el grado de desconocimiento del estado inicial del sistema, o la imposibilidad de precisar sin ambigüedad tal estado.

El esquema introducido es el mismo que se emplea en la descripción estadística de los sistemas macroscópicos que discutiremos más adelante.

La evolución de la densidad  $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  es, por supuesto, consecuencia de la evolución inducida en cada condición inicial por las leyes de Newton. La ecuación de movimiento de  $\rho$  es la llamada *ecuación de Liouville* [12],

$$\partial_t \rho = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{P}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{Q}} := \{H, \rho\},$$

donde la última igualdad define el llamado *corchete de Poisson*. Esta ecuación también expresa el hecho de que durante la evolución temporal se tiene que  $d\rho/dt = 0$ , o, lo que es lo mismo, que el volumen fásico se conserva en el tiempo. Este es el contenido del llamado *teorema de Liouville*. Formalmente, la ecuación de Liouville puede escribirse como

$$\partial_t \rho := \hat{L}\rho,$$

que define al *operador de Liouville* o *liouvilliano*  $\hat{L}$  como  $\hat{L}\rho = \{H, \rho\}$ . Se tiene, por lo tanto, una descripción de los sistemas clásicos en términos de funciones definidas en el espacio de fases  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Una integración formal de la ecuación de Liouville nos permite definir el operador de evolución  $\hat{U}^t$  tal que  $\rho(t) = \hat{U}^t \rho(0)$ .

Desde el punto de vista matemático se tiene un espacio de funciones (a definir) en el que las densidades físicas,  $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ , tengan sentido y un operador  $\hat{U}^t$  cuyas propiedades espectrales pueden ser estudiadas.

La teoría espectral del operador  $\hat{U}^t$  se inicia con Koopman y Von Neumann [14, 28]. En el caso de que  $\rho$  pertenezca al espacio de funciones de cuadrado integrable  $\mathcal{L}^2$ , el operador de evolución es unitario y sus autovalores están en el círculo unidad. En el caso de sistemas integrables, como por ejemplo el oscilador armónico<sup>4</sup>, el espectro es discreto y la evolución es cuasiperiódica.

<sup>4</sup> Un sistema es integrable cuando tiene tantas constantes de movimiento como coordenadas  $\mathbf{Q}$ , es decir  $3N$  constantes de movimiento.

En sistemas caóticos que tienen la propiedad llamada de *mezcla*<sup>5</sup>, el espectro clásico presenta componentes continuas en el círculo unidad, lo que tiene importantes consecuencias. Por ejemplo, en este caso las funciones de correlación de observables clásicos decaen en el tiempo hacia un valor constante. La teoría espectral de sistemas dinámicos clásicos [3, 20] es conocida en física como *teoría ergódica*.

Sin embargo, hay situaciones en Física en las que no basta con saber que las cantidades dinámicas decaen o *relajan*, pasado un tiempo, hacia su valor estacionario o de *equilibrio*. Se necesitan detalles de los procesos de relajación. Éstos están contenidos en los tiempos característicos de decaimiento (ver Figura 6). En este sentido, la información contenida en el espectro continuo no es de gran ayuda. Para dar cuenta de estos tiempos característicos y de los detalles de los procesos de relajación, que son de interés en varios contextos físicos, como, por ejemplo, los sistemas alejados del equilibrio, se construye una teoría espectral de  $\hat{U}^t$  que contenga autovalores fuera del círculo unidad. En dicha teoría espectral  $\hat{U}^t$  actúa sobre el espacio de funciones analíticas donde las distribuciones de Schwartz están definidas. En este caso, las funciones densidad pertenecen a un espacio de funciones integrables y su espacio dual es un espacio de distribuciones que actúa sobre funciones suaves. Técnicamente la construcción se denomina *tripleto de Gelfand* [5].

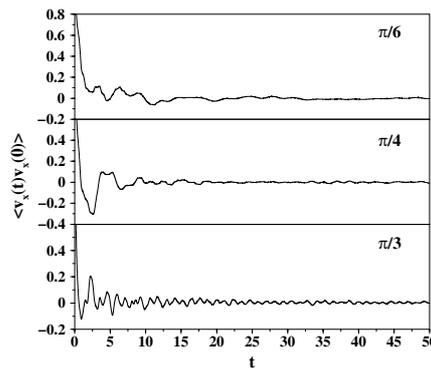


Figura 6. Ilustración del decaimiento típico de una función de correlación.

De hecho, la evolución dinámica de un observable  $A(\mathbf{X})$ , con  $\mathbf{X} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , está dada por

$$\hat{U}^t A(\mathbf{X}) = A(\Phi^t \mathbf{X}) = \int d\mathbf{Y} A(\mathbf{Y}) \delta(\mathbf{Y} - \Phi^t \mathbf{X}),$$

donde  $\mathbf{X}_t = \Phi^t \mathbf{X}$  y  $\delta(z)$  es la distribución de Dirac.

<sup>5</sup> En nuestro contexto, la propiedad de mezcla significa que si se tienen dos funciones dinámicas  $f(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ,  $g(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  y se tiene una medida invariante  $\mu$  definida, en nuestro caso, como

$$d\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = d\mathbf{Q}d\mathbf{P} \rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) / \int d\mathbf{Q}d\mathbf{P} \rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}),$$

se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int d\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) g(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \hat{U}^t f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \int d\mu g(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \int d\mu f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}).$$

En este contexto, los tiempos característicos vienen dados por el espectro de  $\hat{U}^t$ . Si la energía se conserva, se pueden calcular estos autovalores a través de la traza de  $\hat{U}^t$ . En mecánica clásica, para un sistema hiperbólico<sup>6</sup>, la relación entre la traza y el espectro está dada de forma exacta como una suma sobre las órbitas periódicas del sistema (que son todas inestables), de la forma

$$\text{Tr } e^{t\hat{L}} = \sum_{op} T_{op} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\delta(t - rT_{op})}{|\det(1 - M_{op}^r)|}, \quad t > 0,$$

donde  $T_{op}$  es el periodo de la órbita periódica  $op$  y  $M_{op}$  es la matriz que propaga perturbaciones transversales a la órbita periódica (ver Figura 7) y da cuenta por tanto de su estabilidad lineal [7]. Si se denota por  $\Lambda_{op}$  a los autovalores de  $M_{op}$ , se pueden obtener los autovalores de  $\hat{U}^t$  a partir de los ceros de una función zeta, denominada *de Selberg-Smale*, que tiene la forma

$$Z(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{op} \left( 1 - \frac{e^{sT_{op}}}{|\Lambda_{op}| \Lambda_{op}^{k-1}} \right)^k.$$

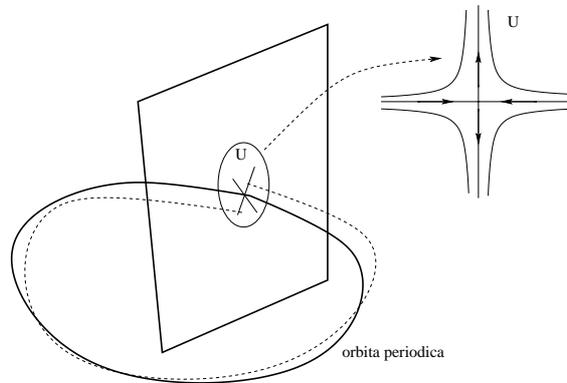


Figura 7. Ilustración del concepto de estabilidad lineal para una órbita periódica. En el caso de una órbita hiperbólica, en las direcciones transversales a la trayectoria el espacio de fases se contrae en algunas direcciones y expande en otras. La contracción y expansión es exponencial.

<sup>6</sup> En un sistema totalmente hiperbólico cada punto del espacio de fases es de tipo hiperbólico, es decir que en dicho punto se cruzan las variedades estables e inestables del sistema, no existiendo variedad central. Por ello, en estos sistemas existen sólo direcciones en las que hay una contracción del espacio en la dirección de las variedades estables y una dilatación en la dirección de las variedades inestables.

En general, se sigue que la evolución del valor medio de un observable está dada por

$$\langle A \rangle_t = \sum_{\alpha=\text{autovalores}} c_\alpha(t) e^{-s_\alpha t}, \tag{2}$$

donde  $c_\alpha(t)$  son funciones que varían suavemente con el tiempo.

En sistemas hiperbólicos el conjunto de órbitas periódicas inestables crece exponencialmente con el periodo. Todas ellas forman un conjunto fractal que se caracteriza a través de su dimensión de Hausdorff [10]. Un ejemplo de algunas trayectorias periódicas en un sistema simple se da en la Figura 8.

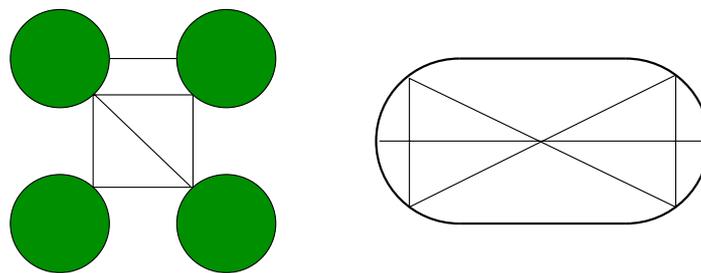


Figura 8. Algunas órbitas periódicas en sistemas simples.

Al espectro de  $\hat{U}^t$  que se ha introducido se le conoce como *resonancias de Pollicott-Ruelle* [18, 19, 22], que en general son números complejos con parte real positiva o cero (ver Figura 9).

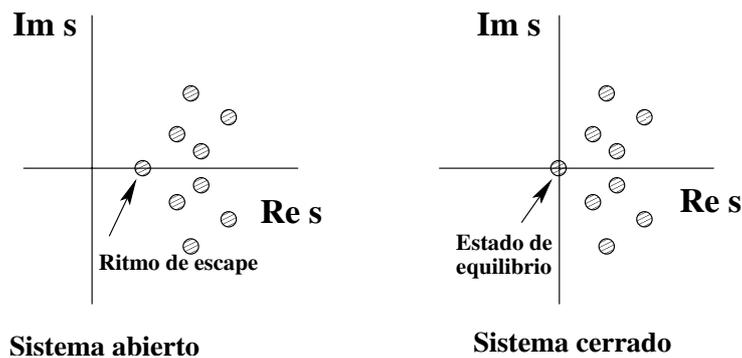


Figura 9. Espectro de resonancias en diversas situaciones.

Una característica importante de estos sistemas es que describen situaciones en las que hay una relajación, alguna situación estacionaria. Esto hace pensar que, en sistemas macroscópicos, quizás la relajación pueda tener su origen en una dinámica microscópica totalmente caótica, aunque este punto sigue siendo investigado.

A continuación vamos a discutir dos ejemplos: uno de dinámica caótica en un sistema de pocos grados de libertad, y otro acerca del estudio de sistemas macroscópicos. Por último, hay que destacar que la teoría espectral no sólo juega un papel importante en la descripción de sistemas estrictamente clásicos, sino que en general interviene en la caracterización de cualquier sistema dinámico con dinámica caótica. Como caso ilustrativo vamos a estudiar la dinámica de fotones en el seno de un campo gravitatorio asociado a un sistema de dos agujeros negros.

### 3. Dinámica de fotones en agujeros negros

En esta sección vamos a estudiar un modelo propuesto por S. Chandrasekhar (1989) en el contexto de la relatividad general para estudiar la dispersión de radiación por dos agujeros negros (tipo Reissner-Nordström) que se mantienen a una distancia fija debido a la igualdad que existe entre su atracción gravitatoria y su repulsión electrostática. De hecho, este problema es el análogo al problema de dos centros clásicos. No obstante, en el contexto de la mecánica clásica es un problema separable, mientras que en relatividad es no integrable.

Para este sistema se han estudiado las geodésicas nulas que corresponden a fotones y el principal resultado encontrado fue que las órbitas periódicas de este sistema son todas inestables y que la dinámica parece hiperbólica. El tratamiento parte de la lagrangiana del sistema según la cual, a través de una transformada de Legendre que reemplaza las velocidades por momentos, la Hamiltoniana del sistema es

$$H = -\frac{1}{2}U^2 p_t^2 + \frac{1}{2}U^{-2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

donde el sistema está en un espacio de cuatro dimensiones  $(t, x, y, z)$ , que tiene como momentos conjugados a las variables  $(p_t, p_x, p_y, p_z)$ . La función  $U$  esta definida por (ver Figura 10)

$$U = 1 + \frac{M_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}} + \frac{M_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 1)^2}}.$$

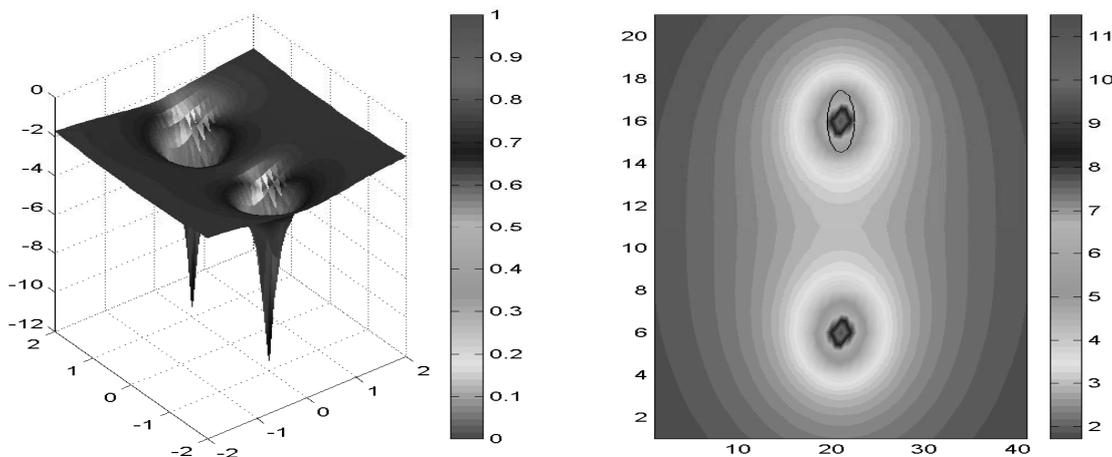


Figura 10. Superficie de potencial para el problema del movimiento de un fotón en presencia de dos agujeros negros.

Los agujeros negros tienen masa  $M_1$  y  $M_2$  y están localizados en  $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$ . Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton, en las que las derivadas se hacen respecto al tiempo propio  $s$  (que no es  $t$ ). Las ecuaciones de movimiento resultantes son

$$\begin{aligned} \dot{t}/U^2 &= E = \text{energía constante} \\ \dot{x} &= U^{-2}p_x, \quad \dot{p}_x = \frac{1}{2}\partial_x(U^2 - U^{-2}P^2) \\ \dot{y} &= U^{-2}p_y, \quad \dot{p}_y = \frac{1}{2}\partial_y(U^2 - U^{-2}P^2) \\ \dot{z} &= U^{-2}p_z, \quad \dot{p}_z = \frac{1}{2}\partial_z(U^2 - U^{-2}P^2) \end{aligned}$$

con  $P^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ .

El problema tiene simetría axial a lo largo del eje  $z$ , y por lo tanto la componente a lo largo de este eje del momento angular  $L_z$  es constante de movimiento. Para hacer el estudio más simple, vamos a centrarnos en el movimiento cuando  $L_z = 0$ . En este caso la dinámica queda confinada en un plano, pongamos por caso el plano  $x - z$  (ver Figura 11).

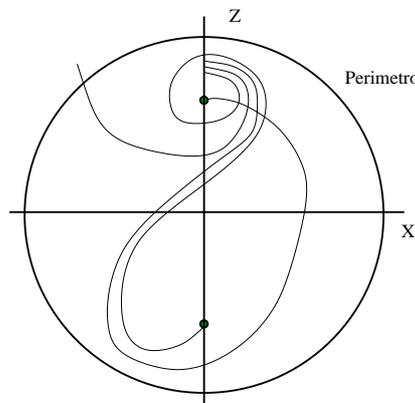


Figura 11. Tipos de trayectorias con  $L_z = 0$  de fotones en un sistema binario de agujeros negros de igual masa. Se ilustran tanto trayectorias que son atrapadas por los agujeros negros como aquellas que escapan a infinito, una vez han atravesado el *horizonte* del sistema.

A distancias suficientemente alejadas de los agujeros negros, cualquier fotón con velocidad saliente de un círculo centrado en  $(x, z) = (0, 0)$  escapa de la atracción gravitatoria de los agujeros negros. Consideramos ahora que distribuimos a lo largo del eje  $z$ , y dentro del círculo perimétrico que tracemos (ver Figura 11), un conjunto de condiciones iniciales, todas con una velocidad paralela al eje  $x$ . En la evolución dinámica de estos fotones muchos caerán

en alguno de los dos agujeros negros, mientras que otros escapan al infinito. Para analizar este proceso construimos la función  $N(s)$  que nos diga cuántos fotones están dentro del perímetro trazado a tiempo propio  $s$ . Esta curva tiene típicamente el aspecto que se muestra en la Figura 12. Como vemos, alcanza un valor asintótico para  $s \rightarrow \infty$  que corresponde al número de fotones que han sido atrapados por los agujeros negros. Lo que nos interesa a nosotros es caracterizar el decaimiento con  $s$ . Si analizamos el gráfico en escala logarítmica vemos que esta caída es exponencial, y la pendiente, precisamente el *ritmo de decaimiento*, es el autovalor dominante del operador de evolución de este problema.

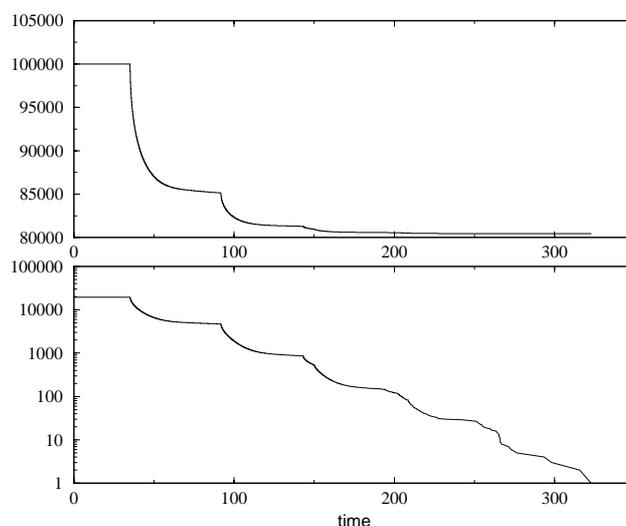


Figura 12. Número de fotones que permanecen atrapados dentro de un perímetro trazado en torno a los agujeros negros pasado un tiempo  $s$ .

De la discusión anterior sabemos que las resonancias de Pollicot-Ruelle del operador de evolución pueden relacionarse de forma exacta con las órbitas periódicas del problema. Si uno evalúa el periodo y la estabilidad lineal de dichas órbitas se puede, al menos en principio, obtener valores del espectro del operador de evolución.

En la Figura 12 mostramos el comportamiento de la función  $N(s)$ . Se puede observar el decaimiento exponencial controlado por el ritmo de escape. Nuestros resultados preliminares indican un buen acuerdo entre el espectro calculado a partir de las órbitas periódicas y las simulaciones numéricas. El lector interesado puede encontrar otras aplicaciones en [8, 9].

#### 4. Sistemas macroscópicos

Con el concepto de función densidad  $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  se puede estudiar el comportamiento de los sistemas macroscópicos, entendiendo como tales aquéllos que tienen un número elevado de partículas, del orden de  $10^{23}$ . Si se toma una densidad que se ha normalizado a la unidad, al

integrarla a todo el espacio de fases disponible se puede dar una interpretación probabilística a la densidad resultante<sup>7</sup>. Hecha la normalización, se puede interpretar la cantidad  $\rho(\mathbf{Q}, \mathbf{P})d\mathbf{Q}d\mathbf{P}$  como la probabilidad de encontrar al sistema en un entorno  $d\mathbf{Q}d\mathbf{P}$  centrado en  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , en el instante  $t$ .

Vamos a considerar un sistema en equilibrio, el cual imaginamos se encuentra dividido en dos subsistemas. Al sistema 1 le corresponde una función densidad  $\rho_1$  y al sistema 2 una densidad  $\rho_2$ . El elemento de volumen del sistema 1 es  $dq^{(1)}dp^{(1)}$ , y el elemento de volumen para el sistema 2 es  $dq^{(2)}dp^{(2)}$ . Por supuesto,  $d\mathbf{Q}d\mathbf{P} = dq^{(1)}dp^{(1)}dq^{(2)}dp^{(2)}$ . Una hipótesis fundamental en el estudio de sistemas macroscópicos es que los estados del subsistema 1 son *estadísticamente independientes* de los del sistema 2 en el equilibrio. Si esto es así, se sigue

$$\rho d\mathbf{Q}d\mathbf{P} = \rho_1 \rho_2 dq^{(1)}dp^{(1)}dq^{(2)}dp^{(2)},$$

o, lo que es lo mismo,  $\rho = \rho_1 \rho_2$ .

Otro ingrediente básico para el tratamiento estadístico de los sistemas macroscópicos es el *Teorema de Liouville*, que ya hemos introducido con anterioridad. Si un sistema mecánico tiene un hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo, se tiene que en la evolución dinámica cualquier dominio del espacio de fases que se considere preserva su volumen. En términos de la densidad  $\rho$ , implica que cuando se ha alcanzado el equilibrio (la condición estacionaria para la densidad) se tiene que

$$\{H, \rho\} = 0.$$

Esto significa que la densidad  $\rho$  es una constante de movimiento. En este caso se puede, por lo tanto, escribir  $\rho$  como una función de las constantes de movimiento del sistema. Por ahora no hay una reducción drástica del problema mecánico, al menos aparentemente, pero la hipótesis de independencia estadística viene a reducir las posibilidades.

En el equilibrio también será constante de movimiento la función

$$\ln \rho = \ln \rho_1 + \ln \rho_2.$$

Pero el contenido de esta ecuación es que las densidades de los subsistemas han de ser funciones de constantes de movimiento que sean aditivas. De todas las posibles constantes de movimiento de las que podría depender la densidad de un subsistema, la hipótesis de independencia estadística selecciona sólo aquellas que son aditivas [12]. En mecánica se conocen sólo siete constantes de movimiento que sean aditivas: la energía, las tres componentes del momento lineal y las tres componentes del momento angular. Además, estas constantes de movimiento están asociadas a simetrías del sistema. La invarianza frente a traslaciones temporales conduce a la conservación de la energía, la invarianza frente a traslaciones espaciales se refleja en la conservación del momento lineal y, finalmente, la invarianza frente a rotaciones conduce a la conservación del momento angular. Se debe a E. Noether [21] un teorema más general, derivado desde la formulación lagrangiana de la mecánica clásica pero

---

<sup>7</sup>  $\rho / \int \rho \rightarrow \rho$

válido igualmente en mecánica cuántica y teoría cuántica de campos, que afirma que a cada simetría del sistema le corresponde una cantidad conservada.

De nuestra discusión se sigue que

$$\ln \rho_i = \alpha_i + \beta_i E^i + \gamma_i \cdot \mathbf{P}^i + \delta_i \cdot \mathbf{M}^i,$$

donde  $E^i$  es la energía,  $\mathbf{P}^i$  el momento lineal y  $\mathbf{M}^i$  el momento angular del subsistema  $i$ -ésimo, y  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  y  $\delta_i$  son constantes a determinar. Por lo tanto, el conocimiento con propósitos estadísticos, y para la caracterización de un sistema en equilibrio, de la función densidad de un subsistema requiere muchísima menos información que la contenida en las  $6N$  coordenadas  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  del sistema; basta sólo con el conocimiento de las constantes de movimiento aditivas, de las que ha de depender la función densidad en el equilibrio.

Si, eventualmente, el sistema está confinado en una caja se dejarían de conservar el momento lineal y angular, y por lo tanto se tendría

$$\ln \rho_i = \alpha_i + \beta_i E^i.$$

Para el sistema total aislado la función densidad quedaría expresada como  $\rho = Cte \times \delta(E - E_T)$ , con  $E_T$  la energía total del sistema. A esta última expresión de la función densidad se la denomina *colectivo microcanónico* [12]. El cálculo de los valores medios de los observables dinámicos se haría siguiendo la prescripción contenida en la ecuación (1).

En el límite estacionario el sistema macroscópico alcanza el equilibrio, y su función densidad no depende explícitamente del tiempo. En esa situación, la aplicación del operador de evolución a la función densidad estacionaria conduce a la misma función densidad. Por lo tanto, el estado de equilibrio corresponde a un autoestado del operador de evolución con autovalor uno. Si se desea estudiar, no ya el estado de equilibrio, sino cómo se alcanza el equilibrio, pasan a cobrar importancia aquellos autovalores del operador de evolución que están dentro del círculo unidad y sus autoestados. Éstos representan modos del sistema que decaen a cero a medida que progresa el tiempo (véase la expresión (2)). En este contexto aparecen las resonancias de Pollicot-Ruelle en la descripción de la relajación de un sistema hacia su estado de equilibrio. Este es un ejemplo más de cómo el poder generativo de las matemáticas interviene, a diferentes niveles, en un problema físico y termina aportando nuevos aspectos en la descripción de los fenómenos físicos. En realidad, estamos en la reflexión de cómo compatibilizar nuestra observación de que los fenómenos macroscópicos son irreversibles en el tiempo y la dinámica microscópica de sus constituyentes es reversible en el tiempo. Vemos en este contexto cómo para sistemas caóticos hiperbólicos, que es donde están definidas las resonancias de Pollicot-Ruelle, la dinámica caótica induce comportamiento irreversible. La formulación de la teoría física, en este caso, se hace sin un rigor exhaustivo. No obstante, con los elementos más esenciales de la teoría, formulada en términos matemáticos simples y poco rigurosos, es complicado abordar cuestiones fundamentales. Una formulación matemática más rigurosa es, precisamente, lo que permite un ulterior progreso de la teoría.

Animamos a lector a consultar la bibliografía citada para una mayor profundización en estos temas.

## 5. Mundo microscópico

Una vez se han considerado sistemas clásicos, vamos a ver cómo se describen los sistemas microscópicos.

**5.1. Sistemas cuánticos complejos.** En la escala de  $10^{-8}$  metros los objetos físicos más comunes son los átomos y sus constituyentes, por ejemplo los núcleos y electrones. De hecho, una buena parte de los fenómenos físicos están relacionados con estos últimos. La descripción de estos objetos físicos se hace mediante la mecánica cuántica. Si se tiene un conjunto de  $N$  cuerpos microscópicos, bien sean átomos o electrones, o núcleos y electrones, toda la información física del sistema está contenida en lo que se denomina *función de ondas*. Matemáticamente, la función de ondas es un campo complejo definido como

$$\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t) \mapsto \Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t),$$

donde  $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  son  $N$  coordenadas de posición y  $t$  es un parámetro real que se asocia al tiempo. Conocida  $\Psi$  se puede evaluar cualquier magnitud física en términos de sus valores medios y fluctuaciones.

La evolución dinámica de un sistema cuántico con función de ondas  $\Psi$  está determinada por la ecuación de Schrödinger [13, 17], una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden en el tiempo, que tiene la forma

$$i\hbar\partial_t\Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t) = \hat{H}\Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t)$$

$$\text{con } \Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, 0) = \Psi_0, \quad (3)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $\hbar = h/2\pi$  ( $h$ =constante de Planck). El operador  $\hat{H}$  representa la energía del sistema. A este operador se le denomina *hamiltoniano* y es característico del sistema físico en estudio, siendo el análogo al hamiltoniano que hemos introducido en la descripción clásica de los sistemas<sup>8</sup>. En muchos casos se compone de un operador de energía potencial y otro de energía cinética. Por ejemplo, para un conjunto de  $N$  partículas iguales de masa  $M$  en un potencial  $V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  el operador de Hamilton sería

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i^2/2M + \hat{V}(\hat{\mathbf{q}}_1, \dots, \hat{\mathbf{q}}_N) = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^N \partial_{\mathbf{q}_i}^2 + V(\hat{\mathbf{q}}_1, \dots, \hat{\mathbf{q}}_N),$$

donde  $\hat{\mathbf{q}}_i$  son operadores de posición cuya actuación es  $\hat{q}f(q) = qf(q)$ . El operador  $\hat{V}(\hat{\mathbf{q}}_1, \dots, \hat{\mathbf{q}}_N)$  da cuenta de la interacción que tiene lugar entre las partículas.

<sup>8</sup> Existen lo que se llaman reglas de cuantización que permiten definir operadores de Hamilton a partir de funciones clásicas de Hamilton.

Para resolver el problema (3) se necesita dar el valor de la función de ondas en un instante inicial,  $\Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t = 0)$ , y alguna condición de contorno para las funciones de ondas en las coordenadas. Si el sistema físico está confinado, la corriente de materia hacia el exterior del recinto ha de ser cero. La función de ondas representa una amplitud de probabilidad, de modo que para realizar predicciones físicas hay que evaluar cantidades que dependen bilinealmente con  $\Psi$ . Una interpretación de la función de ondas es que la cantidad  $|\Psi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, t)|^2 d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 \dots d\mathbf{q}_N$  representa la probabilidad de encontrar al sistema en el instante  $t$  en un volumen elemental  $d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_N$  centrado en el punto  $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ . Se requiere, por tanto, que las funciones de ondas sean de cuadrado sumable si se les ha de atribuir características físicas.

Vamos a considerar la transformada de Fourier, definida como

$$F\{*\} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt/\hbar} \{*\}.$$

La transformada de Fourier  $\psi(\mathbf{q}, E)$  de  $\Psi(\mathbf{q}, t)$ , donde hemos empleado la notación  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ , obedece la denominada *ecuación estacionaria de Schrödinger*

$$\hat{H}\psi(\mathbf{q}, E) = E\psi(\mathbf{q}, E),$$

que representa una ecuación de valores propios para el operador de Hamilton. Para un sistema confinado el espectro del hamiltoniano es discreto, de modo que se tiene un conjunto de autovalores (que pueden ser degenerados) y sus correspondientes autofunciones; es decir,  $\hat{H}\phi_n(\mathbf{q}) = E_n\phi_n(\mathbf{q})$ , con  $n$  un entero. Si el sistema estuviese abierto, el espectro sería continuo. Se pueden considerar, según los fenómenos que se deseen estudiar, otro tipo de espectros, incluyendo medidas fractales, pero no discutiremos estos aspectos aquí.

En términos de los autovalores y autofunciones del operador de Hamilton la función de ondas  $\Psi$  se puede escribir como

$$\Psi(\mathbf{q}, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(\mathbf{q}),$$

con  $c_n = \int d\mathbf{q} \phi_n^*(\mathbf{q}) \Psi(\mathbf{q}, t = 0)$ .

Es de especial interés el conjunto de autovalores  $E_n$  que constituye el espectro del hamiltoniano y da cuenta del conjunto de energías del sistema. Del conocimiento del espectro de energías se puede extraer bastante información física. Una cantidad característica del espectro de un sistema es la función espectral  $N(E)$ , que se define como el número de autovalores con energía menor o igual que  $E$ , esto es [10],

$$N(E) = \#\{E_n / E_n \leq E\} = \sum_n \Theta(E - E_n), \quad (4)$$

donde  $\Theta(x)$  es la función de Heaviside. La densidad espectral está dada en función de  $N(E)$  como

$$D(E) = dN(E)/dE = \sum_n \delta(E - E_n), \quad (5)$$

siendo  $\delta(x)$  la distribución de Dirac, definida por  $\delta(x - x_0)f(x) = f(x_0)$ . Muchas propiedades físicas pueden derivarse de (4) ó (5). El estudio del comportamiento asintótico con  $E$  de la función  $N(E)$  tiene tradición en Matemáticas. Si se considera el problema cuántico de una partícula libre en un recinto cerrado de volumen finito, los autovalores del problema corresponden a los de la ecuación de Hemholtz con condiciones de contorno tipo Dirichlet, es decir,

$$\nabla^2\Psi + \kappa^2\Psi = 0, \Psi|_{\partial V} = 0, \kappa^2 = 2ME/\hbar^2.$$

Determinar el comportamiento de  $N(E)$  o  $N(\kappa)$  en este contexto es un problema clásico de Weyl sobre la distribución de los autovalores de la ecuación de ondas en un dominio finito. En este contexto se tienen expresiones aproximadas de  $N(E)$ . En particular, para el problema planteado en el caso de un recinto en dos dimensiones se tiene

$$N(\kappa) \sim \frac{S\kappa^2}{4\pi} - \frac{\gamma\kappa}{4\pi} + \frac{1}{12\pi} \oint_{\partial S} C(l)dl + \dots$$

En esta expresión  $S$  es el área del dominio,  $\gamma$  es su perímetro y  $C(l)$  es su curvatura local, si el perímetro está parametrizado por la coordenada  $l$ . Se deduce que el número de autovalores crece cuadráticamente con  $\kappa$  en un término que es proporcional al área. Nótese que este término no depende de la condición de contorno. La condición de contorno es responsable del signo menos que acompaña al segundo sumando que depende del perímetro. En el caso de que las condiciones de contorno fuesen de tipo Neumann el término de perímetro tendría signo positivo.

Si el sistema tuviese paredes suaves, es decir, si hubiese un potencial de confinamiento, esta ley quedaría modificada para un sistema de  $N$  partículas como

$$N(E) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} \int d^N\mathbf{q}d^N\mathbf{p} \Theta(E - \sum_i \mathbf{p}_i^2/2M - V(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)) + \dots, \quad (6)$$

que se conoce entre los físicos como *ley de Thomas-Fermi*.

Estas últimas ecuaciones expresan el comportamiento suave de la función  $N(E)$ , que denotamos por  $\bar{N}(E)$ . En la Figura 13 se ilustra la parte oscilatoria de esta función ( $N_{osc}(\kappa) = N(\kappa) - \bar{N}(\kappa)$ ) para el espectro de la ecuación de Hemholtz en un dominio circular con condiciones Dirichlet. No obstante, esta función presenta fluctuaciones respecto al comportamiento promedio. Lo interesante es que estas oscilaciones pueden relacionarse, en un sistema cuántico que tenga límite clásico, con las órbitas periódicas que tenga el sistema clásico

análogo al cuántico. Para ver este aspecto se puede partir de una formulación de la mecánica cuántica debida a Feynman (1948) [6]. Una teoría con fuertes analogías a la de Feynman es la teoría de Wiener (1933) para el movimiento browniano en términos de caminos.

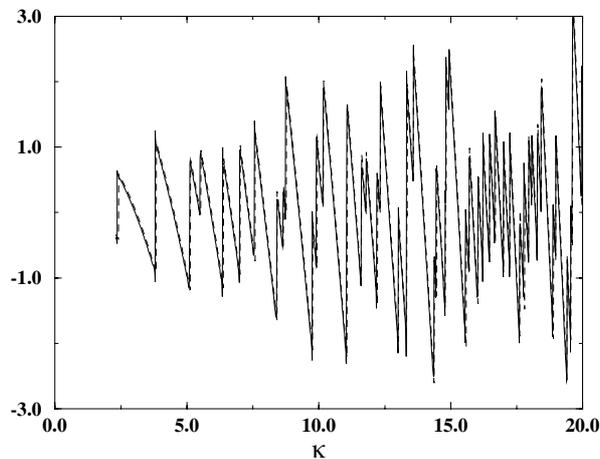


Figura 13. Parte oscilatoria de  $N(\kappa)$  para los autovalores de la ecuación de Helmholtz en un círculo con condiciones Dirichlet (trazo continuo). En trazo discontinuo la aproximación semiclásica basada en las órbitas periódicas del círculo (ver texto) [1].

La formulación de Feynman comienza por expresar la función de Green para el problema (3) de la forma siguiente. Si el sistema se encuentra en el instante inicial (por caso  $t=0$ ) en el punto  $\mathbf{q}$  y pasado un tiempo  $t$  está en el punto  $\mathbf{q}'$ , la función de Green, denominada en algunos contextos por los físicos como *propagador*<sup>9</sup>, se escribe como

$$K(\mathbf{q}'t, \mathbf{q}0) = \int \mathcal{D}[\mathbf{q}(t)] e^{iS[\mathbf{q}(t)]/\hbar}, \tag{7}$$

con  $S[\mathbf{q}(t)]$  un funcional del camino o trayectoria  $\mathbf{q}(t)$  denominado *acción* y que tiene la forma

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_0^t \mathcal{L}[\mathbf{q}(t'), \dot{\mathbf{q}}(t'), t'] dt', \quad \mathcal{L} = \mathbf{p}^2/2M - V(\mathbf{q}).$$

En esta expresión  $\dot{\mathbf{q}}(t')$  es la derivada del camino respecto al tiempo y  $\mathcal{L}$  es la función de Lagrange del sistema, la cual corresponde a una transformada de Legendre del hamiltoniano que intercambia los momentos lineales  $\mathbf{p}$  por las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$ . En la integración funcional aparece formalmente la medida  $\mathcal{D}[\mathbf{q}(t)]$  en el espacio de *caminos* que contribuyen a la integral.

<sup>9</sup> Se le denomina propagador por la propiedad siguiente. Si  $\Psi(\mathbf{q}, 0)$  es el valor de la función de ondas a tiempo  $t = 0$  en el punto  $\mathbf{q}$ , entonces la función de ondas en un instante posterior  $t$  en el punto  $\mathbf{q}'$  es

$$\Psi(\mathbf{q}', t) = \int d\mathbf{q} K(\mathbf{q}'t, \mathbf{q}0) \Psi(\mathbf{q}, 0).$$

En la Figura 14 vemos algunos ejemplos.

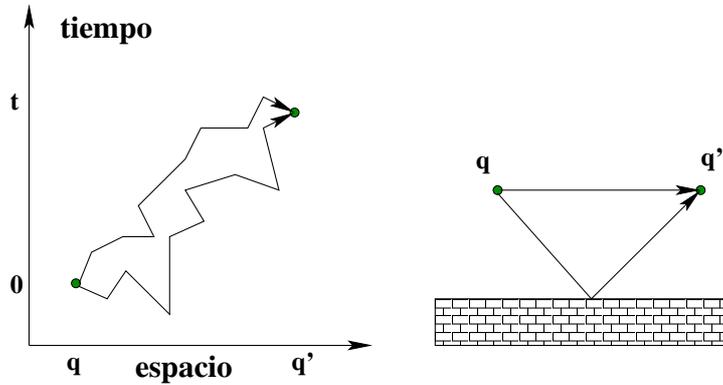


Figura 14. Ejemplos ilustrativos de *camino de Feynman*.

Desde el punto de vista matemático existen serias dificultades en fijar a qué objeto matemático corresponde (7). La diferencia básica con la teoría de Wiener está en el carácter complejo del funcional  $e^{iS[\mathbf{q}(t)]/\hbar}$ . En el campo de la Física se tiene una amplia experiencia en el cálculo de este tipo de integrales funcionales, a pesar de que no existe una teoría matemática rigurosa para la misma.

Si se conoce  $K(\mathbf{q}'t, \mathbf{q}, 0)$  se puede evaluar el espectro del sistema a través del siguiente objeto:

$$D(E) = \sum_n \delta(E - E_n) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \text{Im} \text{Tr} \frac{1}{E - \hat{H} + i\eta} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int d\mathbf{q} G^+(\mathbf{q}, \mathbf{q}', E),$$

con  $\text{Tr}$  la traza del operador,  $\text{Im}$  la parte imaginaria y

$$G^+(\mathbf{q}, \mathbf{q}', E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt e^{iEt/\hbar} K(\mathbf{q}'t, \mathbf{q}, 0).$$

En el límite, o situaciones en las que  $S \gg \hbar$ , se puede considerar una aproximación de fase estacionaria en la versión de Feynman del propagador (7). En la aproximación de fase estacionaria contribuyen aquellos caminos en los que la variación de  $S[\mathbf{q}(t)]$  respecto a  $\mathbf{q}(t)$  es cero (con las condiciones de contorno apropiadas), es decir,

$$\delta S[\mathbf{q}(t)] = \delta \int_0^t dt' \mathcal{L}[\mathbf{q}(t'), \dot{\mathbf{q}}(t'), t'] = 0.$$

En esta última expresión se reconoce una de las formulaciones variacionales de la mecánica clásica, en particular el *principio de Hamilton*. De modo que los caminos que más contribuyen en esta aproximación son los caminos clásicos, aquéllos que van desde  $\mathbf{q}$  a tiempo  $t = 0$  hasta  $\mathbf{q}'$  a tiempo  $t$ . Además, en el cálculo de la traza se impone que el punto final y el punto inicial sean el mismo, por lo que a la traza contribuyen los caminos cerrados. Nótese que no tienen por qué ser órbitas periódicas, puesto que en una órbita periódica los momentos inicial y final han de coincidir. Para obtener finalmente la densidad  $D(E)$  hay que efectuar una última integración; si se efectúa de nuevo mediante la aproximación de fase estacionaria resulta que los caminos clásicos seleccionados son órbitas periódicas de energía  $E$  y periodo  $T$ . Si el periodo es arbitrariamente pequeño se tiene la contribución llamada de *puntos de equilibrio*, y ésta es responsable de la ley de Thomas-Fermi (6), la parte suave de la densidad espectral. La contribución de órbitas periódicas, con periodo diferente de cero, es la que da lugar a la descripción de las oscilaciones en la densidad espectral, y es de hecho la que contiene información sobre la localización de las autoenergías en el eje real. Si se considera que se tiene un sistema en dos dimensiones de dinámica clásica totalmente hiperbólica, de modo que todas sus órbitas periódicas son inestables, la parte oscilatoria de la densidad espectral tiene la forma de una suma sobre órbitas periódicas (op) y sus repeticiones (r)

$$D_{osc}(E) \sim \frac{1}{i\hbar} \sum_{op} \sum_r \frac{e^{i\tilde{S}_{op}(E)/\hbar - i\mu_{op}\pi/2}}{\det |M_{op}^r - 1|^{1/2}} + \dots, \quad (8)$$

con  $\tilde{S}_{op}(E) = \oint_{op} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  y  $\mu_{op}$  un factor que da cuenta de las singularidades del término del denominador. La matriz  $M_{op}$  se denomina *matriz de monodromía* y da cuenta de la estabilidad lineal de las órbitas periódicas que entran en la suma (exponentes de Liapunov), y que ya aparecía en nuestra discusión acerca de las resonancias clásicas. Esta es la conocida *fórmula de Gutzwiller* [10]. Nótese la analogía formal que se tiene entre el cálculo del espectro de resonancias de un sistema clásico y el espectro de autoenergías de un problema cuántico. En el caso clásico la relación entre las resonancias y las órbitas periódicas es exacta, mientras que el caso cuántico es sólo aproximada. Al tipo de aproximaciones hechas, que emplean información clásica para dar una descripción cuántica, se les denomina *teorías semiclásicas*. En realidad se trata de construir soluciones a las ecuaciones de ondas en términos de *rayos*.

En el contexto de las Matemáticas existe una fórmula igual a la que hemos planteado aquí, la *función traza de Selberg* [4, 25]. Esta fórmula constituye una identidad que relaciona cantidades dinámicas y el espectro cuántico del operador de Laplace-Beltrami en superficies compactas de curvatura negativa.

Si se manipula (8) se puede escribir una función Zeta, cuyos ceros corresponden (en las aproximaciones hechas) al espectro del sistema. La función Zeta mencionada quedaría a partir de (8) como

$$Z(E) = \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{op} \left( 1 - \frac{e^{i\tilde{S}_{op}(E)/\hbar - i\mu_{op}\pi/2}}{|\Lambda_{op}|^{1/2} \Lambda_{op}^m} \right),$$

y el espectro se obtendría de la condición  $Z(E) = 0$ .

En el caso de un sistema integrable en una dimensión la condición de cuantización se reduce a

$$Z(E) = 1 - e^{\frac{i}{\hbar}(\tilde{S}_{op}(E)/\hbar - \mu_{op}\pi/2)} = 0,$$

de donde se obtiene

$$\tilde{S}_{op}(E) = \oint_{op} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 2\pi\hbar \left( n + \frac{\mu_{op}}{4} \right) \quad (9)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esta es la conocida “vieja” *regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld*.

En este sentido, ya Einstein (1927) [10] había advertido cómo la regla de cuantización basada en (9) podría ser inútil en un sistema en el que no hubiesen constantes de movimiento, y por lo tanto debería existir una regla de cuantización alternativa. Pauli, en su tesis doctoral, intentó resolver el átomo de helio con la regla de Bohr-Sommerfeld y fracasó. El origen de su fracaso está en que el problema de tres cuerpos (el átomo de helio es un ejemplo) no es, en general, integrable y por lo tanto no se puede aplicar la regla de Bohr-Sommerfeld. En los últimos años la aplicación de la fórmula de Gutzwiller a la cuantización semiclásica del átomo de helio ha tenido éxito, constituyendo un gran avance en nuestra comprensión de la relación entre la dinámica clásica caótica y sus manifestaciones en el mundo cuántico. Para llegar a este punto ha hecho falta una gran maduración de ideas que parte de los estudios de Poincaré en el sistema de tres cuerpos, pasando por la comprensión del escenario descrito por el teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) de transición de una dinámica integrable a otra caótica bajo pequeñas perturbaciones y los métodos de cuantización semiclásicos. Tenemos otro ejemplo más de como las matemáticas han intervenido en estos problemas: desde un estadio primigenio de las cuestiones en las que la formulación y solución del problema pasan por unas matemáticas simples, hasta la elaboración de teoremas fundamentales como el teorema KAM y herramientas como la traza de Gutzwiller, objetos de gran sofisticación matemática.

En este campo los aspectos no lineales de la dinámica clásica se muestran a nivel microscópico en sistemas atómicos y moleculares. Ya se ha discutido que el conjunto de órbitas configuran el espectro de energías del sistema. También hay otras propiedades relacionadas con las funciones de ondas de los sistemas cuánticos a altas energías que están relacionadas con órbitas periódicas. Aconsejamos al lector interesado que acuda a las referencias que se citan al final del capítulo.

El papel de las Matemáticas en este ámbito se encuentra en los métodos propios del Análisis Asintótico, a través del empleo y deducción de la fórmula de Weyl en el contexto del Análisis Armónico, Análisis Funcional y Dinámica de Sistemas No Lineales.

*Espectro de sistemas caóticos.* Una vez que se ha evaluado el espectro de un sistema cuántico cuyo análogo clásico es caótico, hay importantes propiedades que se pueden deducir y que dan cuenta de propiedades físicas de relevancia. Una de las magnitudes que se pueden estudiar es la distribución de las autoenergías en la recta real, y en particular las propiedades estadísticas del espectro, sus fluctuaciones. Existe evidencia, aunque no una demostración rigurosa, de que si un sistema es caótico su espectro presenta fluctuaciones gaussianas, en acuerdo con tres conjuntos universales [16]. En Matemáticas existe un problema con fuertes analogías a éste.

Considérese la función  $\zeta$  de Riemann:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1}, \operatorname{Re} z > 1, \quad (10)$$

y para otros valores de  $z$  se considera la continuación analítica. El producto en (10) es sobre todos los números primos  $p$ ; este producto se dice *de Euler*.

Esta función es cero para  $z = -2n$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A este conjunto de ceros se les denomina *triviales*. Todos los restantes ceros de la función  $\zeta(z)$  yacen en una banda dada por  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ , y están simétricamente situados respecto a la línea  $\operatorname{Re} z = 1/2$ . Existe una conjetura, la *conjetura de Riemann*, que aventura que de hecho todos los ceros de  $\zeta(z)$  están en  $\operatorname{Re} z = 1/2$ . Con la ayuda de los ordenadores esto parece ser cierto, ¡al menos para los primeros 2 billones de ceros! [16]. Como  $\zeta(z^*) = \zeta^*(z)$ , si  $z$  es un cero de la función de Riemann, también lo es  $z^*$ . Si se asume la hipótesis de Riemann, los ceros no triviales son de la forma  $z_n = 1/2 + i\gamma_n$ , con  $\gamma_n \in \mathbb{R}$ .

Partiendo de esta hipótesis el número de ceros de la función de Riemann  $N(T)$ , con  $\gamma_n \in (0, T]$ , está dado por

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + \dots, T \rightarrow \infty,$$

que representa el análogo a la ley de Weyl de un sistema cuántico, pero en este caso para el número de ceros de la función de Riemann. Si se analiza la distribución del espaciado entre ceros consecutivos,  $s_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$ , se encuentra que corresponden a la misma distribución que la de los espaciados de las autoenergías de un sistema físico denominado *unitario* (sistemas en los que hay una rotura de la simetría de inversión temporal).

En este punto es donde se encuentran problemas matemáticos formidables y problemas físicos sin que en principio tuviesen una relación aparente. Por ejemplo, demostrar la conjetura de Riemann equivaldría a encontrar un operador hermítico cuyos autovalores sean los ceros de la función de Riemann.

**5.2. Teleportación.** Hay otros aspectos de la mecánica cuántica que son atractivos y que gozan de gran actualidad. Vamos a centrarnos en el fenómeno conocido como *teleportación cuántica* [17], un término frecuente en las novelas de ciencia ficción, al menos hasta ahora.

A cada sistema cuántico le corresponde una función de ondas  $\Psi$ . En realidad, el estado de un sistema cuántico se puede representar como un vector  $|\Psi\rangle$  perteneciente a un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Consideremos ahora un sistema cuántico compuesto por dos subsistemas A y B. El sistema físico A tiene estados en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ , y el sistema B tiene estados en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_B$ . En cada uno de estos espacios de Hilbert se considera una base ortonormal completa, de modo que en el espacio  $\mathcal{H}_A$  la base es  $|i\rangle_A$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , y en el espacio  $\mathcal{H}_B$  la base es  $|j\rangle_B$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . El espacio de Hilbert del sistema total  $\mathcal{H}$  se escribe

como el producto tensorial de los espacios de Hilbert de A y B, es decir,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , y en este espacio se tiene como base ortonormal completa a los estados  $|\hat{i}\rangle_A \otimes |\hat{j}\rangle_B := |\hat{i}\rangle_A |\hat{j}\rangle_B$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ .

Un estado del sistema total AB,  $|\Psi_{AB}\rangle$ , es una combinación lineal de los estados  $|\hat{i}\rangle_A |\hat{j}\rangle_B$ ,

$$|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} C_{ij} |\hat{i}\rangle_A |\hat{j}\rangle_B,$$

con  $C_{ij} \in \mathbb{C}$  y  $\sum_{i,j} |C_{ij}|^2 = 1$ .

Un conjunto especial de estados del sistema total es aquel formado por estados que son el producto de estados de A y estados de B, es decir, si  $|\Psi_A\rangle = \sum_i C_i^{(A)} |\hat{i}\rangle_A$  y  $|\Psi_B\rangle = \sum_j C_j^{(B)} |\hat{j}\rangle_B$  se tiene un estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle |\Psi_B\rangle = \left( \sum_i C_i^{(A)} |\hat{i}\rangle_A \right) \left( \sum_j C_j^{(B)} |\hat{j}\rangle_B \right). \quad (11)$$

Es claro que, en general, cualquier estado del sistema total no tiene por qué ser de la forma anterior. Un ejemplo sería el estado

$$|\Psi_{AB}\rangle = 2^{-1/2} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B), \quad (12)$$

que no puede escribirse como un estado producto de un estado en  $\mathcal{H}_A$  y otro en  $\mathcal{H}_B$ . Un estado de estas características se denomina *enmarañado*, que viene de la palabra inglesa *entanglement*, término acuñado por Schrödinger (1935). Un estado es factorizable como producto de la forma (11) si  $C_{ij} = C_i^{(A)} C_j^{(B)}$ .

Con esta breve introducción vamos a considerar que los subsistemas A y B (que pueden estar a distancia uno del otro) comparten un estado enmarañado  $|\Psi_{AB}\rangle$  dado por (12) y que escribimos como

$$|\Psi_{AB}\rangle := 2^{-1/2} (|00\rangle + |11\rangle).$$

Supóngase además que A genera un estado  $|\Phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  y desea transmitir esa estructura a B. Vamos a ver un protocolo que hace precisamente eso. Para ello A forma el estado producto de tres partículas

$$|\Phi_{AB}\rangle = 2^{-1/2} (a|0\rangle + b|1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle).$$

En el espacio del subsistema A se puede introducir una base formada por los siguientes vectores:

$$|\phi^+\rangle = 2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\phi^-\rangle = 2^{-1/2}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\psi^+\rangle = 2^{-1/2}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi^-\rangle = 2^{-1/2}(|01\rangle - |10\rangle)$$

En dicha base el estado se escribe como

$$|\Phi_{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |\phi^-\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |\psi^-\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle) + |\psi^+\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle).$$

Esta base que se ha introducido se llama *base de Bell* en honor a John Bell, un conocido físico que se dedicó a estudiar los fundamentos de la mecánica cuántica. Se debe resaltar que no ha habido proceso físico alguno; sólo hemos escrito el estado de una manera más apropiada.

Ahora A realiza una medida que proyecta el resultado en alguno de los cuatro estados disponibles en su subsistema, es decir, obtendrá de su medida uno de los siguientes estados:  $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ . Como consecuencia de dicha medida el estado final *global* será uno de entre los cuatro siguientes (con un 25% de probabilidad cada uno), en acuerdo con el resultado de la medida de A:

$$|\phi^+\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle)$$

$$|\phi^-\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle)$$

$$|\psi^-\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)$$

$$|\psi^+\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle)$$

Por supuesto, A sabe al medir cuál es su resultado y se lo comunica a B mediante un correo electrónico, llamando por teléfono o anunciándolo en la C+, cualquier medio vale. Nótese que esa información es clásica y que la cantidad de información contenida en dicha comunicación es, acorde a la fórmula de Shannon (1948) [26], de dos bits. Con esta información ahora B sabría qué hacer para obtener el estado  $|\phi\rangle$  que A quería comunicarle. Veamos caso por caso.

Si el resultado de la medida de A es  $|\phi^+\rangle$ , B no tendría nada que hacer, puesto que la parte del estado global que está en su subsistema es precisamente  $|\phi\rangle$ . Si el resultado de la medida de A es el estado  $|\phi^-\rangle$ , B debería aplicar una medida que correspondiese a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En el caso de que el resultado de la medida fuese  $|\psi^+\rangle$ , B tendría que aplicar una medida correspondiente a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y, por último, si la medida de A tuvo como resultado el estado  $|\psi^-\rangle$ , B aplicaría la medida

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queremos insistir en que lo que se transmite es la estructura del estado; la materia y energía ya la comparten A y B (son el mismo sistema) desde el principio, ya que el estado inicial estaba enmarañado. Nótese también que al final del protocolo ya A y B no comparten ningún estado: la transferencia ha destruido el enmarañamiento que había entre ambos.

En este ejemplo vemos que las Matemáticas son muy sencillas y nos conducen a la predicción del fenómeno de teleportación. Un poco de álgebra lineal es suficiente para entender todas las operaciones efectuadas. Deberíamos preguntarnos ahora por el desarrollo experimental que conduce a la comprobación de lo expresado por las fórmulas anteriores. A día de hoy existe un buen número de experimentos que confirman el fenómeno de teleportación cuántica. El último se puede consultar en [15].

### Agradecimientos

Agradezco a Isabel Marrero su cordial invitación al curso *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2003*. También agradezco a Francisco Mauricio Domínguez, Antonia Ruiz García, Eva Martín Fierro e Inés de Vega Rodrigo sus comentarios críticos sobre el texto.

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (BFM2001-3349), el Gobierno Autónomo de Canarias (PI2002/009) y la Unión Europea (CERION II).

### Bibliografía

- [1] D. Alonso: *Semiclassical Quantization of Classically Chaotic Systems*. Tesis Doctoral, Universidad Libre de Bruselas, 1995.
- [2] D. Alonso: Escape dynamics of photons from black-holes. *En preparación* (2003).
- [3] V.I. Arnold, A. Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. W.A. Benjamin, 1968.
- [4] N.L. Balasz, A. Voros: *Phys. Rep.* **143**, 109 (1986).
- [5] A. Bohm: *Quantum Mechanics: Foundations and Applications (3ª edición)*. Springer, 1994.
- [6] R.P. Feynman: *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [7] P. Gaspard: *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [8] P. Gaspard, D. Alonso: *Phys. Rev. A* **45**, 8383 (1992).
- [9] P. Gaspard, D. Alonso, I. Bughardt: *Adv. Chem. Phys.* **90**, 105 (1995).
- [10] M.C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer, 1990.

- 
- [11] L.D. Landau, E. Lifshitz: *Mecánica*. Reverté, 1985.
- [12] L.D. Landau, E. Lifshitz: *Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann, 1980.
- [13] G. Ludwig: *Wave Mechanics*. Pergamon Press, 1968.
- [14] B.O. Koopman: *Proc. Natl. Acad. Sci.* **17**, 315 (1931).
- [15] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, N. Gisin: Long-distance teleportation of qubit at telecommunication wavelengths. *Nature* **421**, 509 (2003).
- [16] M.L. Metha: *Random Matrices*. Academic Press, 1991.
- [17] M.A. Nielsen, I.L. Chuang: *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [18] M. Pollicot: *Invent. Math.* **81**, 413 (1986).
- [19] M. Pollicot: *Invent. Math.* **85**, 147 (1986).
- [20] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics: I, Functional Analysis*. Academic Press, 1980.
- [21] L. Reichl: *The Transition to Chaos: In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*. Springer, 1992.
- [22] D. Ruelle: *Phys. Rev. Lett.* **56**, 405 (1986).
- [23] E. Schrödinger: *Annalen der Physik* **79**, 361 (1926).
- [24] E. Schrödinger: *Annalen der Physik* **79**, 489 (1926).
- [25] A. Selberg: *J. Ind. Math. Soc.* **20**, 47 (1956).
- [26] C.E. Shannon, W. Weaver: *The mathematical theory of communication*. The University of Illinois Press, 1949.
- [27] A. Terras: *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications, Vols. I, II*. Springer, 1985.
- [28] J. Von Neumann: *Proc. Natl. Acad. Sci.* **18**, 70 (1932).