Mecánica Cuántica: ¿Intuición o Matemáticas?

Rafael Sala Mayato

Profesor Titular de Física Aplicada
Departamento de Física Fundamental II
Universidad de La Laguna

Resumen

La mecánica cuántica es, sin lugar a dudas, la principal teoría física del siglo XX. Un buen número de campos de la física moderna, tales como la física atómica y molecular, el estado sólido y la "ciencia de materiales", la física nuclear, la física de partículas, o la física del láser, son, en definitiva, aplicaciones de la mecánica cuántica. La teoría cuántica subyace, además, en la explicación microscópica de todos los fenómenos químicos y biológicos, y es la base de gran parte de la tecnología más avanzada.

Desde el punto de vista matemático sus aspectos formales han sido siempre de gran interés. El papel que han desempeñado las matemáticas en su proceso de aparición y posterior desarrollo ha sido crucial. Presentamos aquí un breve resumen de las herramientas matemáticas básicas usadas en la mecánica cuántica. No se hará hincapié tanto en sus aspectos más formales, sino en su relación con la física del mundo que trata de explicar.

1. Introducción

Como muchas teorías físicas, la mecánica cuántica surge por mera necesidad: la necesidad de explicar determinados fenómenos que la física clásica era incapaz de describir correctamente.

Hasta finales del siglo XIX, las teorías existentes proporcionaban explicaciones satisfactorias, confirmadas por los experimentos, de casi la totalidad de los fenómenos observados hasta entonces. Las distintas ramas de la física poseían un marco teórico general y coherente que distinguía dos clases de objetos diferentes en el universo: la *materia* y las *radiaciones*. La materia se considera compuesta de partículas perfectamente localizables que obedecen las leyes de Newton; el estado de cada partícula se determina en cada instante de tiempo t por su posición y su velocidad (o momento lineal), es decir, por seis variables dinámicas. Las radiaciones obedecen las leyes del electromagnetismo de Maxwell, siendo sus variables dinámicas las componentes de los campos eléctrico y magnético en cada punto del espacio. Además, presentan un comportamiento ondulatorio, de manera que su localización espacial es extensa.

En 1900 Planck da el paso decisivo en el nacimiento de la teoría cuántica. El espectro de emisión de radiación por determinados cuerpos en equilibrio térmico era uno de esos experimentos que no encontraba explicación en el marco teórico existente. En su trabajo, Planck hace uso de argumentos termodinámicos y de una revolucionaria hipótesis: los átomos que constituyen las paredes del cuerpo interaccionan, intercambiando energía, con la radiación presente no de forma continua, sino de forma discreta, "a saltos", en cantidades proporcionales a una cierta constante h que, de ahí en adelante, será conocida como *constante de Planck*.

A partir de ese momento, la cantidad de experimentos, artículos y discusiones que años más tarde llevarían al nacimiento de la teoría cuántica resulta asombroso. El papel que las matemáticas desempeñan en este proceso será crucial: el flujo de ideas en el surgimiento de la teoría cuántica matricial y en la interpretación probabilística de la función de onda por parte de Born demuestran la primacía de las herramientas matemáticas por encima de cualquier interpretación intuitiva acerca de qué ideas fundamentales podían subyacer debajo de aquel entramado de resultados experimentales. Esas reglas matemáticas eran desarrolladas y aplicadas, en un principio, sin una interpretación clara de su significado. Fue en la eficacia de dichas reglas, y no en sus posibles interpretaciones, en la que se apoyó la comunidad científica para llegar a un acuerdo acerca de lo que allí sucedía.

El aparato matemático (ecuaciones, métodos de solución y aproximación) tuvieron su propio momento, mientras que las ideas filosóficas y de interpretación se fueron acomodando a posteriori. El hecho de que el marco teórico matemático tenga autonomía permite a los científicos teorizar sin necesidad de adoptar una interpretación determinada. El físico inglés Charles Darwin escribió a Niels Bohr refiriéndose a la teoría cuántica: “Considero parte de mi doctrina que los detalles filosóficos no son muy importantes”. Este convencimiento acerca de la primacía de las matemáticas fue especialmente fuerte en Göttingen, y fue la fuente de inspiración de Born y Heisenberg en la búsqueda de una nueva teoría cuántica. No en balde el lema de Born era “Las matemáticas *saben* más que nuestra intuición”.

2. Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica

No vamos a presentar aquí un estudio exhaustivo de los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica. Estudios profundos y rigurosos sobre la caracterización y geometría de los espacios de Hilbert, las variedades lineales cerradas, operadores lineales acotados, operadores compactos, descomposición espectral, etc. pueden encontrarse en [1, 2]. Nuestra filosofía será la de simplificar la presentación lo más posible, poniendo el énfasis en la relación entre los conceptos abstractos matemáticos y la física que tratamos de explorar. La mejor forma de entender esta relación es a través de los postulados de la mecánica cuántica.

Postulados de la mecánica cuántica. Aquí se explicarán los postulados o axiomas en los que se basa la formulación estándar de la mecánica cuántica, algunas de sus peculiaridades desde el punto de vista matemático y, sobre todo, su conexión con la realidad física que describen.

Postulado I: A un tiempo fijo t_0, el estado de un sistema físico está definido por un vector $|\psi(t_0)\rangle$ perteneciente al espacio de los estados $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ tiene estructura de espacio de Hilbert.

Postulado II: Cualquier magnitud física medible $\mathcal{A}$ está descrita por un operador $\hat{A}$ actuando en $\mathcal{E}$; este operador es un observable.

Postulado III: Los únicos resultados posibles en la medida de una magnitud física $\mathcal{A}$ son los valores propios asociados al correspondiente observable $\hat{A}$.

Decimos que el ket $|\psi\rangle$ es un vector propio o autovector del operador $\hat{A}$ si

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

En general esta ecuación posee soluciones sólo para ciertos valores a llamados *valores propios* o *autovalores* del operador $\hat{A}$. Al conjunto de todos los valores propios se le denomina *espectro* de $\hat{A}$.

Postulado IV: Cuando la magnitud física $\mathcal{A}$ es medida sobre un sistema en el estado *normalizado* $|\psi\rangle$, la probabilidad $\mathcal{P}(a_n)$ de obtener el valor propio a_n del correspondiente observable $\hat{A}$ es

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2$$

donde g_n es el grado de degeneración de a_n y $\{|u_n^i\rangle\}$ $(i = 1, 2, ..., g_n)$ es un conjunto de vectores ortonormales que forman una base en el subespacio $\mathcal{E}_n$ asociado con el valor propio a_n de $\hat{A}$.

Postulado V: Si la medida de la magnitud física $\mathcal{A}$ sobre el sistema en el estado $|\psi\rangle$ da como resultado el valor propio a_n, el estado del sistema inmediatamente después de la medida es la proyección normalizada

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}}$$

del estado $|\psi\rangle$ sobre el subespacio asociado a a_n.

Postulado VI: La evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ está gobernada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

donde $\hat{H}(t)$ es el observable asociado con la energía total del sistema.

3. Conclusiones

Las basaremos en esta cita del físico Niels Bohr:

La lección general acerca del papel que las matemáticas han desempeñado en la historia de la filosofía natural es el reconocimiento de que ninguna relación puede ser definida sin un cuadro lógico, y que cualquier desarreglo aparente con la descripción de los experimentos sólo puede ser eliminado mediante un ensanchamiento apropiado del marco conceptual.

Referencias

[1] J. Von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Springer Verlag, Berlin, 1932.
[2] A. Galindo, P. Pascual: *Mecánica Cuántica.* Eudema Universidad, 1989.

Bibliografía

M. Beller: *The Quantum Dialogue.* The University of Chicago Press.
D. Bohm: *Quantum Theory*. Dover.
R. Courant, D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*. Wiley-Interscience.
B. D'Spagnat: *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics.* Benjamin.
R.P. Feynman: *Lecturas de Física, Vol. III.* Addison-Wesley Iberoamericana.
R.P. Feynman: *The Character of the Physical Law*. Modern Library.
M. Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics.* Princeton University Press.
J.M. Jauch: *Foundations of Quantum Mechanics.* Addison-Wesley.
R. Omnès: *The Interpretation of Quantum Mechanics.* Princeton University Press.

En Internet

http://phys.educ.ksu.edu
Visual Quantum Mechanics
National Science Fundation (USA).
http://plato.stanford.edu/entries/qm
Quantum Mechanics
Stanford Encyclopedia of Phylosophy.
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_Quantum_age_begins.html
A history of Quantum Mechanics
The MacTutor History of Mathematics archive.
http://www.chemistry.ohio-state.edu/betha/qm
An introduction to Quantum Mechanics
Betha Chemistry Tutorial at The Ohio State University.