La Teoría de la Relatividad y las Teorías "Gauge"

Jesús González de Buitrago Díaz

Profesor Titular de Astronomía y Astrofísica del Departamento de Astrofísica de la Universidad de La Laguna
Investigador del Instituto de Astrofísica de Canarias

Resumen

En este artículo exponemos, en forma sucinta, las bases conceptuales de la Relatividad General y de las teorías "gauge". En la forma más elemental posible, presentamos las Ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio así como el desarrollo histórico inicial que, posteriormente, daría lugar a las modernas teorías "gauge" que describen las interacciones entre partículas elementales. También incluimos una breve introducción a los aspectos más esenciales de dichas teorías.

1. Ideas de base en la Relatividad General

Uno de los principios fundamentales en que se apoyan tanto la relatividad especial como la general es el llamado principio de invariancia de las leyes de la física respecto al sistema de coordenadas utilizado.

Pensemos en el papel de las coordenadas en la física. Todo el mundo sabe que, en coordenadas cartesianas, el movimiento de una partícula libre (por simplicidad en un plano) viene descrito por las elementales ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \tag{1.1}$$

Integradas:

$$x = x_0 + v_x t, \qquad y = y_0 + v_y t. \tag{1.2}$$

Eliminando el tiempo

$$\frac{x - x_0}{v_x} = t,$$

$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x}(x - x_0).$$

Esta última es de la forma $y = ax + b$, con $y' = a = v_y / v_x$ (que, por supuesto, corresponde a una línea recta).

En coordenadas cartesianas todo parece muy fácil; sin embargo, si adoptamos otras coordenadas como, por ejemplo, coordenadas polares:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

después de algunos cálculos encontramos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= 0, \\
\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Resulta evidente que en polares las ecuaciones diferenciales que describen la trayectoria rectilínea de una partícula no resultan tan sencillas y transparentes como en cartesianas.

El ejemplo anterior parece contradecir, aunque solamente en apariencia, el principio claro y evidente que nos dice que las leyes de la física deben tener la misma forma en cualquier sistema de coordenadas. Parece que existe un sistema de coordenadas privilegiado (coordenadas cartesianas) en el que las ecuaciones de una partícula libre tienen una forma particularmente sencilla. Sin embargo, el hecho físico: *la trayectoria rectilínea de la partícula en ausencia de fuerzas se mantiene en ambos sistemas de coordenadas.*

En realidad, lo que ocurre es que estamos escribiendo las ecuaciones del movimiento de la partícula en una forma muy particular ligada a las coordenadas que estamos utilizando. El problema que planteamos ha sido resuelto hace mucho tiempo por los matemáticos. Existe un lenguaje en el que las ecuaciones pueden plantearse en una forma general válida en cualquier sistema de coordenadas: se trata del lenguaje tensorial. En éste, las ecuaciones del movimiento de la partícula resultan ser

$$
\frac{d^2x^a}{dt^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{dt}\frac{dx^c}{dt} = 0.
\tag{1.5}
$$

Esta ecuación (llamada ecuación de las geodésicas) es válida en cualquier sistema de coordenadas (y en cualquier tipo de espacio sin que importe su dimensión). En el caso anterior, correspondiente a un plano, los índices toman los valores 1 y 2 y las coordenadas son r y θ (adoptamos el convenio de Einstein según el cuál un índice repetido implica sumar respecto a todos sus valores posibles). El símbolo Γ^a_{bc} se denomina conexión afín o símbolo de Christoffel y está relacionado con las derivadas del tensor métrico:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right). \tag{1.6}$$

Para entender el significado del tensor métrico solamente hay que notar que en el espacio euclídeo ordinario de dos dimensiones con coordenadas (x^1, x^2) el elemento de arco tiene la forma

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \tag{1.7}$$

Se trata de un caso especial de la forma completamente general:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{1.8}$$

donde g_{ij} es el tensor métrico. En coordenadas polares tendríamos

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2, \tag{1.9}$$

con $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ (a partir de aquí resultan las ecuaciones (1.4) en coordenadas polares, calculando la conexión afín mediante las derivadas del tensor métrico). Cuando tomamos coordenadas cartesianas las derivadas son nulas y tenemos la forma sencilla dada por (1.1).

Hay que hacer notar que en el espacio euclídeo ordinario el hecho de encontrarnos con un tensor métrico en el que sus componentes difieren de la forma canónica es consecuencia de adoptar un sistema de coordenadas distinto al cartesiano. Siempre existe una transformación global que permite pasar a la forma canónica. En el caso anterior:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Cuando el espacio no es euclídeo, ya no resulta posible encontrar una transformación de coordenadas en el que el las componentes del tensor métrico se reduzcan a la unidad. Un ejemplo sencillo es la superficie de una esfera. El elemento de arco es

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{1.11}$$

Es esencial darse cuenta de que sobre cualquier superficie, en una región libre de singularidades, una porción suficientemente pequeña puede considerarse plana, y para un observador local todo ocurre como si se encontrase en un espacio euclídeo (esto nos parece a todos en la superficie de La Tierra, y es por ello que Euclídes inventó la geometría que lleva su nombre).

Las consideraciones que acabamos de hacer llevan a una interpretación geométrica de la gravitación:

- En un espacio no-euclídeo la distancia más corta entre dos puntos es una geodésica.
- Localmente las geodésicas son, con suficiente aproximación, líneas rectas.
- Para un observador en caída libre en un campo gravitatorio (por ejemplo: en el interior de un ascensor) éste parece no existir (tiene la sensación de encontrarse en reposo o en movimiento uniforme al impulsarse levemente presionando una de las paredes del ascensor)

Apoyándonos en las observaciones anteriores, parece natural concebir un campo gravitatorio como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

La verdad es que la frase anterior implica un gran salto cualitativo. La idea subyacente es que el espacio-tiempo de Minkowski de la relatividad especial tiene su representación física, a escala local, en el interior del ascensor en caída libre. Podemos decir que, localmente, la geometría del espacio-tiempo es de la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1.12}$$

y las leyes de la física son las de la relatividad especial. Cuando el análisis local deja de ser válido (en una región del espacio-tiempo suficientemente grande y en presencia de un campo gravitatorio), el elemento de arco pasa a ser

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.13}$$

Hemos averiguado algunas cosas importantes: si la distribución de materia es responsable de la geometría del espacio-tiempo, el tensor métrico debe jugar un papel relevante en la descripción del campo gravitatorio. Ya en el contexto de la teoría de Newton aparece la distribución de materia como fuente del campo en la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{1.14}$$

Esta ecuación no es siquiera Invariante-Lorentz y, además, olvida algo muy importante: en virtud de la equivalencia entre masa y energía, la energía asociada al propio campo gravitatorio debe actuar como fuente de sí misma, por lo que las ecuaciones del campo deben ser no lineales. Resumiendo un tanto las cosas, el razonamiento que lleva a las ecuaciones de Einstein es el siguiente: las fuentes del campo gravitatorio no son sólamente las distribuciones de masas en reposo. Cualquier forma de energía (incluida la energía del campo electromagnético) contribuye al campo gravitatorio. En consecuencia, la densidad de masa que aparece en la ecuación de Poisson debe ser sustituida por el tensor energía-momento $T^{\alpha\beta}$, que obedece a la ley de conservación

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{1.15}$$

En espacios no euclídeos, el objeto geométrico fundamental es el tensor de Riemann $R^{\alpha\beta\delta\gamma}$. El único tensor simétrico y con divergencia nula que podemos formar a partir del tensor de Riemann es el tensor de Einstein:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R, \tag{1.16}$$

donde $R^{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci y R el escalar de curvatura. Las ecuaciones de Einstein (ver [3]) resultan de igualar el tensor de Einstein con el tensor de energía-momento (salvo una constante de proporcionalidad):

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}, \tag{1.17}$$

siendo G la constante gravitatoria y c la velocidad de la luz.

2. En torno al origen de las teorías gauge

Cuando nos hacemos la pregunta: ¿cuál es el origen de las teorías físicas actuales (como el electromagnetismo o la relatividad general)?, a poco que reflexionemos nos damos cuenta de que la respuesta no es demasiado sencilla. En realidad, depende de con qué tipo de respuesta nos conformemos. Podemos adoptar una actitud pragmática, y quedarnos tranquilos afirmando que el electromagnetismo es una teoría que describe el comportamiento de las partículas cargadas en presencia de campos eléctricos y magnéticos, mediante las ecuaciones de Maxwell, y que su origen es puramente empírico. No obstante, las ecuaciones de Maxwell son lo suficientemente intrincadas como para no pensar en la existencia de un principio fundamental subyacente que las determine. Intentemos ahora ahondar en esta idea y analizar los principios fundamentales que sirven de base a las teorías físicas.

Empecemos analizando el alcance de la siguiente idea: invariancia de ecuaciones, con un contenido físico, frente a ciertos tipos de transformaciones.

El nivel más elemental en el que encontramos una primera invariancia lo constituyen las transformaciones de Galileo. Como es bien conocido, lo pasamos por alto.

El siguiente nivel es de mayor alcance; nos dice que las ecuaciones de la física deben ser invariantes bajo las transformaciones de Lorentz:

$$
\begin{aligned}
t &= \gamma(t' - \frac{v}{c^2} x') \\
x &= \gamma(x' - vt') \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}
$$

$$
\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
$$

(2.1) (2.2)

Como las transformaciones de Lorentz forman un grupo, decimos que las ecuaciones de la física deben ser invariantes bajo el grupo de Lorentz. Nótese que las transformaciones de Lorentz no determinan una teoría, sólamente imponen la restricción de que las ecuaciones de cualquier teoría (formulable en el contexto del espacio-tiempo plano de Minkowski) resulten invariantes frente al grupo de Lorentz. Las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac verifican dicha propiedad.

En el siguiente nivel encontramos la Relatividad General. Sus ecuaciones satisfacen al principio de covariancia general, es decir, mantienen su forma bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas.

Al igual que ocurre con las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones de Einstein no pueden deducirse de un principio fundamental (al menos no conocemos dicho principio). Sin embargo, una vez que concluimos que un campo gravitatorio produce (o equivale) a un espacio-tiempo curvo, las ecuaciones de Einstein son el resultado de una serie de razonamientos de tipo físico.

El comienzo de las teorías gauge puede fijarse en el 1 de marzo de 1918. En una carta dirigida a Einstein, el matemático y físico alemán Hermann Weyl escribe:

> *Dieser Tage ist es mir, wie ich glaube, gelungen, Elektrizität und Gravitation aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten. Es ergibt sich ein völlig bestimmtes Wirkungs-Prinzip, das im elektrizitätsfreien Feld auf Ihre Gravitationsgleichungen führt, gravitationfreien dagegen Gleichungen ergibt, die in erster Annäherung mit den Maxwellschen übereinstimmen. Im allgemeinsten Fall werden diese Gl. allerdings 4. Ordnung. Darf ich Ihnen, wenn ich's ausgearbeitet habe, das Manuskript (etwa 19 Seiten) zuschicken, dass Sie's vielleicht in der Berliner Akademie vorlegen?*
>
> [Durante estos días, creo que he conseguido obtener la gravitación y el electromagnetismo a partir de una misma fuente. Resulta un principio de acción perfectamente determinado que, en ausencia de campos electromagnéticos, conduce a sus ecuaciones gravitatorias. Por el contrario, en ausencia de gravitación aparecen ecuaciones que, en primera aproximación, coinciden con las de Maxwell. Sin embargo, en el caso general, las ecuaciones resultan de cuarto orden. ¿Podría enviarle el manuscrito (unas 19 páginas) para que usted, tal vez, las presentase en la Academia de Berlin?]

De la primera impresión que produjo a Einstein el trabajo de Weyl da idea su inmediata respuesta:

> *Ihre Abhandlung ist gekommen. Es ist ein Genie-Streich ersten Ranges. Allerdings war ich bisher nicht imstande, meinen Masstab-Einwand zu erledigen. Darüber ein andermal ausfürhrlicher.*
>
> [Su manuscrito ha llegado. Es un golpe de genio de primer orden. Sin embargo, hasta ahora no he conseguido resolver mi objeción con la barra de medida. Sobre esto, y con más detalle, en otra ocasión.]

A pesar del elogio, ya en esta primera respuesta, aparece, aunque veladamente, la objeción que acabaría invalidando la teoría de Weyl. En cualquier caso, bien puede decirse que nunca una teoría equivocada ha dado resultados tan fecundos.

3. Generalización de Weyl de la geometría de Riemann

Existe una propiedad fundamental que caracteriza la geometría de Riemann. Supongamos que tenemos un vector localizado en algún punto del espacio y que le sometemos a un pequeño desplazamiento procurando mantenerlo paralelo a sí mismo lo mejor que podamos. Supongamos que continuamos desplazándolo siguiendo una curva cerrada que acaba en el punto original. Si el espacio es curvo, nos encontramos con que el vector, en general, apunta en una dirección distinta de la inicial.

Podemos enunciar en forma matemática la propiedad anterior diciendo que cuando desplazamos paralelamente un vector V a lo largo de una curva de parámetro t una distancia infinitesimal las componentes de V cambian, de forma que dicho cambio resulta ser

$$\frac{dV^\alpha}{dt} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}V^\gamma, \tag{2.3}$$

o, lo que es equivalente:

$$dV^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}dx^\beta V^\gamma. \tag{2.4}$$

Notemos que el cambio en las componentes resulta ser proporcional a las propias componentes y a las del desplazamiento.

La expresión anterior, junto con la que define el cuadrado del elemento de arco mediante el tensor métrico:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{2.5}$$

constituyen lo más esencial de la geometría de Riemann.

La generalización sugerida por Weyl [5, 6] consiste en proponer que no solamente cambian las componentes cuando movemos un vector a lo largo de una curva, sino también su longitud.

Supongamos que trasladamos paralelamente el vector V desde el punto P a un punto próximo P' (parámetro de la curva λ). La longitud del vector, en cualquier punto, viene dada por

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}}. \tag{2.6}$$

Siguiendo a Weyl asumimos, de forma axiomática, que el cambio en L es proporcional a la propia longitud L:

$$\frac{dL}{d\lambda} = -L\frac{d\varphi}{d\lambda}, \tag{2.7}$$

siendo φ una cierta función de λ, independiente de L, tal que

$$d\varphi = \phi_{\alpha}dx^{\alpha}. \tag{2.8}$$

Es decir:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \phi_{\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}. \tag{2.9}$$

En la base de la teoría general de la relatividad tenemos el principio de covariancia general, el cual requiere que las ecuaciones resulten invariantes frente a cualquier cambio de coordenadas. Weyl pensó que al incorporar a la geometría de Riemann la posibilidad de cambio en la longitud de un vector resultaba también necesario introducir un nuevo principio, al cual llamó "Eich-Invarianz Prinzip" (Principio de invariancia de calibración o invariancia gauge) – aquí aparece por primera ver la palabra clave de lo que sería una de las ideas más originales y fructíferas del siglo –, y exigir que las ecuaciones sean invariantes frente a cambios locales en la calibración. En forma matemática:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = f(x)g_{\mu\nu}, \tag{2.10}$$

(a este tipo de transformaciones se les denomina "conformes", y también a dos espacios cuyas métricas están relacionadas por (2.10)), siendo *f(x)* una función cualquiera de la coordenadas *x,* que, por conveniencia, vamos a escribir en forma exponencial:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\chi(x)} g_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

con lo que el elemento de arco se transforma de acuerdo con

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\chi} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{2\chi} ds^2, \\ d\tilde{s} &= e^\chi \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \\ d\tilde{s} &= e^\chi ds. \end{aligned} \tag{2.12}$$

(Nótese que no se transforman las coordenadas, sino la escala de medida). La ecuación anterior aplicada a la longitud del vector V conduce a:

$$\tilde{L} = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta} = \sqrt{e^{2\chi} g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta} = e^\chi L. \tag{2.13}$$

Partiendo de la ecuación (2.8) y posteriores, obtenemos las siguientes conclusiones:

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = -\tilde{L}\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = -\tilde{L}\tilde{\phi}\frac{dx^\alpha}{dt} = -Le^\chi \tilde{\phi}_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt}. \tag{2.14}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(e^\chi L) = e^\chi\left(\frac{d\chi}{dt}L - L\frac{d\varphi}{dt}\right) = e^\chi \left(\frac{d\chi}{dt} L - L\phi_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} \right) = \\ &e^\chi L \frac{dx^\alpha}{dt}\big(\chi_{,\alpha} - \phi_\alpha\big). \end{aligned}$$

Igualando (2.14) y esta última expresión:

$$\tilde{\phi}_\alpha = \phi_\alpha - \chi_{,\alpha}. \tag{2.15}$$

Supongamos ahora que movemos el vector desde el punto *P* hasta el punto P' situado, en esta ocasión, a una distancia finita. De las ecuaciones (2.7) y (2.8):

$$dL = -L\phi_\alpha dx^\alpha.$$

Integrando:

$$L_{P'} = L_P \exp\Bigl(-\int_P^{P'} \phi_\alpha dx^\alpha\Bigr). \tag{2.16}$$

La condición para que el cambio en la longitud resulte independiente del camino es:

$$\phi_\alpha dx^\alpha = df.$$

En consecuencia,

$$L_{P'} = L_P \left(e^{f_P} - e^{f_{P'}}\right). \tag{2.17}$$

Este es un caso particular; en general, la variación dependerá del camino.

Veamos ahora las implicaciones que resultan cuando la variación es independiente del camino.

Si df es una diferencial exacta

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \phi_\alpha,$$

y dado que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha},$$

tenemos

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Introduciendo el tensor de segundo orden, antisimétrico, $F_{\alpha\beta}$, la ecuación anterior equivale a escribir:

$$F_{\alpha\beta} \equiv \phi_{\alpha,\beta} - \phi_{\beta,\alpha} = 0. \tag{2.18}$$

Cuando la variación no es independiente del camino, el tensor de segundo orden definido por (2.18) es, en general, distinto de cero.

En vista del resultado anterior, parece que la generalización de la geometría de Riemann propuesta por Weyl conduce de manera natural a los potenciales del campo electromagnético y al tensor **F** (en función de los potenciales). Además, encontramos una conocida propiedad esencial del campo electromagnético: cuando efectuamos un cambio de calibración, los potenciales cambian de acuerdo con (2.15), dejando invariante $F_{\alpha\beta}$.

Poco después de su nacimiento, la teoría de Weyl fue invalidada por Einstein apoyándose en argumentos de tipo físico que, por razones de espacio, omitiremos aquí (ver [4]). Sin embargo, en 1927, F. London [2] propuso que, en lugar de las transformaciones

$$g_{ij} \rightarrow e^{2\chi(x)} g_{ij},$$

se considerasen transformaciones locales de fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\chi(x)} \psi(x), \tag{2.19}$$

aplicadas a la función de onda de una partícula. Como vamos a ver, este cambio de punto de vista (que fue aceptado inmediatamente por Weyl) tuvo consecuencias trascendentales.

La densidad lagrangiana que conduce a la ecuación de Dirac para una partícula libre es [1]:

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\overline{\psi}\psi. \tag{2.20}$$

La ecuación anterior resulta invariante frente a cambios globales de fase de la forma

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{i\varphi}\psi \\ \overline{\psi} &\rightarrow e^{-i\varphi}\overline{\psi} \end{aligned} \tag{2.21}$$

con φ = *cte.* Además, este cambio no afecta a la distribución de probabilidad:

$$\rho = \overline{\psi}\gamma^0\psi = (\psi^+\gamma^0)\gamma^0\psi = \psi^+\psi. \tag{2.22}$$

Si φ no es constante: φ=φ(*x*), la distribución de probabilidad no resulta afectada. Por el contrario, es fácil comprobar que la densidad lagrangiana se ve alterada por el cambio local de fase, apareciendo un término adicional:

$$-\overline{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\varphi)\psi.$$

Si buscamos una lagrangiana invariante frente a cambios locales de fase, encontramos que al añadir un término

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = q(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}, \tag{2.23}$$

junto con la condición simultánea al cambio de fase:

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu \varphi, \tag{2.24}$$

aparece una densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\mathcal{I}} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + q\overline{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - m\overline{\psi}\psi, \tag{2.25}$$

que resulta invariante frente a las transformaciones dadas por (2.21) con el factor de fase $\varphi = \varphi(x)$ dependiente de la posición. Es importante hacer notar que para mantener la invariancia bajo cambios locales de fase hemos tenido que introducir un nuevo campo vectorial A_μ, que puede identificarse con el campo electromagnético.

El término de interacción puede escribirse en la forma

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}} = q\overline{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu = J^\mu A_\mu. \tag{2.26}$$

Recordando la expresión para la densidad de corriente en la teoría de Dirac:

$$J^\mu = q\overline{\psi}\gamma^\mu \psi, \tag{2.27}$$

vemos, en la expresión (2.26), que el principio de invariancia gauge, en su nuevo contexto, nos ha proporcionado de manera natural el término de interacción carga-campo. Conceptualmente, es un resultado muy importante puesto que en la teoría clásica tenía que ser introducido a priori. Un corolario de no menos importancia es que podemos, a partir del resultado anterior, obtener la fuerza de Lorentz (recordemos que en electrodinámica clásica la ecuación de la fuerza de Lorentz hay que postularla).

Las ideas que hemos intentado esbozar constituyen el punto de partida de las teorías gauge actuales.

Bibliografía

[1] I.J.R. Aitchison, A.J.G. Hey: *Gauge Theories in Particle Physics*. Adam Hilger, 1989.
[2] F. London: Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl. *Z. Phys*. **42** (1927), 375-389.
[3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: *Gravitation*. Freeman & Company, 1973.
[4] W. Pauli: *Theory of Relativity*. Dover, 1981.
[5] H. Weyl: Zur Gravitationtheorie. *Ann. Phys*. **54** (1917), 117-145.
[6] H. Weyl: Gravitation und Elektrizität. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* (1918), 465-480.