

## ***Diseño Geométrico Asistido por Ordenador***

**SCTM03**



*Laureano González Vega*

Catedrático de Álgebra del Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación y Decano de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria

<http://frisco.matesco.unican.es/~gvega>

### ***Resumen***

La utilidad de los sistemas de CAD/CAM como un medio para incrementar la eficiencia en los procesos de simulación y diseño dentro del sector productivo es en la actualidad irrefutable. Ventajas como la reducción en tiempo de producción, mejora en la calidad del producto final y reducción de costes al disminuir el tiempo de implementación de cambios en el proceso de diseño son frecuentemente citadas como los mayores beneficios que produce la introducción de los sistemas de CAD/CAM en un entorno industrial.

Utilizando el Diseño Geométrico Asistido por Ordenador como línea argumental, este minicurso intenta proporcionar una introducción básica en esta disciplina que se encuentra en la intersección de las Matemáticas, la Informática y la Ingeniería junto con la presentación de cómo algunas técnicas algebraicas pueden ser de gran utilidad a la hora de resolver de forma satisfactoria problemas de manipulación de curvas y superficies en un entorno CAD/CAM.

### ***1. Introducción***

En este minicurso se persiguen tres objetivos bien definidos:

- La introducción de los conceptos y técnicas básicas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador.
- La presentación e integración de cómo las técnicas algebraicas de manipulación de los conjuntos solución de sistemas de ecuaciones algebraicas que proporciona el Álgebra Computacional pueden ser aplicadas a la resolución eficiente de problemas en la manipulación de curvas y superficies paramétricas.
- El estudio y potenciación de las herramientas gráficas que proporcionan los Sistemas de Cálculo Simbólico de propósito general (Maple en nuestro caso particular) junto con el desarrollo, en este sistema, de módulos de simulación específicos para modelado geométrico y visualización.

Este minicurso se centra en mostrar, primero, cómo técnicas procedentes del Álgebra Computacional pueden ser de gran utilidad en la resolución de problemas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador y, segundo, cómo cualquier Sistema de Cálculo Simbólico (Maple en nuestro caso) puede ser utilizado como un sistema de simulación donde probar la eficiencia y validez de métodos y algoritmos en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador. Asimismo se mostrará cómo integrar de forma sencilla estas técnicas algebraicas en un entorno CAD/CAM como puede ser ACIS (ver <http://www.spatial.com>), producto de libre distribución en instituciones educativas.

## 2. Introducción al Diseño Geométrico

Las entidades B-spline (y Bézier) representan actualmente un standard industrial para la representación, el diseño y el intercambio de datos de informaciones geométricas mediante medios informáticos. La sección comienza con las definiciones y propiedades generales de las curvas Bézier y B-spline (racionales y polinomiales).

Si  $N$  es un número entero positivo entonces los **polinomios de Bernstein**  $B_{i,(N)}$  de orden  $N$  (grado  $N - 1$ ) se definen de la siguiente manera:

$$B_{i,(N)}(u) = \binom{N-1}{i} u^i (1-u)^{N-1-i}, \quad i \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Una **curva Bézier racional** de orden  $N$  (grado  $N - 1$ ),  $C_N(u)$ , se define como:

$$C_N(u) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} B_{i,(N)}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^{N-1} B_{i,(N)}(u) w_i}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

donde  $\{P_i : 0 \leq i \leq N - 1\}$  representan los puntos de control (que forman el polígono de control),  $\{w_i : 0 \leq i \leq N - 1\}$  representan los pesos  $\{w_i \geq 0 : 0 \leq i \leq N - 1\}$  y  $\{B_{i,(N)} : 0 \leq i \leq N - 1\}$  son los polinomios de Bernstein de orden  $N$ . Si todos los  $w_i$  son iguales y distintos de cero entonces la curva Bézier es una curva **polinomial**.

Se introducen a continuación las curvas B-spline, lo que requiere la definición de las funciones básicas. Sea  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  una sucesión no decreciente de números reales ( $u_i \leq u_{i+1}$ ,  $i \in \{0, \dots, m - 1\}$ ), que se denominan nodos. Las **funciones básicas** de orden  $N$  se definen recursivamente sobre el vector de nodos  $U$  de la siguiente forma:

$$B_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B_{i,N}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+N-1} - u_i} B_{i,N-1}(u) + \frac{u_{i+N} - u}{u_{i+N} - u_{i+1}} B_{i+1,N-1}(u).$$

Se observa que en la definición recursiva anterior pueden aparecer cocientes  $0/0$  que, por convenio, se definen como 0. Las funciones  $B_{i,N}(u)$  son polinomios a trozos, definidos sobre  $\mathbb{R}$ , pero solamente el intervalo  $[u_0, u_m]$  presenta interés. Se estudian a continuación las propiedades más importantes de las funciones básicas que determinaran las características geométricas de las curvas y superficies B-spline.

Una **curva B-spline racional** de orden  $N$ ,  $C_N(u)$ , se define como:

$$\mathbf{C}_N(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,N}(u)w_i\mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,N}(u)w_i}, \quad a \leq u \leq b,$$

donde  $\{\mathbf{P}_i : 0 \leq i \leq n\}$  representan los puntos de control (que forman el polígono de control),  $\{w_i : 0 \leq i \leq n\}$  representan los pesos  $\{w_i \geq 0 : 0 \leq i \leq n\}$  y  $\{B_{i,N}(u) : 0 \leq i \leq n\}$  son las funciones básicas de orden  $N$  definidas sobre el vector no periódico de nodos

$$U = \{u_0, \dots, u_{n+N}\}$$

con  $u_0 = u_1 = \dots = u_{N_1-1} = a$  y  $u_{n_1} = u_{n_1+1} = \dots = u_{n_1+N_1-1} = b$ . Si todos los  $w_i$  son iguales y distintos de cero entonces la curva B-spline es una curva **polinomial**. Si el vector de nodos  $U$  no tiene nodos internos (i.e. si  $n = N - 1$ ) entonces la curva B-spline (racional) se convierte en una curva Bézier (racional).

Definiendo las funciones básicas racionales

$$R_{i,N}(u) = \frac{B_{i,N}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,N}(u)w_j}$$

se puede reescribir la definición de curva B-spline de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}_N(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,N}(u)\mathbf{P}_i, \quad a \leq u \leq b.$$

A continuación se presentan una serie de propiedades de las curvas B-spline, que se derivan de las propiedades de las funciones básicas:

- $\mathbf{C}_N(0) = \mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{C}_N(1) = \mathbf{P}_n$ .
- $R_{i,N}(u) = 0$  si  $u \notin [u_i, u_{i+N})$ .
- En cualquier intervalo  $[u_j, u_{j+1})$  a lo sumo  $N$  de las funciones básicas racionales  $R_{i,N}(u)$  son no nulas:  $R_{j-N+1,N}(u), \dots, R_{j+1,N}(u)$  y  $R_{j,N}(u)$ .
- Las derivadas de una función básica racional  $R_{i,N}(u)$  están definidas en el interior de cada intervalo de nodos distintos. En un nodo  $u_j$ ,  $R_{i,N}(u)$  (y por lo tanto  $\mathbf{C}_N(u)$ ) es derivable  $N - 1 - k$  veces, donde  $k$  es la multiplicidad del nodo  $u_j$ .
- Aplicar una transformación afín a una curva B-spline racional se reduce a la aplicación de dicha transformación a todos sus puntos de control.

- Si  $u \in [u_i, u_{i+1})$  entonces  $C_N(u)$  está dentro de la envolvente convexa generada por los puntos de control  $\mathbf{P}_{i-N+1}, \dots, \mathbf{P}_i$ .
- El número de intersecciones de cualquier plano (en el caso de las curvas tridimensionales) o cualquier recta (en el caso de las curvas bidimensionales) con una curva B-spline racional está acotado superiormente por el número de intersecciones del plano (o de la recta) con el polígono de control.
- Si se modifican los valores del punto de control  $\mathbf{P}_i$  o del peso  $w_i$ , la modificación se refleja sólo en aquella parte de la curva correspondiente al intervalo  $[u_i, u_{i+N})$ .

Las curvas B-spline racionales (al ser curvas racionales con un denominador común) tienen una interpretación geométrica elegante que determina una manera eficiente de almacenarlas y procesarlas. Así, se utilizarán las coordenadas homogéneas para representar una curva B-spline racional en el espacio  $n$ -dimensional como una curva B-spline polinomial en el espacio  $(n + 1)$ -dimensional. Esta presentación permite derivar algoritmos muy eficientes de cálculo de las derivadas de las curvas B-spline racionales.

Se finaliza la sección presentando las definiciones y propiedades generales de las superficies Bézier y B-spline (racionales y polinomiales). **Una superficie Bézier racional** de orden  $(N_1, N_2)$  se define como

$$S_{N_1, N_2}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} B_{i, (N_1)}(u) B_{j, (N_2)}(v) w_{i, j} \mathbf{P}_{i, j}}{\sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} B_{i, (N_1)}(u) B_{j, (N_2)}(v) w_{i, j}}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d,$$

donde  $\{\mathbf{P}_{i, j} : 0 \leq i \leq N_1 - 1, 0 \leq j \leq N_2 - 1\}$  representan los puntos de control,

$$\{w_{i, j} : 0 \leq i \leq N_1 - 1, 0 \leq j \leq N_2 - 1\}$$

representan los pesos  $\{w_{i, j} \geq 0 : 0 \leq i \leq N_1 - 1, 0 \leq j \leq N_2 - 1\}$ , y

$$\{B_{i, (N_1)} : 0 \leq i \leq N_1 - 1\},$$

$$\{B_{j, (N_2)} : 0 \leq j \leq N_2 - 1\}$$

son los polinomios de Bernstein de orden  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente. Si todos los  $w_{i, j}$  son iguales y distintos de cero entonces la superficie Bézier es una superficie **polinomial**.

**Una superficie B-spline racional** de orden  $(N_1, N_2)$  se define como

$$S_{N_1, N_2}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{i, N_1}(u) B_{j, N_2}(v) w_{i, j} \mathbf{P}_{i, j}}{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{i, N_1}(u) B_{j, N_2}(v) w_{i, j}}, \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d,$$

donde  $\{\mathbf{P}_{i,j} : 0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1\}$  representan los puntos de control,

$$\{w_{i,j} : 0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1\}$$

representan los pesos  $\{w_{i,j} \geq 0; 0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1\}$ , y  $\{B_{i,N_1} : 0 \leq i \leq n_1\}$ ,  $\{B_{j,N_2} : 0 \leq j \leq n_2\}$  son las funciones básicas de orden  $N_1$  y  $N_2$  respectivamente, definidas sobre los vectores no periódicos de nodos

$$U = \{u_0, \dots, u_{n_1+N_1}\} \text{ y } V = \{v_0, \dots, v_{n_2+N_2}\}$$

respectivamente, con

$$u_0 = \dots = u_{N_1-1} = a, u_{n_1} = \dots = u_{n_1+N_1-1} = b,$$

$$v_0 = \dots = v_{N_2-1} = c, v_{n_2} = \dots = v_{n_2+N_2-1} = d.$$

Si todos los  $w_{i,j}$  son iguales y distintos de cero, entonces la superficie B-spline es una superficie **polinomial**.

A continuación se presentan una serie de propiedades de las superficies B-spline racionales, que se derivan de las propiedades de las funciones básicas y que son similares a las propiedades ya estudiadas de las curvas B-spline racionales:

- $\mathbf{S}_{N_1, N_2}(0, 0) = \mathbf{P}_{0,0}$  y  $\mathbf{S}_{N_1, N_2}(1, 0) = \mathbf{P}_{n_1,0}$
- $\mathbf{S}_{N_1, N_2}(0, 1) = \mathbf{P}_{0,n_2}$  y  $\mathbf{S}_{N_1, N_2}(1, 1) = \mathbf{P}_{n_1, n_2}$
- Si  $n_1 = N_1 - 1$  y  $n_2 = N_2 - 1$  y  $U$  y  $V$  son vectores normalizados entonces  $\mathbf{S}_{N_1, N_2}(u, v)$  es una superficie Bézier.
- Aplicar una transformación afín a una superficie B-spline racional se reduce a la aplicación de dicha transformación a todos los puntos de control.
- Si  $(u, v) \in [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$  entonces  $\mathbf{S}_{N_1, N_2}(u, v)$  está dentro de la envolvente convexa generada por los puntos  $\mathbf{P}_{k,l}$ ,  $i - N_1 + 1 \leq k \leq i$ ,  $j - N_2 + 1 \leq l \leq j$ .
- Si se modifican los valores del punto de control  $\mathbf{P}_{i,j}$  o del peso  $w_{i,j}$ , la modificación se refleja solamente en aquella parte de la superficie correspondiente al rectángulo  $[u_i, u_{i+N_1}] \times [v_j, v_{j+N_2}]$ .

Como ocurría con las curvas B-spline, la utilización de coordenadas homogéneas para representar superficies B-spline es de gran utilidad computacional cuando se desean calcular derivadas o realizar otras operaciones de carácter computacional.

### 3. Implicitación de curvas y superficies racionales

Uno de los problemas fundamentales en el manejo de curvas y superficies paramétricas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador es la búsqueda de algoritmos eficientes de implicitación de curvas y superficies parametrizadas mediante funciones racionales. Aunque la representación paramétrica es la más adecuada para el trazado, la representación implícita debe ser considerada, por ejemplo, para decidir de forma eficiente la posición de un punto dado con respecto a una curva o superficie considerada.

Se notará aquí que el proceso de implicitación, para una curva o superficie B-spline, será aplicable sólo a cada uno de los trozos de ésta donde la función racional que proporciona la parametrización está determinada de forma unívoca. Sin embargo, la disposición del polígono de control y de la parametrización, junto con la ecuación implícita, motiva la reciente introducción en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador de lo que se conocen como A-splines o, en otras palabras, los splines implícitos que están resultando ser una herramienta muy útil en lo que se denomina modelado de superficies con forma libre (ver [1]).

El problema de la implicitación, en su formulación algebraica más general, se puede plantear en los siguientes términos (salvo que se diga lo contrario  $\mathbb{K}$  denota un cuerpo cualquiera, pero nuestro caso principal es  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ):

Dados  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ , con  $q_i \neq 0$  y  $\text{mcd}(p_i, q_i) = 1$ , el problema de la implicitación consiste en encontrar un subconjunto  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tal que el conjunto

$$S = \left\{ \left( \frac{p_1(b)}{q_1(b)}, \dots, \frac{p_n(b)}{q_n(b)} \right) \mid b \in \mathbb{K}^m, q_j(b) \neq 0 \right\}$$

se expresa implícitamente como el conjunto de los ceros comunes a los polinomios de  $\mathcal{F}$ .

Como no es posible determinar  $\mathcal{F}$  en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $V(\mathcal{F}) = S$ , puesto que algunos puntos de  $V(\mathcal{F})$  se pierden al considerar la representación paramétrica, se trata de obtener el subconjunto finito  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $V(\mathcal{F})$  es el conjunto algebraico más pequeño que contiene a  $S$ .

La explicación de la resolución del problema general comienza con el caso más sencillo en el que se asume que la parametrización considerada es polinomial. En esta situación, si la parametrización es

$$\{x_1 = p_1(y_1, \dots, y_m), \dots, x_n = p_n(y_1, \dots, y_m)\}$$

la representación implícita buscada puede determinarse mediante el cálculo de una Base de Gröbner. De forma más precisa, se considera el ideal  $\mathfrak{a}$  generado por

$$\{x_1 - p_1(y_1, \dots, y_m), \dots, x_n - p_n(y_1, \dots, y_m)\}$$

en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$  y se calcula una Base de Gröbner  $\mathcal{G}$  de  $\mathfrak{a}$  respecto al orden lexicográfico, con  $x_1 < \dots < x_n < y_1 < \dots < y_m$ . Entonces se tiene que el conjunto  $\mathcal{F}$  de ecuaciones implícitas es  $\mathcal{G} \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

A continuación se considera el caso más general que corresponde a las parametrizaciones racionales

$$\left\{ x_1 = \frac{p_1(y_1, \dots, y_m)}{q_1(y_1, \dots, y_m)}, \dots, x_n = \frac{p_n(y_1, \dots, y_m)}{q_n(y_1, \dots, y_m)} \right\}.$$

En esta situación el proceso anterior no es válido y requiere un estudio más detallado. Se considera la expresión libre de cuadrados  $q$  del polinomio  $\prod_{i=1}^n q_i$  y se calcula una Base de Gröbner  $\mathcal{B}$  del ideal generado por

$$\{q(y_1, \dots, y_m)z - 1, q_1(y_1, \dots, y_m)x_1 - p_1(y_1, \dots, y_m), \dots, q_n(y_1, \dots, y_m)x_n - p_n(y_1, \dots, y_m)\}$$

en  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z]$ , respecto al orden lexicográfico con

$$x_1 < \dots < x_n < y_1 < \dots < y_m < z.$$

Entonces se tiene que el conjunto  $\mathcal{F}$  de ecuaciones implícitas es  $\mathcal{B} \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .

Claramente, el proceso descrito anteriormente es válido para implicitar curvas y superficies paramétricas. De hecho, para curvas en el espacio se actúa de este modo. Sin embargo, para el caso de curvas planas y de superficies existen varias técnicas, basadas en distintas versiones de la clásica resultante, que evitan la utilización de Bases de Gröbner y, por tanto, conducen en algunos casos a algoritmos de implicitación más eficientes. En el caso de curvas planas, es decir, si la parametrización es

$$\mathcal{P}(t) = \left( \frac{p_1(t)}{q_1(t)}, \frac{p_2(t)}{q_2(t)} \right)$$

se demuestra que la ecuación implícita  $f(x, y)$  de la curva se puede obtener mediante el cálculo de una resultante. Se prueba así que

$$\text{resultante}_t(q_1(t)x - p_1(t), q_2(t)y - p_2(t)) = (f(x, y))^{\text{grado}(\varphi_{\mathcal{P}})},$$

donde  $\varphi_p$  es la aplicación racional inducida por la parametrización. Es decir, la resultante es la ecuación implícita elevada al índice de trazado de la parametrización. Por tanto, teniendo en cuenta este resultado, para calcular la ecuación implícita  $f(x, y)$  de la curva considerada se calcula la resultante antes indicada y se determina su factorización en factores libres de cuadrados. Así, como  $f(x, y)$  es irreducible, la factorización genera un único factor que es la ecuación implícita de la curva.

Otra opción de cálculo de la ecuación implícita sería reparametrizar  $\mathcal{P}(t)$  con el Algoritmo de Sederberg (ver [20]) para transformar la parametrización inicial en una parametrización propia y, por tanto, con índice de trazado 1. En esta situación, la resultante de Sylvester de la nueva parametrización es exactamente la ecuación implícita de la curva.

Para completar este estudio cabe también mencionar que existen otras técnicas más recientes como las basadas en el “*moving curves and surfaces*” (véase [22]) donde se determinan expresiones de la resultante mediante matrices de tamaño menor que el de la Matriz de Sylvester pero con coeficientes polinomiales algo más complicados. No está aún claro qué alternativa es la más eficiente desde el punto de vista computacional, por lo que en esta sección nos limitaremos a mencionar y justificar su existencia junto con un estudio experimental de éstas.

La implicitación de superficies se resuelve también mediante la utilización de resultantes multipolynomiales o multivariadas si la parametrización no tiene puntos base (véase [3]). De forma más precisa, dada una parametrización racional

$$\mathcal{P}(t, h) = \left( \frac{p_1(t, h)}{q(t, h)}, \frac{p_2(t, h)}{q(t, h)}, \frac{p_3(t, h)}{q(t, h)} \right),$$

con  $\text{mcd}(p_1, p_2, p_3, q) = 1$ , se definen los polinomios auxiliares

$$G_1(x, t, h) = q(t, h)x - p_1(t, h)$$

$$G_2(y, t, h) = q(t, h)y - p_2(t, h)$$

$$G_3(x, t, h) = q(t, h)z - p_3(t, h)$$

como polinomios en  $\mathbb{K}(x, y, z)[t, h]$ , y se calcula la resultante multivariada

$$R(x, y, z) = \text{resultante}(G_1, G_2, G_3).$$

A continuación se introduce la noción de puntos base de una parametrización  $\mathcal{P}(t, h)$  como los puntos de intersección de las curvas definidas por los polinomios  $p_i(t, h) = 0$  y  $q(t, h) = 0$ , y se indica que la existencia de puntos base imposibilita la aplicación directa de la resultante multivariable para resolver el problema de la implicitación. Para ello se demuestra que  $R(x, y, z)$  es idénticamente nulo si y sólo si la parametrización  $\mathcal{P}(t, h)$  tiene puntos base.

Seguidamente, mediante un razonamiento similar al realizado en el caso de las curvas planas, se deduce el siguiente resultado que se puede considerar como la generalización natural del resultado correspondiente para curvas planas: si la parametrización  $\mathcal{P}(t, h)$  no tiene puntos base entonces

$$R(x, y, z) = (f(x, y, z))^\ell$$

donde  $f(x, y, z)$  es la ecuación implícita de la superficie y  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Por tanto, a partir de este resultado, si no hay puntos base, el cálculo de la resultante multivariable y de su factorización en factores libres de cuadrados proporciona la ecuación implícita deseada.

Asimismo, existen otras técnicas como las resultantes perturbadas (véase [3]) o las resultantes residuales (véase [2]) que usan presentaciones alternativas de la resultante multivariable y que evitan los problemas que proporcionan los puntos base pero originan expresiones algebraicas más complicadas de generar y manipular.

En la práctica la utilización de los algoritmos de implicitación basados en técnicas de eliminación causa ciertos problemas que se pueden poner de manifiesto con el siguiente ejemplo. Se considera la superficie bicúbica  $\mathcal{S}$  (véase la Figura 1) definida por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(u, v) = 3v(v - 1)^2 + (u - 1)^3 + 3u$$

$$y(u, v) = 3u(u - 1)^2 + v^3 + 3v$$

$$z(u, v) = 3u(5u - 5 - u^2)v^3 - 3(u^3 + 6u^2 - 9u + 1)v^2 + v(6u^3 + 9u^2 - 18u + 3) - 3u(u - 1)$$

donde  $u, v \in [0, 1]$ .

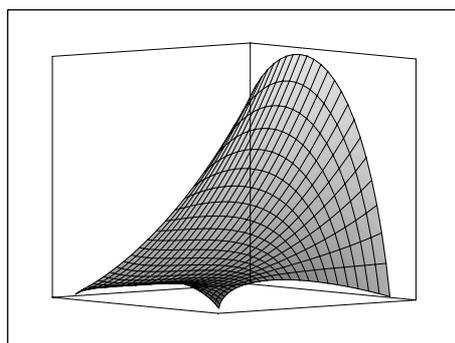


Figura 1. Superficie bicúbica.

Uno de los primeros problemas que se pueden plantear en esta situación es determinar (si existen) los puntos de intersección de la superficie  $\mathcal{S}$  con la recta  $x = u, y = u, z = u$ . Esto implica resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u &= 3t(t - 1)^2 + (s - 1)^3 + 3s \\ u &= 3s(s - 1)^2 + t^3 + 3t \\ u &= -3s(s^2 - 5s + 5)t^3 - 3(s^3 + 6s^2 - 9s + 1)t^2 + t(6s^3 + 9s^2 - 18s + 3) - 3s(s - 1) \end{aligned}$$

En este caso particular se obtiene sólomente un punto de intersección, con coordenadas

$$(0.5561, 0.5561, 0.5561)$$

que corresponde a  $s = 0.2748$  y  $t = 0.0408$ .

Otra manera de resolver este problema consiste en determinar primero la ecuación implícita  $H(x, y, z) = 0$  de  $\mathcal{S}$ . Una vez calculada ésta el problema anterior se reduce a resolver la ecuación (en una variable)  $H(u, u, u) = 0$ . Análogamente, cualquier intersección de  $\mathcal{S}$  con una curva se puede abordar resolviendo una ecuación en una variable. En este caso particular, la ecuación implícita de  $\mathcal{S}$  es:

$$H(x, y, z) = z^9 + \sum_{i=1}^9 \mathbf{r}_i(x, y)z^{9-i},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(x, y) &= -\frac{233469x}{2048} + \frac{188595y}{2048} - \frac{112832595}{262144} - \frac{81x^2}{64} + \frac{135xy}{32} - \frac{81y^2}{64} \\ \mathbf{r}_2(x, y) &= -\frac{20972672709381x}{536870912} + \frac{17975329363179y}{536870912} - \frac{729y^4}{8192} - \frac{729x^4}{8192} + \frac{1215x^3y}{2048} - \frac{4779x^2y^2}{4096} + \frac{1215xy^3}{2048} - \\ &\quad \frac{4105971x^3}{65536} + \frac{3129597y^3}{65536} + \frac{14456151x^2y}{65536} - \frac{13181049xy^2}{65536} - \frac{54187594407x^2}{16777216} + \frac{48101467761xy}{8388608} - \\ &\quad \frac{38812918311y^2}{16777216} - \frac{22656991982391171}{137438953472} - \frac{1}{2} \left( \frac{233469x}{2048} - \frac{188595y}{2048} + \frac{112832595}{262144} + \frac{81x^2}{64} - \right. \\ &\quad \left. \frac{135xy}{32} + \frac{81y^2}{64} \right) \left( -\frac{233469x}{2048} + \frac{188595y}{2048} - \frac{112832595}{262144} - \frac{81x^2}{64} + \frac{135xy}{32} - \frac{81y^2}{64} \right) \\ \mathbf{r}_3(x, y) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Substituyendo  $x = u, y = u, z = u$  se obtiene una ecuación de grado 18 en  $u$ , muy fácil de resolver:

$$5159780352u^{18} - 609499054080u^{17} + \dots + 3707912273492242256259566313 = 0.$$

El problema que surge con esta filosofía de trabajo consiste en que, aunque hay métodos para calcular la ecuación implícita  $H(x, y, z) = 0$ , estos métodos son muy ineficientes y difícilmente se pueden integrar en los softwares CAD/CAM, donde los usuarios deben recibir las respuestas a sus demandas computacionales en tiempo real. Se finaliza la sección mostrando algunas alternativas que permiten la utilización de ecuaciones implícitas como puede ser la implícitación genérica (ver [17]) o la implícitación aproximada (ver [7] y [8]).

#### 4. Manipulación de curvas planas definidas implícitamente

Muchos problemas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador se reducen al cálculo del grafo de una curva plana algebraica definida implícitamente. Por ejemplo, si se quiere seccionar la superficie

$$x = \frac{X(s, t)}{W(s, t)}, \quad y = \frac{Y(s, t)}{W(s, t)}, \quad z = \frac{Z(s, t)}{W(s, t)}; \quad s, t \in [0, 1]$$

(definida por los polinomios reales  $X(s, t)$ ,  $Y(s, t)$ ,  $Z(s, t)$  y  $W(s, t)$ ) con respecto al plano  $x = x_0$ , hay dos posibilidades: o se dibuja en el cuadrado unidad  $[0, 1] \times [0, 1]$  la curva algebraica plana definida por

$$X(s, t) - x_0 W(s, t) = 0$$

y luego se eleva este dibujo a la superficie considerada, o, si la ecuación implícita  $H(x, y, z)$  de la superficie considerada ha sido calculada, el proceso de “elevar el dibujo” se puede evitar calculando el grafo de la curva algebraica plana definida por  $H(x_0, y, z) = 0$ . De todas formas, las dos posibilidades requieren dibujar una curva algebraica plana definida implícitamente.

En esta sección se presentan varios algoritmos que, dado un polinomio  $f(x, y)$  en  $\mathbb{R}[x, y]$ , calcula un grafo lineal que representa la estructura topológica de la curva definida por el polinomio considerado (incluso en el caso que la curva considerada tenga singularidades “complicadas”). El principal objetivo de este algoritmo es generar (de la forma más rápida posible) información correcta sobre el conjunto  $f(x, y) = 0$  que puede ser utilizada posteriormente para abordar el trazado de la curva considerada. Por ejemplo, si se considera el polinomio

$$\begin{aligned} g(x, y) = & 279756x + 279936xy^4 - 559692y^2x - 15583x^3 + 217x^5 + \frac{130218}{5}x^2 - \frac{23039}{10}x^4 + \\ & + \frac{359}{10}x^6 + 370656y^4 - \frac{3726432}{5}y^2 - 72774y^2x^2 + \frac{12947}{5}y^2x^4 + 1296y^6 + \\ & + 46728y^4x^2 + 15588y^2x^3 + \frac{37333439}{100} \end{aligned}$$

se obtiene un caso de decisión topológica complicado: de su dibujo (Figura 2, izquierda), difícilmente se puede deducir cuál es la estructura topológica de la curva (véase la Figura 2, derecha).



Figura 2.  $g(x, y) = 0$ .

Determinar (incluso topológicamente) el grafo correspondiente a una curva algebraica plana definida implícitamente representa un problema de especial interés, en primer lugar, en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador por ser un subproblema básico que aparece con frecuencia en la práctica y, en segundo lugar, en Álgebra Computacional, siendo este problema el “responsable” de muchos de los avances sobre subresultantes, cálculo simbólico del número de raíces reales, cálculo con infinitésimos, etc. No es tampoco desdeñable su conexión, como herramienta computacional, con la primera parte del Problema XVI de Hilbert sobre las distribuciones posibles de los óvalos de una curva algebraica plana (sin puntos singulares) definida por un polinomio de grado  $n$ .

La estrategia usual para determinar (desde un punto de vista topológico) el grafo de una curva algebraica plana definida implícitamente por un polinomio  $f(x, y) \in [x, y]$  es la siguiente:

- <sub>1</sub> Calcular el discriminante de  $f$  con respecto a  $y$ ,  $R(x)$ , y determinar sus raíces reales,  $\alpha_1 < \dots < \alpha_r$ .
- <sub>2</sub> Para cada  $\alpha_i$ , determinar las raíces reales de  $f(\alpha_i, y)$ ,  $\beta_{i,1} < \dots < \beta_{i,s_i}$ .
- <sub>3</sub> Para cada  $\alpha_i$  y  $\beta_{i,j}$ , calcular el número de ramas a la derecha y a la izquierda del punto  $(\alpha_i, \beta_{i,j})$ .

Toda esta información es suficiente para determinar la estructura topológica de la curva definida por  $f(x, y)$ .

Para evitar los posibles problemas numéricos en el cálculo de las raíces de  $R(x)$  y sobre todo de cada  $f(\alpha_i, y)$  que tiene siempre raíces múltiples, antes de empezar los cálculos se realiza un cambio lineal y genérico de coordenadas con el fin de que se cumpla la siguiente condición para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\#\{\beta \in \mathbb{C} : f(\alpha, \beta) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0\} \leq 1.$$

Esta condición nos asegura que para cada  $\alpha_i$  raíz real de  $R(x)$ , hay, a lo sumo, un punto crítico (un punto singular ó un punto de tangente vertical) de la curva en la línea vertical  $x = \alpha_i$  y que la coordenada en  $y$  de tal punto se puede describir de forma racional en términos de  $\alpha_i$  mediante la utilización de subresultantes o de técnicas matriciales que involucran la determinación de los valores propios generalizados de una haz de matrices que se construye a partir de la matriz de Sylvester. Además, esta condición permite construir de forma simbólica, para cada  $f(\alpha_i, y)$ , un polinomio libre de cuadrados  $g(\alpha_i, y)$  cuyas raíces reales se calculan para finalizar el paso  $\bullet_2$ . De esta forma, el paso  $\bullet_3$  se reduce al cálculo del número de raíces reales de los polinomios libres de cuadrados  $f(\gamma_i, y)$  ( $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ ) con  $\gamma_0 = -\infty$ ,  $\gamma_r = \infty$  y  $\gamma_i$  cualquier número real en el intervalo abierto  $(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ . Se obtiene así un grafo de la curva considerada, que será muy útil a la hora de trazar de forma numérica dicha curva, ya que se sabe exactamente cómo proceder al acercarse a un punto “complicado”.

#### 4. Offsetting

Esta sección se dedica al desarrollo de algoritmos para la construcción y manipulación de offsets. En [14], C. Hoffmann inició una línea de trabajo que trata de reducir problemas de cálculo de esta construcción geométrica a problemas algebraicos de eliminación y que constituye nuestro punto de partida.

Las offsets ocupan un lugar destacado en el diseño geométrico asistido por ordenador, principalmente por sus múltiples aplicaciones, entre las que destacan la planificación de trayectorias de robots, el análisis de tolerancia, el modelado geométrico, o la generalización de diagramas de Voronoi.

La sección comienza con la definición de offset. Para ello, se distinguen dos niveles. En el primero se da una idea intuitiva de la noción geométrica de offset, y en el segundo se muestra cómo el resultado de esta construcción provoca un aumento considerable en la complejidad del objeto resultante.

De forma intuitiva la noción de offset de una curva o una superficie se introduce como el lugar geométrico de los puntos a distancia  $d$  de la curva o superficie considerada. Es decir, la offset de una curva (resp. una superficie) se puede considerar como la envolvente del sistema de circunferencias (resp. esferas) de radio  $d$  centradas en los puntos de la curva (resp. superficie) original. Por tanto, la offset está formada por los puntos intersección de las circunferencias (resp. esferas) y la recta normal a la conjunto inicial en el centro. Así, si  $\mathcal{P}(\bar{t})$  es una parametrización de la curva o superficie inicial, los puntos en la offset vienen caracterizados por la fórmula

$$\mathcal{P}(\bar{t}) \pm \frac{d}{\|\mathcal{N}(\bar{t})\|} \mathcal{N}(\bar{t})$$

donde  $\mathcal{N}(\bar{t})$  es el vector normal a la curva o superficie inicial en el punto  $\mathcal{P}(\bar{t})$ . Se muestra entonces el ejemplo clásico de la offset de una parábola a distancia 1 (véase Figura 3). En el ejemplo se observa que, aunque se ha partido de una parábola, la curva resultante es bastante más complicada en grado (se pasa de grado total 2 a grado total 6) y en singularidades (se pasa de una cónica irreducible y por tanto sin singularidades a una curva con varias singularidades). Se indica que esta situación no es casual y que, en general, el resultado de la construcción de offsets origina este tipo de problemas.

Asimismo, este ejemplo permite mostrar cómo las técnicas de implícitación desarrolladas en la sección 2 proporcionan la ecuación implícita de la offset cuando la curva o superficie original viene dada de forma implícita ( $y = x^2$ ) o en forma paramétrica ( $(t, t^2)$ ).

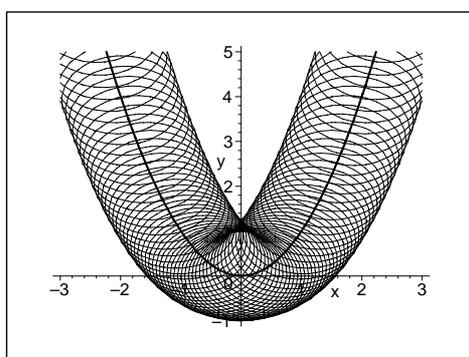


Figura 3. Offset de la parábola  $y = x^2$  a distancia 1.

Como se muestra en la Figura 4 el análisis de la variación de las características topológicas de la offset es un problema que está recientemente tomando un creciente interés. La aplicación de las técnicas mostradas en la sección 3 permite, por ejemplo, resolver de forma completamente satisfactoria este problema para el caso de las cónicas y las cúbicas en el plano (ver [12]).

Se termina esta introducción indicando que, en la actualidad, la mayoría de las aplicaciones requiere la construcción de offsets racionales y del cálculo de sus parametrizaciones y se indica que, en general, la racionalidad no se hereda mediante el cálculo de offsets.

Seguidamente, se procede a la definición rigurosa de curva o superficie offset. Para ello se observa que la construcción intuitiva anterior, aunque válida en la mayoría de los casos, conduce a situaciones no esperadas. Así, por ejemplo, si se toma como centro de la circunferencia o esfera una singularidad de la curva o superficie inicial aparecen dificultades al considerar el correspondiente vector normal (el ejemplo de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  es especialmente significativo en esta situación).

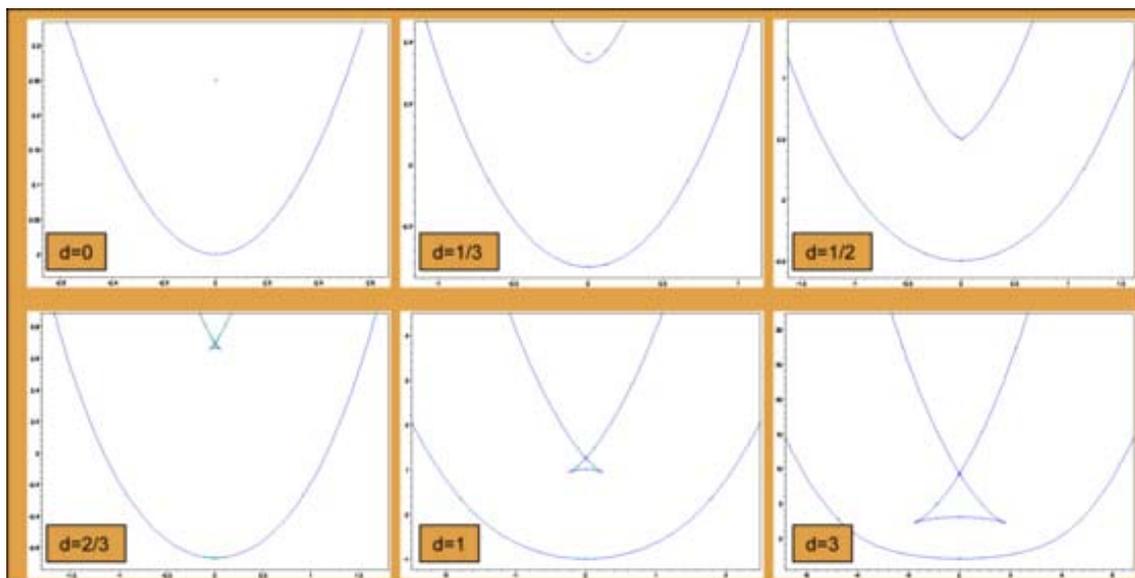


Figura 4. Variación de la topología de la offset de la parábola.

Para resolver estas dificultades se consideran, en primer lugar, sólo curvas o superficies reales para las cuales existe un abierto de puntos regulares. El problema de las singularidades se resuelve tomando el sistema de circunferencias o esferas con centros dentro del abierto de puntos regulares y considerando la clausura de Zariski de dicho conjunto. Asimismo, se demuestra que la offset de una curva o de una superficie es irreducible o tiene dos componentes que se corresponden con la idea intuitiva de offset interior y exterior.

### 5. Ejemplos

Se muestra en esta sección un conjunto de programas (junto con su aplicación a la resolución de problemas de manipulación de curvas y superficies) que implementan algunos de los algoritmos que se han desarrollado a lo largo de este minicurso.

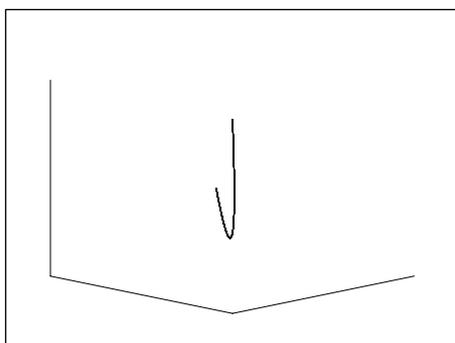
#### Implicitación genérica de superficies de revolución

Se determina la ecuación implícita genérica de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva que se introduce a continuación alrededor del eje X.

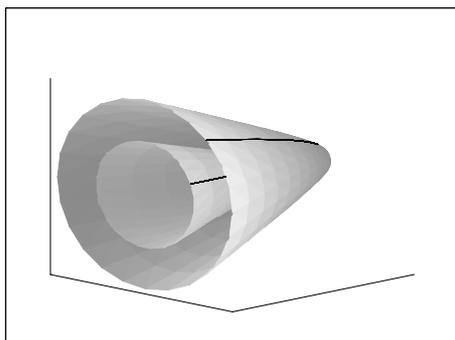
```
> c[1] := (c[1,2]*t**2+c[1,0]);
> c[2] := (c[2,2]*t**2+c[2,1]*t);
> c[3] := (c[3,2]*t**2+c[3,1]*t+c[3,0]);
> Eq := sort(collect(ImplicitSuperfRevolX(c[1],c[2],c[3],x,y,z,t),
> [x,y,z],distributed), [x,y,z]);
```

Se especializan los parámetros y se estudia cómo es la superficie de revolución que se ha obtenido.

```
> c[1,2]:=rand(1..50)/50:c[1,0]:=rand(1..50)/50:
> c[2,2]:=rand(1..50)/50:c[2,1]:=rand(1..50)/50:
> c[3,2]:=rand(1..50)/50:c[3,1]:=rand(1..50)/50:
> c[3,0]:=rand(1..50)/50:
> f[1]:=t -> c[1]:f[2]:=t -> c[2]:f[3]:=t -> c[3]:
> plot3d([f[1](t),f[2](t),f[3](t)],t=-6..6,u=0..1,axes=FRAME,
> orientation=[45,75],tickmarks=[0,0,0]);
```



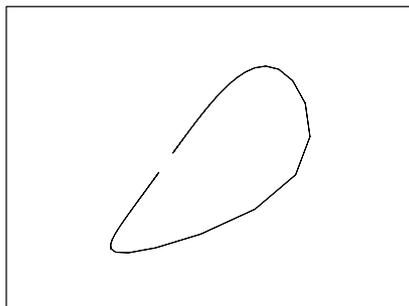
```
> plots[display]([
> plot3d([[f[1](t),[f[2](t),f3(t)],t=-2..2, u=0..1, axes=FRAME,
> orientation=[45,75]),
> plot3d([[f[1](t),[f[2](t)*cos(u)+[f[3](t)*sin(u),[f[3](t)*cos(u)-
> [f[2](t)*sin(u)],t=-2..2,u=0..2*Pi,axes=FRAME,orientation=[45,75],
> style=PATCHNOGRID,tickmarks=[0,0,0]])]);
```



### Seccionado de superficies de revolución

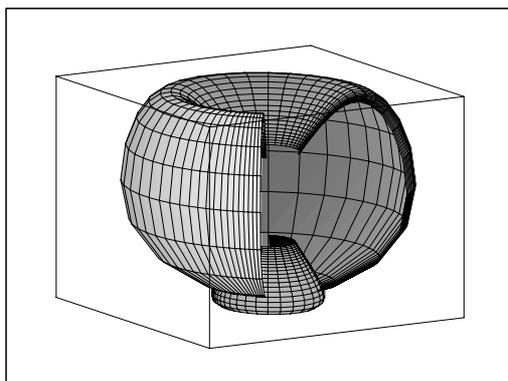
La curva  $C$  en  $Y=0$  definida por  $x=C_1(t)$ ,  $z=C_2(t)$  se va a rotar alrededor del eje  $OZ$ .

```
> C[1] := (2*t-1) / (1+t**2) ; C[2] := 0 ; C[3] := (1-t+t**2) / (2+t+t**2) ;
> plot3d([C[1],C[2],C[3]],t=-25..25,s=-1..1,
> orientation=[60,75],grid=[175,2],tickmarks=[0,0,0]);
```



Se muestra a continuación la superficie de revolución que genera la curva  $C$ .

```
> T[1] := C[1] * (2*s) / (1+s**2) - C[2] * (1-s**2) / (1+s**2) :
> T[2] := C[2] * (2*s) / (1+s**2) + C[1] * (1-s**2) / (1+s**2) : T[3] := C[3] :
> P1 := (a,b) -> plot3d([T[1],T[2],T[3]],s=a..b,t=-6..6,grid=[50,50],
> axes=BOXED,scaling=UNCONSTRAINED,projection=1,tickmarks=[0,0,0],
> orientation=[59,75]) : P1(-3,3);
```



La ecuación implícita de esta superficie de revolución se calcula de forma genérica.

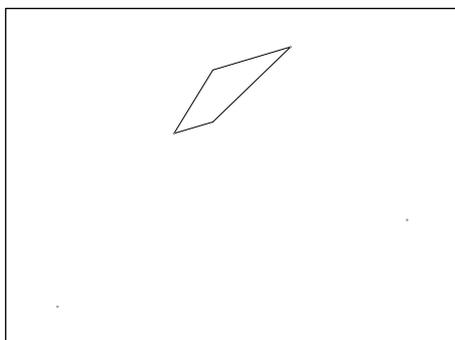
```
> toro := ImplicitSuperfRevolZ(C[1],C[2],C[3],x,y,z,t);
```

Se determina la que se obtiene al intersecar esta superficie de revolución con el plano  $y=1$ .

```
> Seccion[1] := subs(y=1,toro);
```

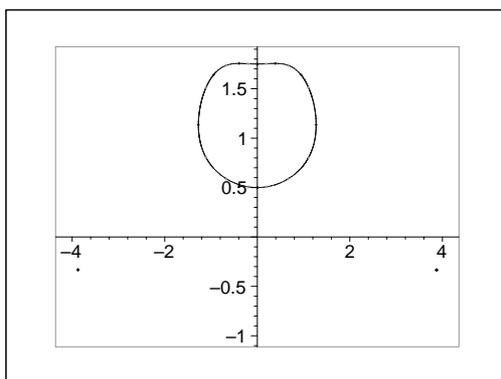
Se calcula la topología de esta sección que muestra la presencia de dos puntos aislados.

```
> principal(Seccion1,x,z,10,'black');
```

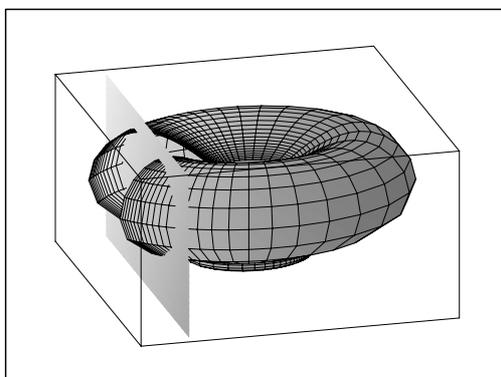


Se muestra finalmente la sección plana junto con su ubicación en la superficie de revolución inicial.

```
> plot_real_curve(Seccion[1],x,z,scaling=UNCONSTRAINED);
```



```
> P[2]:=y->plot3d([s,y,t],s=-2..2,t=0..2,style=PATCHNOGRID):
> plots[display](P[1](-4,4),P[2](1),grid=[50,50],axes=BOXED,
> scaling=UNCONSTRAINED,projection=1,tickmarks=[0,0,0],
> orientation=[165,57]);
```

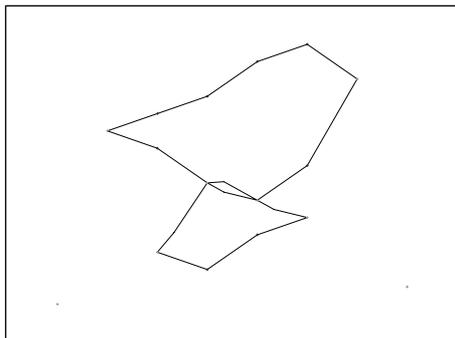


Se calcula a continuación la sección por el plano  $y=1/2$ :

```
> Seccion[2] := subs (y=1/2, toro) ;
```

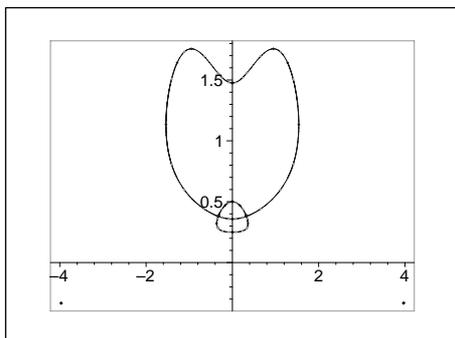
Topología de la sección:

```
> principal (Seccion[2], x, z, 20, 'black') ;
```

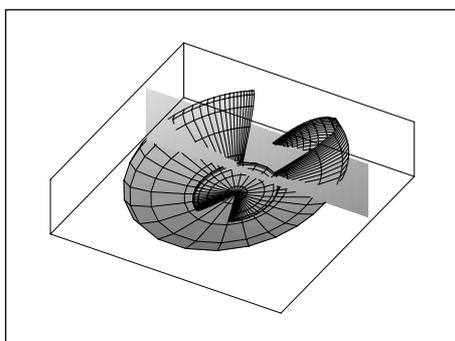


Grafo de la sección:

```
> plot_real_curve (Seccion[2], x, z, scaling=UNCONSTRAINED) ;
```



```
> plots[display] (P[1] (-4, 4), P[2] (1/2), grid=[50, 50], axes=BOXED,
> scaling=UNCONSTRAINED, projection=1, tickmarks=[0, 0, 0],
> orientation=[60, 161]) ;
```



## 6. Reconocimientos

Parcialmente subvencionado por DGESIC PB 98-0713-C02-02 (Ministerio de Educación y Cultura) y Proyecto GAIA II (Unión Europea).

## 7. Bibliografía

Aparte de las citas explícitas que se han hecho en algunas de las secciones de este minicurso, se debe indicar que recientemente han aparecido una serie de manuales que pueden ser de gran utilidad a la hora de elaborar un curso de estas características. Para la parte más ligada al Diseño Geométrico Asistido por Ordenador los manuales [19], [9] y [15] son especialmente recomendables. La exposición de C. Hoffmann en el manual [13] es la primera en la que aparece la utilización de técnicas algebraicas para la resolución de problemas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador.

Hay que destacar que la línea argumental de este minicurso está claramente inspirada por el excelente artículo de T. Sederberg (ver [21]) y por el “survey” que aparece en [10].

## Referencias

- [1] C. Bajaj, G. Xu, R. Holt, A. Netravali: NURBS approximation of A-splines and A-patches. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 2003.
- [2] L. Busé: *Residual resultant over the projective plane and the implicitization problem*. Proceedings of ISSAC 2001, pp. 48-55, 2001.
- [3] J. Canny, I. Emiris: Effective Incremental Algorithms for the Sparse Resultant and the Mixed Volume. *Journal of Symbolic Computation* **20** (1995), 117-149.
- [4] E.W. Chionh, R.N. Goldman: Using Multivariate Resultants to Find the Implicit Equation of a Rational Surface. *The Visual Computer* **8** (1992), 171-180.
- [5] Cohen, H. Cuyper, H. Sterk: *Some tapas of computer algebra*. Algorithms and Computations in Mathematics **4**. Springer-Verlag, 1999.
- [6] D. Cox, J. Little, D. O’Shea: *Using Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics **185**. Springer-Verlag, 1998.
- [7] T. Dokken: *Aspects of intersection algorithms and approximation*. Tesis Doctoral, University of Oslo (Noruega), 1997.
- [8] T. Dokken: *Approximate Implicitization*. *Mathematical Methods in CAGD*. Vanderbilt University Press, pp. 81-102, 2001.
- [9] G. Farin, J. Hoschek, M.-S. Koo: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier Science, 2002. [Disponible en <http://cagd.snu.ac.kr>].
- [10] L. González-Vega: Computer Aided Design and Modelling. En J. Grabmeier, E. Kaltofen, V. Weispfenning (editores): *Computer Algebra Handbook: Foundations, Applications, Systems*. Springer-Verlag, 2003.
- [11] L. González-Vega, I. Necula: Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves. *Computer Aided Geometric Design* **19** (2003), 719-743.
- [12] L. González-Vega, R. Sendra: Topological characterization of offset degenerations for conics and cubic plane curves. *Preprint*, 2002.
- [13] C.M. Hoffmann: *Geometric and Solid Modelling: An Introduction*. Morgan Kaufmann Publishers, 1989.

- 
- [14] C.M. Hoffmann: Algebraic and numerical techniques for offsets and blends. En *Computation of Curves and Surfaces*, NATO ASI Series **37**, pp. 499-528. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [15] T. Maekawa, N. Patrikalakis: Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing. Springer-Verlag, 2002.
- [16] R. McLeod, M.L. Baart: *Geometry and Interpolation of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 1998.
- [17] I. Necula: *Manipulación de curvas y superficies en CAGD mediante técnicas simbólico-numéricas*. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 2003.
- [18] V. Rovenski: *Geometry of Curves and Surfaces with Maple*. Birkhäuser, 2000.
- [19] D. Salomon: *Computer Graphics & Geometric Modeling*. Springer-Verlag, 1999.
- [20] T.W. Sederberg: Improperly Parametrized Rational Curves. *Computer Aided Geometric Design* **3** (1986), 67-75.
- [21] T.W. Sederberg: Applications to computer aided geometric design. En D.A. Cox, B. Sturmfels (editores): *Applications of Computational Algebraic Geometry*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **53**, pp. 67-89. AMS, 1998.
- [22] T.W. Sederberg, R.N. Goldman, H. Du: Implicitizing Rational Curves by the Method of Moving Algebraic Curves. *Journal of Symbolic Computation* **23** (1997), 153-175.

#### En Internet

<http://www.can.nl>

*CAIN Europe*

Computer Algebra Information Network.

<http://www.math.sintef.no/gaiatwo>

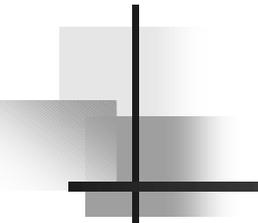
*Intersection algorithms for geometry based IT-applications using approximate algebraic methods*

Página web del proyecto GAIA II.

<http://www.spatial.com>

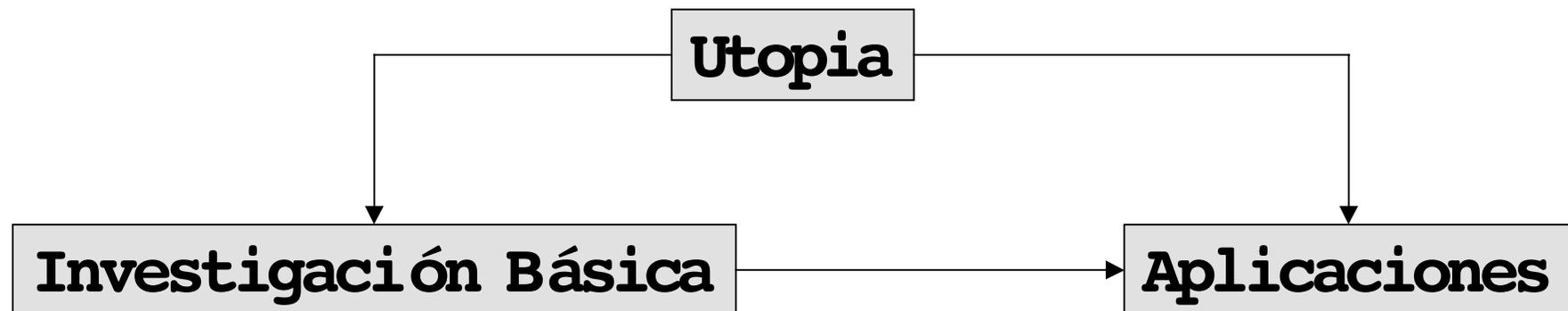
*3D Software Development Technologies*

Tecnologías de modelado en 3D.



# Las Matemáticas del Diseño Geométrico Asistido por Ordenador y sus Aplicaciones en la Industria

## Matemáticas e Industria



Laureano González Vega  
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

FEDER Project (1FD97-0409), 1999-2001

Integrating new algebraic-numerical techniques in Computer Aided Geometric Design (CAGD): Developing Problem Solving Environments and Implementation into an industrial CAD/CAM framework



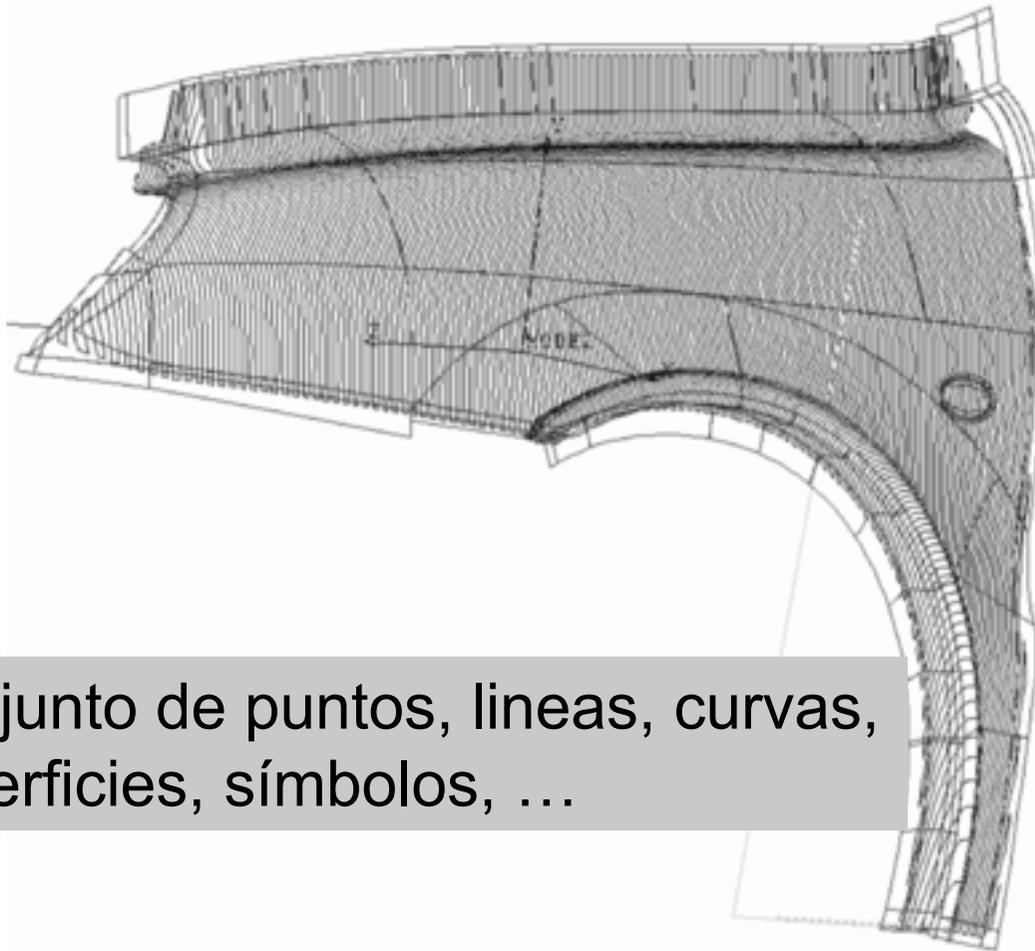
# Esquema

- **Motivación**
- **Implicitación en la práctica:**
  - ❖ **Implicitación genérica**
  - ❖ **Optimización de su evaluación**
- **Offsets**
- **Cálculo de topología de curvas definidas de forma implícita**
- **Aplicaciones:**
  - ❖ **Control del error de forma**
  - ❖ **Iluminación**
- **Un entorno de trabajo numérico/simbólico para CAGD**





# Definición matemática del troquel

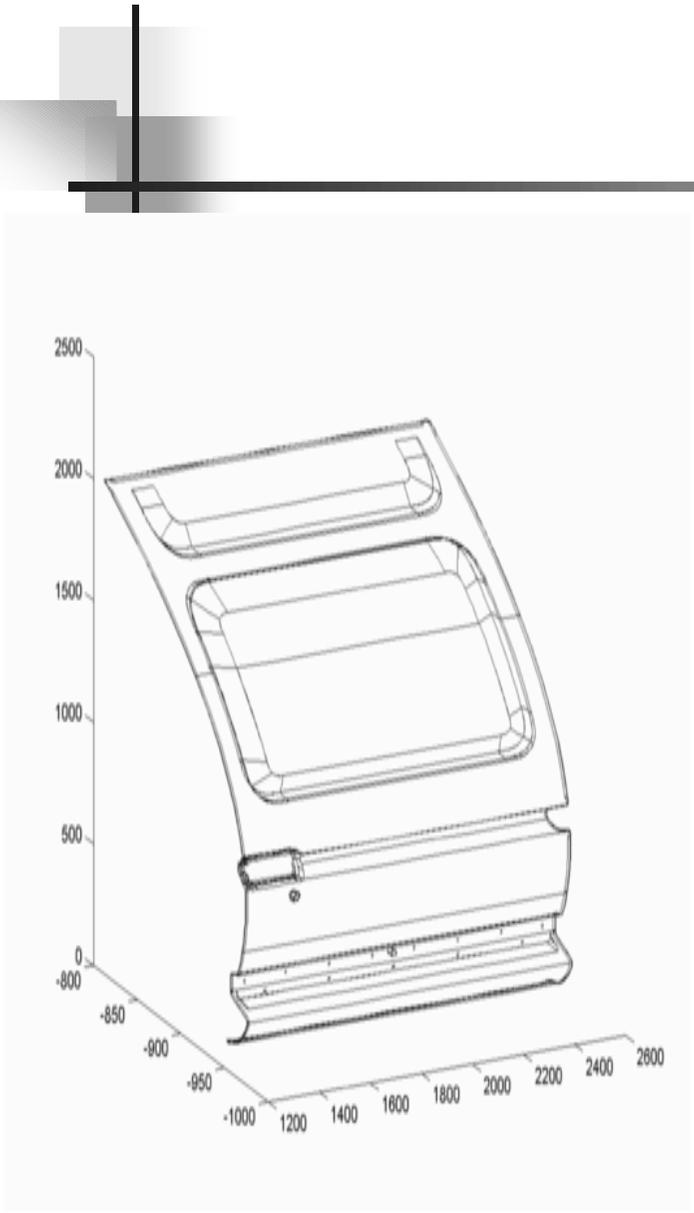


Conjunto de puntos, líneas, curvas, superficies, símbolos, ...

Ficheros ASCII

CAD formatos:

- IGES
- VDA
- STEP
- .....



This line is the first line of the start section. You can replace these lines and add as many as you want.

```

, ,10Hpaso.felix,38H/users/cadds5/parts/iges/_bcd/top1.igs,44HCOMPUTERVISG
ION CADD5 REV 5.0 GRAPHIC SYSTEM,39HCV Translator Products, Revision 1.G
2.1 ,32,38,6,308,15,10Hpaso.felix,1.0D0,2,2HMM,32767,32.767D0,13H970226.G
163500, .00254D0,0.0D0,6HAuthor,12HOrganization,10,0,13H700101.010000;
314 1 0 0 0 0 0 0 200D
314 0 7 1 0 0 0 0 OD
314 2 0 0 0 0 0 0 200D
314 0 8 1 0 0 0 0 OD
314 3 0 0 0 0 0 0 200D
314 0 0 1 0 0 0 0 OD

```

```

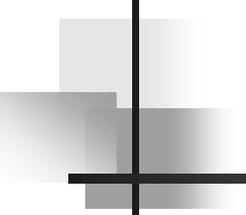
-39.8353900668919E0,47.5E0,-339.792802669565E0, 39P 51
-40.5903342877884E0,47.5E0,-339.904784107237E0, 39P 52
-40.9945510170104E0,47.5E0,-339.985850987103E0, 39P 53
-41.6323696207208E0,47.5E0,-339.994611986241E0, 39P 54
-41.8603348249209E0,47.5E0,-339.985787668859E0, 39P 55
-42.0878723928957E0,47.5000000000001E0,12.4973267384271E0, 39P 56
19.2446820045842E0,0.0E0,0.0E0,1.0E0; 39P 57
126,13,3,1,0,1,0,12.4973267384271E0,12.4973267384271E0, 41P 58
12.4973267384271E0,12.4973267384271E0,13.6287982402182E0, 41P 59
13.6287982402182E0,14.8518171484082E0,14.8518171484082E0, 41P 60
16.0816380356578E0,16.0816380356578E0,17.3158326864021E0, 41P 61
17.3158326864021E0,18.5608627450732E0,18.5608627450732E0, 41P 62

```

```

47.4999990995075E0,-327.225327496092E0,-52.587704489423E0, 523P 4982
47.4999990995075E0,-1.11551352287571E-2,9.30515325886385E0, 523P 4983
-17.9176207830942E0,9.05452635922904E-7; 523P 4984
S 2G 4D 524P 4984 T 1

```



# Realización del troquel

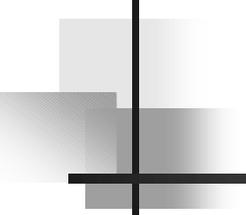
Un primer modelo real es construido usando su definición matemática.

Este modelo es mejorado usando operaciones tales como:

- seccionado,
- offsetting,
- blending,

Estas operaciones se definen inicialmente, en forma matemática, sobre el modelo teórico.

El control de calidad se realiza para verificar que el troquel construido se ajusta a las especificaciones iniciales de éste.



# Implicitación y sus Aplicaciones

---

## El problema algebraico

Cálculo de la ecuación implícita de una curva racional en  $\mathbb{R}^2$ ,  
de una superficie racional en  $\mathbb{R}^3$ , .....

## EJEMPLO

Let  $\mathcal{S}$  be an elementary bicubic  $B$ -spline surface defined by:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (n_0(u) \ n_1(u) \ n_2(u) \ n_3(u)) \cdot \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_0(v) \\ n_1(v) \\ n_2(v) \\ n_3(v) \end{pmatrix}$$

with  $0 \leq u, v \leq 1$ ,  $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ , and

$$\begin{aligned} n_0(s) &= \frac{(1-s)^3}{6} & n_1(s) &= \frac{3s^3-6s^2+4}{6} \\ n_2(s) &= \frac{-3s^3+3s^2+3s+1}{6} & n_3(s) &= \frac{s^3}{6} \end{aligned}$$

Determinar un polinomio  $H(x,y,z)$  con el menor grado posible y tal que  $\mathcal{S}$  está contenido en:

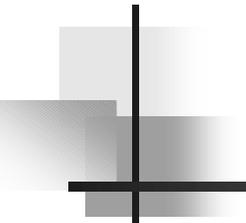
$$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : H(\alpha, \beta, \gamma) = 0\}$$

La Implicitación es un problema clásico en Geometría Algebraica (Teoría de la Eliminación):

- mediante resultantes multivariadas  
Manocha&Canny, Sederberg, Chionh, Bajaj,...
- mediante Bases de Gröbner  
Buchberger, Cox et al, Hoffmann, Kalkbrenner,  
Gao&Chou, Fing et al,...
- mediante “moving curves and surfaces”  
Cox, Sederberg, Goldman, Zhang, Chen,...
- mediante deformaciones y técnicas “ad-hoc”  
Canny, Gonzalez-Vega, ...

Cuando se dispone de ella, la ecuación implícita es muy útil para:

- Posicionamiento Punto-Superficie
- Intersecciones Superficie-Superficie (incluyendo seccionado)
- Intersecciones Superficie-Curva
- Manipulación de Superficies “Trimmed” “Sculptured Solids”
- . . . . .



La Implicitación no se utiliza o no aparece en los sistemas actuales CAD/CAM debido a dos razones:

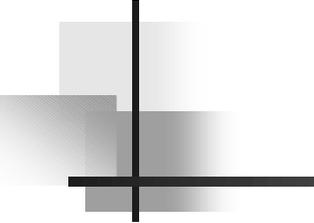
Es una operación algebraica muy costosa.

Los coeficientes de los polinomios que definen la parametrización son números reales en coma flotante.

## Nuevas Aproximaciones Numéricas:

- mediante Calculo de Variaciones y como un problema de valores propios:
  - ❖ Corless, Giesbrecht, Kotsireas & Watt (2000)
  
- mediante un problema SVD sobre la matriz de composición y monoides:
  - ❖ Dokken (1997)
  - ❖ Sederberg, Zheng, Klimaszewski & Dokken (1999)
  
- mediante el método de Newton:
  - ❖ Hartmann (1998)

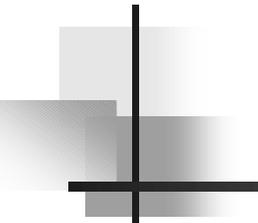
## Como evitar estas dificultades (I):



Números reales en coma flotante  
como coeficientes

Un objeto concreto a ser modelizado (para luego ser construido) está formado por varios cientos (o miles) de pequeños parches, **todos ellos compartiendo la misma estructura algebraica.**

Para cada objeto, se construye una base de datos que contiene la ecuación implícita de cada tipo de parche que aparece en su definición.



La Base de Datos contiene las formulas de inversión:

$$u=U(x,y,z) \quad v=V(x,y,z)$$

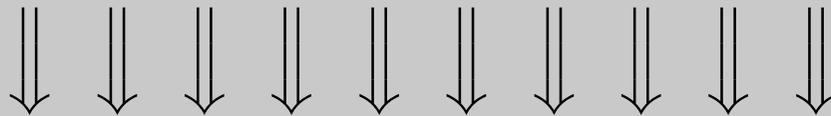
La Base de Datos se filtra “mediante evaluación” para evitar problemas de especialización.

El proceso de implicitación se realiza mediante el uso de Resultantes de Sylvester, cálculo de Bases de Gröbner y técnicas ad-hoc para casos específicos.

$$x = x_{00} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} + x_{01} \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

$$y = y_{00} \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} + y_{11} \frac{s - s_1}{s_2 - s_1}$$

$$z = \left[ z_{00} \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} + z_{10} \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \right] \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} + \left[ z_{10} \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} + z_{11} \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} \right] \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$



$$\begin{aligned}
 & (z_{00} - 2z_{10} + z_{11})xy + (y_{00}z_{10} + y_{11}z_{10} - y_{00}z_{11} - y_{11}z_{00})x + \\
 & + (x_{00}z_{10} + x_{01}z_{10} - x_{00}z_{11} - x_{01}z_{00})y + \\
 & + (x_{00}y_{11} + x_{01}y_{00} - x_{00}y_{00} - x_{01}y_{11})z + \\
 & + x_{01}y_{11}z_{00} + x_{00}y_{00}z_{11} - x_{00}y_{11}z_{10} - x_{01}y_{00}z_{10}
 \end{aligned}$$

## Como evitar estas dificultades (II):

### Tiempo de cálculo

Como la implicitación "genérica" es un proceso que se realiza a priori, en la práctica, el tiempo de cálculo se dedica en exclusiva:

- ❖ a la búsqueda en la base de datos,
  - ❖ a la evaluación de la ecuación implícita, y
  - ❖ a la verificación de esta
- mientras el usuario CAD/CAM está trabajando.

## Un ejemplo real en CANDEMAT

La superficie considerada viene definida por un conjunto de 9 parches, cada uno de ellos dado por parametrizaciones del tipo

$$x = p_1(s, t), \quad y = p_2(s, t), \quad z = p_3(s, t)$$

definidas en el dominio:

$$s_0 = s_1 < s_2 < s_3 < s_4 = s_5$$

$$t_0 = t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = t_5$$

y donde:

$$\begin{aligned} p_1 &= \left( x_{00}f_0 + x_{10}f_1 + x_{20}f_2 + x_{30}f_3 \right)g_0 + \left( x_{01}f_0 + x_{11}f_1 + x_{21}f_2 + x_{31}f_3 \right)g_1 + \\ &\quad \left( x_{02}f_0 + x_{12}f_1 + x_{22}f_2 + x_{32}f_3 \right)g_2 + \left( x_{03}f_0 + x_{13}f_1 + x_{23}f_2 + x_{33}f_3 \right)g_3 \\ p_2 &= \left( y_{00}f_0 + y_{10}f_1 + y_{20}f_2 + y_{30}f_3 \right)g_0 + \left( y_{01}f_0 + y_{11}f_1 + y_{21}f_2 + y_{31}f_3 \right)g_1 + \\ &\quad \left( y_{02}f_0 + y_{12}f_1 + y_{22}f_2 + y_{32}f_3 \right)g_2 + \left( y_{03}f_0 + y_{13}f_1 + y_{23}f_2 + y_{33}f_3 \right)g_3 \\ p_3 &= \left( z_{00}f_0 + z_{10}f_1 + z_{20}f_2 + z_{30}f_3 \right)g_0 + \left( z_{01}f_0 + z_{11}f_1 + z_{21}f_2 + z_{31}f_3 \right)g_1 + \\ &\quad \left( z_{02}f_0 + z_{12}f_1 + z_{22}f_2 + z_{32}f_3 \right)g_2 + \left( z_{03}f_0 + z_{13}f_1 + z_{23}f_2 + z_{33}f_3 \right)g_3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = \frac{s_2-s}{s_2-s_0} \\ f_1 = \frac{s-s_0}{s_2-s_0} \\ f_2 = 0.0 \\ f_3 = 0.0 \end{array} \right\} \text{ si } s_0 \leq s < s_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0.0 \\ f_1 = \frac{s_3-s}{s_3-s_2} \\ f_2 = \frac{s-s_2}{s_3-s_2} \\ f_3 = 0.0 \end{array} \right\} \text{ si } s_2 \leq s < s_3$$

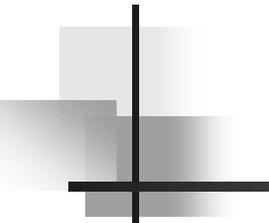
$$\left. \begin{array}{l} f_0 = 0.0 \\ f_1 = 0.0 \\ f_2 = \frac{s_4-s}{s_4-s_3} \\ f_3 = \frac{s-s_3}{s_4-s_3} \end{array} \right\} \text{ si } s_3 \leq s < s_4$$

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = \frac{t_2-t}{t_2-t_0} \\ g_1 = \frac{t-t_0}{t_2-t_0} \\ g_2 = 0.0 \\ g_3 = 0.0 \end{array} \right\} \text{ si } t_0 \leq t < t_2$$

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = 0.0 \\ g_1 = \frac{t_3-t}{t_3-t_2} \\ g_2 = \frac{t-t_2}{t_3-t_2} \\ g_3 = 0.0 \end{array} \right\} \text{ si } t_2 \leq t < t_3$$

$$\left. \begin{array}{l} g_0 = 0.0 \\ g_1 = 0.0 \\ g_2 = \frac{t_4-t}{t_4-t_3} \\ g_3 = \frac{t-t_3}{t_4-t_3} \end{array} \right\} \text{ si } t_3 \leq t < t_4$$

# Los valores concretos



$x_{00} = -402.396210422345$	$y_{00} = 125.604939074148$	$z_{00} = 76.0994513388919$
$x_{10} = -261.17588628063$	$y_{10} = 120.007923434398$	$z_{10} = 80.2658802206019$
$x_{20} = -119.951398608196$	$y_{20} = 114.410862351266$	$z_{20} = 84.4324639780064$
$x_{30} = 21.2789144514636$	$y_{30} = 108.813733891507$	$z_{30} = 88.5992634123272$
$x_{01} = -402.301520929449$	$y_{01} = 57.6898233810474$	$z_{01} = 57.9054501358602$
$x_{11} = -261.108042469145$	$y_{11} = 53.9585848013379$	$z_{11} = 62.570735352082$
$x_{21} = -119.914564008841$	$y_{21} = 50.2273462216285$	$z_{21} = 67.2360205683038$
$x_{31} = 21.2789144514635$	$y_{31} = 46.496107641919$	$z_{31} = 71.9013057845257$
$x_{02} = -402.274168598392$	$y_{02} = 38.0716305763488$	$z_{02} = 52.6498686670318$
$x_{12} = -261.089807581774$	$y_{12} = 36.206011286494$	$z_{12} = 57.8146792486379$
$x_{22} = -119.905446565155$	$y_{22} = 34.3403919966393$	$z_{22} = 62.979489830244$
$x_{32} = 21.2789144514634$	$y_{32} = 32.4747727067845$	$z_{32} = 68.1443004118501$
$x_{03} = -402.179479105497$	$y_{03} = -29.8434851167516$	$z_{03} = 34.4558674640001$
$x_{13} = -261.021963770289$	$y_{13} = -29.8433273465661$	$z_{13} = 40.119534380118$
$x_{23} = -119.8686119658$	$y_{23} = -29.8431241329984$	$z_{23} = 45.7830464205415$
$x_{33} = 21.2789144514633$	$y_{33} = -29.8428535428032$	$z_{33} = 51.4463427840486$

$$s_0 = 0.0$$

$$s_2 = 0.3333333333333333$$

$$s_3 = 0.6666666666666666$$

$$s_4 = 1.0$$

$$t_0 = -1.14816198642716$$

$$t_2 = 0.3333333333333333$$

$$t_3 = 0.6666666666666666$$

$$t_4 = 2.14816198642715$$

$$s_0 = s_1, \quad s_4 = s_5, \quad t_0 = t_1, \quad t_4 = t_5$$

## La ecuación implícita genérica

$$c_{10}^2 c_{22}^2 + (-c_{10} c_{11} c_{21} + (-2c_{10} c_{12} + c_{11}^2) c_{20}) c_{22} + c_{10} c_{12} c_{21}^2 - c_{11} c_{12} c_{20} c_{21} + c_{12}^2 c_{20}^2$$

donde

$$\begin{aligned} c_{10} = & ((s^2 - s_0) * t_0 * t_0 * x_{01} + (-s^2 + s_0) * t_0 * t_2 * x_{00} + \\ & ((s^2 - s_0) * t_0 * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0 * t_0) * x) * z_{11} + ((-s^2 + \\ & s_0) * t_0 * t_2 * x_{01} + (s^2 - s_0) * t_2 * t_2 * x_{00} + ((-s^2 + s_0) * t_2 * t_2 \\ & + (s^2 - s_0) * t_0 * t_2) * x) * z_{10} + ((-s^2 + s_0) * t_0 * t_0 * x_{11} \\ & + (s^2 - s_0) * t_0 * t_2 * x_{10} + ((-s^2 + s_0) * t_0 * t_2 + (s^2 - s_0) \\ & * t_0 * t_0) * x) * z_{01} + ((s^2 - s_0) * t_0 * t_2 * x_{11} + (-s^2 + s_0) \\ & * t_2 * t_2 * x_{10} + ((s^2 - s_0) * t_2 * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0 * t_2) * x) \\ & * z_{00} + (((-s^2 + s_0) * t_0 * t_2 + (s^2 - s_0) * t_0 * t_0) * x_{11} + \\ & ((s^2 - s_0) * t_2 * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0 * t_2) * x_{10} + ((s^2 - s_0) \\ & * t_0 * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0 * t_0) * x_{01} + ((-s^2 + s_0) * t_2 * t_2 + \\ & (s^2 - s_0) * t_0 * t_2) * x_{00}) * z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} = & (((-2 * s^2) + 2 * s_0) * t_0 * x_{01} + ((s^2 - s_0) * t_2 + (s^2 \\ & - s_0) * t_0) * x_{00} + ((-s^2 + s_0) * t_2 + (s^2 - s_0) * t_0) * x) * z_{11} + \\ & (((s^2 - s_0) * t_2 + (s^2 - s_0) * t_0) * x_{01} + ((-2 * s^2) + 2 * s_0) * \\ & t_2 * x_{00} + ((s^2 - s_0) * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0) * x) * z_{10} + ((2 * s^2 + \\ & (-2 * s_0)) * t_0 * x_{11} + ((-s^2 + s_0) * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0) * x_{10} + \\ & ((s^2 - s_0) * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0) * x) * z_{01} + (((-s^2 + s_0) * t_2 + \\ & (-s^2 + s_0) * t_0) * x_{11} + (2 * s^2 + (-2 * s_0)) * t_2 * x_{10} + ((-s^2 + s_0) * t_2 + \\ & (s^2 - s_0) * t_0) * x) * z_{00} + (((s^2 - s_0) * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0) \\ & * x_{11} + ((-s^2 + s_0) * t_2 + (s^2 - s_0) * t_0) * x_{10} + ((-s^2 + s_0) * \\ & t_2 + (s^2 - s_0) * t_0) * x_{01} + ((s^2 - s_0) * t_2 + (-s^2 + s_0) * t_0) * x_{00}) * z \end{aligned}$$

$$c12 = ((s2-s0)*x01 + (-s2+s0)*x00)*z11 + ((-s2+s0)*x01 + (s2-s0)*x00)*z10 + ((-s2+s0)*x11 + (s2-s0)*x10)*z01 + ((s2-s0)*x11 + (-s2+s0)*x10)*z00$$

$$c20 = ((s2-s0)*t0*t0*y01 + (-s2+s0)*t0*t2*y00 + ((s2-s0)*t0*t2 + (-s2+s0)*t0*t0)*y)*z11 + ((-s2+s0)*t0*t2*y01 + (s2-s0)*t2*t2*y00 + ((-s2+s0)*t2*t2 + (s2-s0)*t0*t2)*y)*z10 + ((-s2+s0)*t0*t0*y11 + (s2-s0)*t0*t2*y10 + ((-s2+s0)*t0*t2 + (s2-s0)*t0*t0)*y)*z01 + ((s2-s0)*t0*t2*y11 + (-s2+s0)*t2*t2*y10 + ((s2-s0)*t2*t2 + (-s2+s0)*t0*t2)*y)*z00 + (((-s2+s0)*t0*t2 + (s2-s0)*t0*t0)*y11 + ((s2-s0)*t2*t2 + (-s2+s0)*t0*t2)*y10 + ((s2-s0)*t0*t2 + (-s2+s0)*t0*t0)*y01 + ((-s2+s0)*t2*t2 + (s2-s0)*t0*t2)*y00)*z$$

$$c21 = (((-2*s2) + 2*s0)*t0*y01 + ((s2-s0)*t2 + (s2-s0)*t0)*y00 + ((-s2+s0)*t2 + (s2-s0)*t0)*y)*z11 + (((s2-s0)*t2 + (s2-s0)*t0)*y01 + ((-2*s2) + 2*s0)*t2*y00 + ((s2-s0)*t2 + (-s2+s0)*t0)*y)*z10 + ((2*s2 + (-2*s0))*t0*y11 + ((-s2+s0)*t2 + (-s2+s0)*t0)*y10 + ((s2-s0)*t2 + (-s2+s0)*t0)*y)*z01 + (((-s2+s0)*t2 + (-s2+s0)*t0)*y11 + (2*s2 + (-2*s0))*t2*y10 + ((-s2+s0)*t2 + (s2-s0)*t0)*y)*z00 + (((s2-s0)*t2 + (-s2+s0)*t0)*y11 + ((-s2+s0)*t2 + (s2-s0)*t0)*y10 + ((-s2+s0)*t2 + (s2-s0)*t0)*y01 + ((s2-s0)*t2 + (-s2+s0)*t0)*y00)*z$$

$$c22 = ((s2-s0)*y01 + (-s2+s0)*y00)*z11 + ((-s2+s0)*y01 + (s2-s0)*y00)*z10 + ((-s2+s0)*y11 + (s2-s0)*y10)*z01 + ((s2-s0)*y11 + (-s2+s0)*y10)*z00$$

# La Ecuación Implícita Concreta

$$\begin{aligned} & \left[ -12.86405481303769 \right] z^3 + \\ & \left[ 6.8938261970858576y + 1.0322819534013938x + 4441.0953941817452 \right] z^2 + \\ & \left[ -0.92359758113477841y^2 + (-0.27659911577510787x - 1976.073857399886)y - \right. \\ & \quad \left. 0.020708984196767578x^2 - 295.89741941049658x - 387924.22771793336 \right] z + \\ & \left[ (3.4188084068007236 \cdot 10^{-18}x + 210.63109093399621)y^2 + \right. \\ & \quad (-6.1121850507742521 \cdot 10^{-19}x^2 + 63.079824695413464x + \\ & \quad \left. 92111.888130195322)y + 4.7227883903081773x^2 + 13792.839722405979x + \right. \\ & \quad \left. 10070450.541378483 \right] \end{aligned}$$

# El control del error

$$H(p_1(s, t), p_2(s, t), p_3(s, t)) =$$
$$\begin{aligned} & (-1.7970904234100502 \cdot 10^{-15} s^3 - 3.5539035642606386 \cdot 10^{-14} s^2 + \\ & 1.3866796036202881 \cdot 10^{-12} s - 8.3765572022996195 \cdot 10^{-12}) t^3 + \\ & (5.3954545200343888 \cdot 10^{-14} s^3 - 2.7284841053187847 \cdot 10^{-12} s^2 + \\ & 1.1641532182693481 \cdot 10^{-10}) t^2 + (-1.1527137854777534 \cdot 10^{-12} s^3 + \\ & 2.9103830456733704 \cdot 10^{-11} s^2 - 1.1641532182693481 \cdot 10^{-10} s - \\ & 2.7939677238464355 \cdot 10^{-9}) t - 1.7043986506752499 \cdot 10^{-11} s^3 + \\ & 4.6566128730773926 \cdot 10^{-9} s + 3.7252902984619141 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N H(x_i, y_i, z_i)}{N} = 5.5134296417236327 \cdot 10^{-9}$$

## Generación de ecuaciones implícitas optimizadas para su evaluación

Mediante resultantes, Bases de Gröbner, ... la ecuación implícita se obtiene en forma expandida:

- Una expresión algebraica enorme.
- Una expresión difícil a evaluar.
- Ausencia de relación clara entre las ecuaciones paramétricas iniciales y la ecuación implícita obtenida

$$f(T) = a_0 T^m + a_1 T^{m-1} + \dots + a_{m-1} T + a_m = a_0 \prod_{j=1}^s (T - \alpha_j)^{e_j}$$

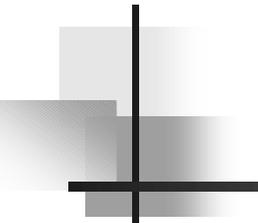
Sumas de Newton ( $k \geq 0$ ):

$$\mathbf{S}_k = e_1 \alpha_1^k + \dots + e_s \alpha_s^k$$

Identidades de Newton ( $j \geq 1$ ):

$$j a_j = -\mathbf{S}_j a_0 - \mathbf{S}_{j-1} a_1 - \dots - \mathbf{S}_1 a_{j-1}$$

(si  $i > m$  entonces  $a_i = 0$ )



---

$$\frac{f'(T)}{f(T)} = \frac{\mathbf{S}_0(\{\alpha_j\}_j)}{T} + \frac{\mathbf{S}_1(\{\alpha_j\}_j)}{T^2} + \frac{\mathbf{S}_2(\{\alpha_j\}_j)}{T^3} + \dots$$

$$\frac{f'(T)g(T)}{f(T)} = \dots + \frac{\mathbf{S}_0(\{g(\alpha_j)\}_j)}{T} + \frac{\mathbf{S}_1(\{g(\alpha_j)\}_j)}{T^2} + \dots$$

## Implicitación no expandida de curvas

The implicit equation of  $\mathcal{C}$  defined by

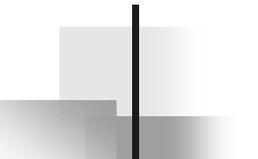
$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

is a divisor of

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(x, y) = \text{Resultant}_t(f(t) - x, g(t) - y) = \prod_{\{\tilde{t} : g(\tilde{t}) - y = 0\}} (x - f(\tilde{t}))$$

The coefficients of  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(x, y)$  (as polynomial in  $x$ ) are determined by computing the Newton Sums on the  $t$ -solutions of

$$g(t) - y = 0$$


$$\mathbf{x=f(t), y=g(t)}$$

$$n = \deg(g).$$

$$\mathcal{H}_C(x, y) = x^n + r_1(y)x^{n-1} + \dots + r_n(y)$$

$$k \in \{1, \dots, n\}:$$

$$k \cdot r_k(y) = \mathbf{S}_k(y) - \mathbf{S}_{k-1}(y) \cdot r_1(y) - \dots - \mathbf{S}_1(y) \cdot r_{k-1}(y)$$

Every  $\mathbf{S}_j(y)$  is the coefficient of  $t^{-1}$  in the expansion in negative powers of  $t$  of:

$$\frac{(f(t))^j g'(t)}{g(t) - y}$$

## Otro ejemplo

### Un ejemplo

$$x = f(t) = t^4 - t + 1 \quad y = g(t) = t^3 + t + 1$$

$$\mathcal{H}_C(x, y) = x^3 + r_1(y)x^2 + r_2(y)x + r_3(y)$$

$$\begin{aligned} \frac{3t^2+1}{t^3+t+1-y} &= \frac{3}{t} - \frac{2}{t^3} - \frac{-3+3y}{t^4} + \frac{2}{t^5} + \frac{5-5y}{t^6} + \frac{1-6y+3y^2}{t^7} - \frac{-7+7y}{t^8} - \frac{-6+16y-8y^2}{t^9} \\ &+ \frac{6-9y^2+3y^3}{t^{10}} + \frac{13-30y+15y^2}{t^{11}} - \frac{-22y+33y^2-11y^3}{t^{12}} - \frac{-19+36y-6y^2-12y^3+3y^4}{t^{13}} \\ &- \frac{-13+65y-78y^2+26y^3}{t^{14}} + \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_1(y) = 5$$

$$\mathbf{S}_2(y) = -11 + 26y - 8y^2$$

$$\mathbf{S}_3(y) = -76 + 93y + 6y^2 - 21y^3 + 3y^4$$

$$\mathcal{H}_C(x, y) = x^3 - 5x^2 + (18 - 13y + 4y^2)x - 23 + 34y - 22y^2 + 7y^3 - y^4$$

## Implicitación no expandida de superficies

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = f(t_1, t_2) \\ y = g(t_1, t_2) \\ z = h(t_1, t_2) \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(x, y, z) = \prod_{(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \in \mathcal{V}} (x - f(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2))$$

$$\mathcal{V} = \left\{ (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \in \mathbb{C}(\widetilde{y, z}) : \begin{array}{l} g(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) - y = 0 \\ h(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$x = f \quad y = t_1^{n_1} + Q_1(t_1, t_2) \quad z = t_2^{n_2} + Q_2(t_1, t_2)$$

$$\deg(Q_i) < n_i, n = \deg(f), m = n_1 n_2$$

$$\mathcal{H}_S(x, y, z) = x^m + r_1(y, z)x^{m-1} + \dots + r_{m-1}(y, z)x + r_m(y, z)$$

$k \in \{1, \dots, n\}$ :

$$k \cdot r_k(y, z) = -\mathbf{S}_k(y, z) - \mathbf{S}_{k-1}(y, z) \cdot r_1(y, z) - \dots - \mathbf{S}_1(y, z) \cdot r_{k-1}(y, z)$$

Every  $\mathbf{S}_j$  is the coefficient of  $t_1^{-1}t_2^{-1}$  in:

$$\frac{(f(t_1, t_2))^j \mathbf{Jac}}{t_1^{n_1} t_2^{n_2}} \sum_{k=0}^{jn} (-1)^k \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = k} \left( \frac{Q_1(t_1, t_2) - y}{t_1^{n_1}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{Q_2(t_1, t_2) - z}{t_2^{n_2}} \right)^{\alpha_2}$$

**Jac**: Jacobian Determinant of  $g(t_1, t_2)$  and  $h(t_1, t_2)$

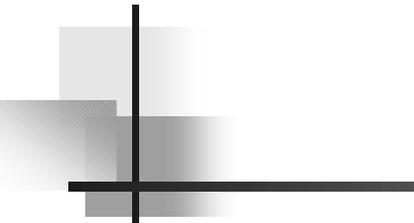
## Un ejemplo

$$x = t_1^2 + t_2^2 \quad y = t_1^3 + t_2^2 \quad z = t_2^3 + t_1^2$$

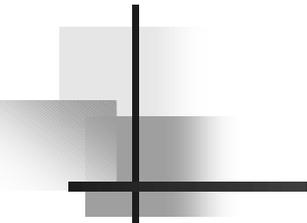
$$\mathcal{H}_S(x, y, z) = x^9 + \sum_{i=1}^9 r_i(y, z)x^{9-i}$$

$$\mathbf{Jac}(t_1, t_2) = t_1 t_2 (9t_1 t_2 - 4)$$

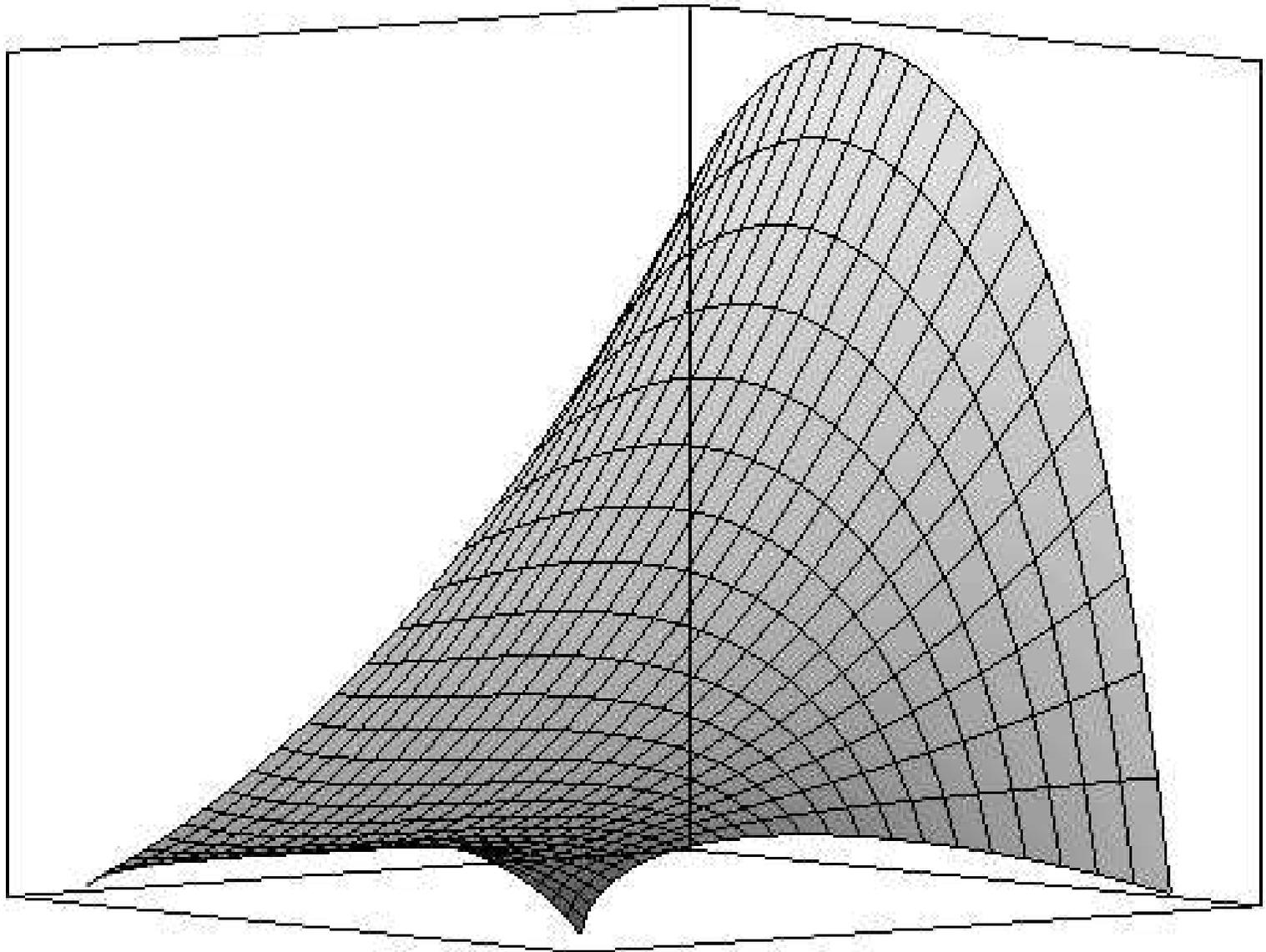
$$\frac{(9t_1 t_2 - 4)(t_1^2 + t_2^2)^j}{t_1^2 t_2^2} \cdot \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k \sum_{i=0}^k \left( \frac{t_2^2 - y}{t_1^3} \right)^i \left( \frac{t_1^2 - z}{t_2^3} \right)^{k-i}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1(y) &= 0 \\
\mathbf{S}_2(y) &= 10 \\
\mathbf{S}_3(y) &= 9x^2 - 42z - 42y + 9y^2 \\
\mathbf{S}_4(y) &= 36x^2 - 24y + 192yz - 24z + 30 + 36y^2 \\
\mathbf{S}_5(y) &= 210x^2 + 10 - 180yx^2 - 240z - 240y \\
&\quad + 120yz + 210y^2 - 180y^2z \\
\mathbf{S}_6(y) &= -612y^2z + 9x^4 + 630y^2 + 100 + 9y^4 \\
&\quad - 612yx^2 + 2160yz - 480x^3 - 480y^3 \\
&\quad - 228z + 180y^2x^2 + 630x^2 - 228y \\
\mathbf{S}_7(y) &= 1428y^3z + 70 + 2037y^2 + 1428yx^3 \\
&\quad - 6300yx^2 + 2037x^2 - 6300y^2z \\
&\quad + 2184yz + 756y^2x^2 - 812y^3 - 1190y \\
&\quad - 812x^3 + 315x^4 - 1190z + 315y^4 \\
\mathbf{S}_8(y) &= 350 - 1008y^3x^2 - 1504y + 5488y^2 \\
&\quad + 1172x^4 + 5488x^2 - 1504z - 7872y^3 \\
&\quad - 1008y^4z - 1008y^2x^3 + 1172y^4 \\
&\quad + 7712yx^3 + 7712y^3z + 20160y^2x^2 \\
&\quad - 7872x^3 - 1008yx^4 - 13872y^2z \\
&\quad - 13872yx^2 + 15680yz \\
\mathbf{S}_9(y) &= -5598z - 5598y + 14499y^4 - 15036x^3 \\
&\quad + 14499x^4 + 360 - 15036y^3 + 14967y^2 \\
&\quad + 14967x^2 + 21024yz + 9y^6 \\
&\quad - 1800y^5 + 52164yx^3 - 77616y^2z \\
&\quad - 25884y^2x^3 + 52164y^3z - 1800x^5 \\
&\quad - 5274yx^4 - 25884y^3x^2 + 49680y^2x^2 \\
&\quad + 756x^4y^2 + 756x^2y^4 - 5274y^4z + 9x^6 \\
&\quad - 77616yx^2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -2y^4 - 2z^4 - 96x^2yz^2 - 24x^2yz - 21x^3y^2z^2 \\
& + 44xy^3z + 18xy^2z^3 + 60x^3y^2z + 60x^3yz^2 \\
& + 76x^3yz + 18xy^4z + 24xy^2z - 54x^2y^2z^2 \\
& - 60x^2y^3z - 96x^2y^2z - 60x^2yz^3 + 78xy^2z^2 \\
& + 18xy^3z^2 + 18xyz^4 + 3x^3z^4 + 38x^3y^2 \\
& - 22x^4y - 24x^4yz - 22x^4z + 36x^4y^2z \\
& - 9x^5y^2 + 36x^4yz^2 + 6x^5y + 14x^6y - 9x^5z^2 \\
& - 48x^5yz - 3x^6y^2 - 3x^6z^2 + 14x^6z - 12x^2y^2 \\
& + 44xyz^3 - 12x^2z^2 + 38x^3y^3 - 18x^2z^4 \\
& - 18x^2y^4 - 28x^2z^3 + 8x^3y + 8x^3z + 38x^3z^2 \\
& + 38x^3z^3 + 3x^3y^4 + 24xyz^2 + 5xz^4 + 8xy^3 \\
& + 8xz^3 + x^9 - 5x^7 + 5x^5 - 2x^4 - y^6 + 2y^5 \\
& - 2y^4z - 16y^2z^3 - 8y^3z - z^6 + 2z^5 - 2yz^4 \\
& + 5xy^4 - 8yz^3 - 16y^3z^2 - 12y^2z^2 - 3z^4y^2 \\
& - 27x^4y^2 - 27x^4z^2 - 28x^2y^3 + 6x^5z - 3z^2y^4
\end{aligned}$$



$$F_1 = \frac{-H_1 + 3H_2}{8} = s^3 + \frac{3t^2}{4} - \frac{15s^2}{8} + \frac{3t}{4} - \frac{3y}{8} + \frac{x}{8} + \frac{3s}{8} + \frac{1}{8}$$

$$F_2 = \frac{3H_1 - H_2}{8} = t^3 - \frac{9t^2}{4} - \frac{3s^2}{8} + \frac{3t}{4} + \frac{y}{8} - \frac{3x}{8} + \frac{15s}{8} - \frac{3}{8}$$

The computing time was 15 seconds by using Maple 6 on a Sparc-15 Workstation (versus the  $10^6$  seconds in Hoffmann's solution).

$$r_1(x, y) = -\frac{54187594407x^2}{2048} + \frac{48101467761xy}{2048} - \frac{38812918311y^2}{262144} - \frac{8388608}{64} + \frac{16777216}{32} - \frac{81x^2}{64}$$

The size of the file containing the implicit equation (in non expanded form) is around 600 Kbytes.

$$\begin{aligned} & -\frac{54187594407x^2}{16777216} + \frac{48101467761xy}{8388608} - \frac{38812918311y^2}{16777216} \\ & - \frac{22656991982391171}{137438953472} - \frac{1}{2} \left( \frac{233469x}{2048} - \frac{188595y}{2048} \right) \left( -\frac{233469x}{2048} \right. \\ & \left. + \frac{112832595}{262144} + \frac{81x^2}{64} - \frac{135xy}{32} + \frac{81y^2}{64} \right) \left( -\frac{233469x}{2048} \right. \\ & \left. + \frac{188595y}{2048} - \frac{112832595}{262144} - \frac{81x^2}{64} + \frac{135xy}{32} - \frac{81y^2}{64} \right) \end{aligned}$$

La utilización de esta estrategia ha producido una mejora significativa en el software CAD/CAM/CAE CSIS que usa y desarrolla la compañía CANDEMAT:

Para los objetos considerados el tiempo de cálculo de seccionado se ha dividido por 3.

$$S : \begin{cases} x = \frac{f_1(s, t)}{q(s, t)} \\ y = \frac{f_2(s, t)}{q(s, t)} \\ z = \frac{f_3(s, t)}{q(s, t)} \end{cases} \Rightarrow H(x, y, z) = 0$$

$$x = A \Rightarrow H(A, y, z) = 0$$

Algunas estructuras algebraicas no son sencillas de implicitar genericamente:

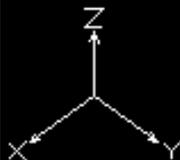
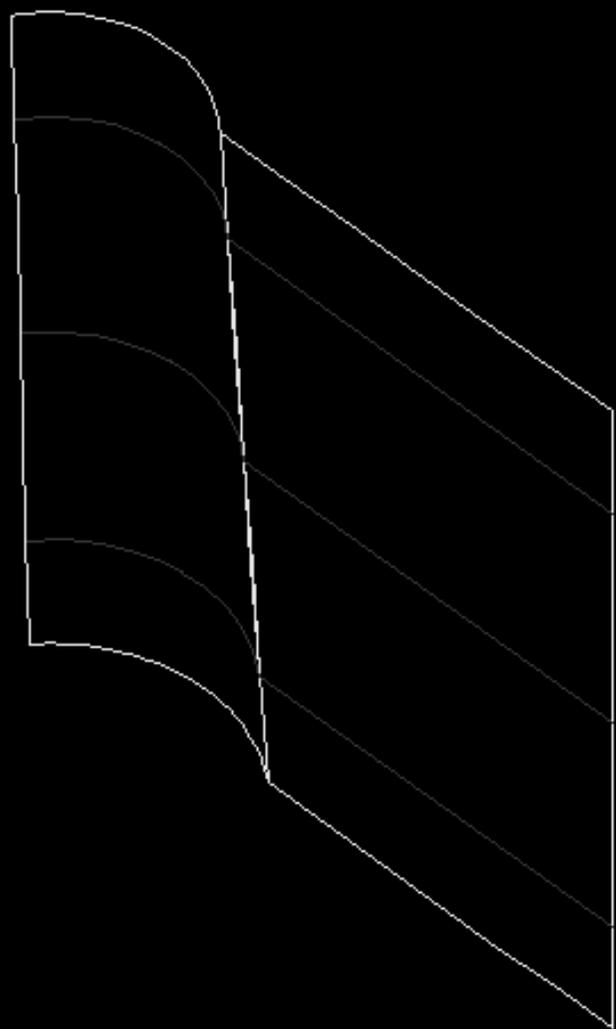
$$x = \frac{f_1(s, t)}{q(s, t)}, \quad y = \frac{f_2(s, t)}{q(s, t)}, \quad z = \frac{f_3(s, t)}{q(s, t)}$$

donde:

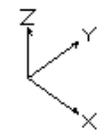
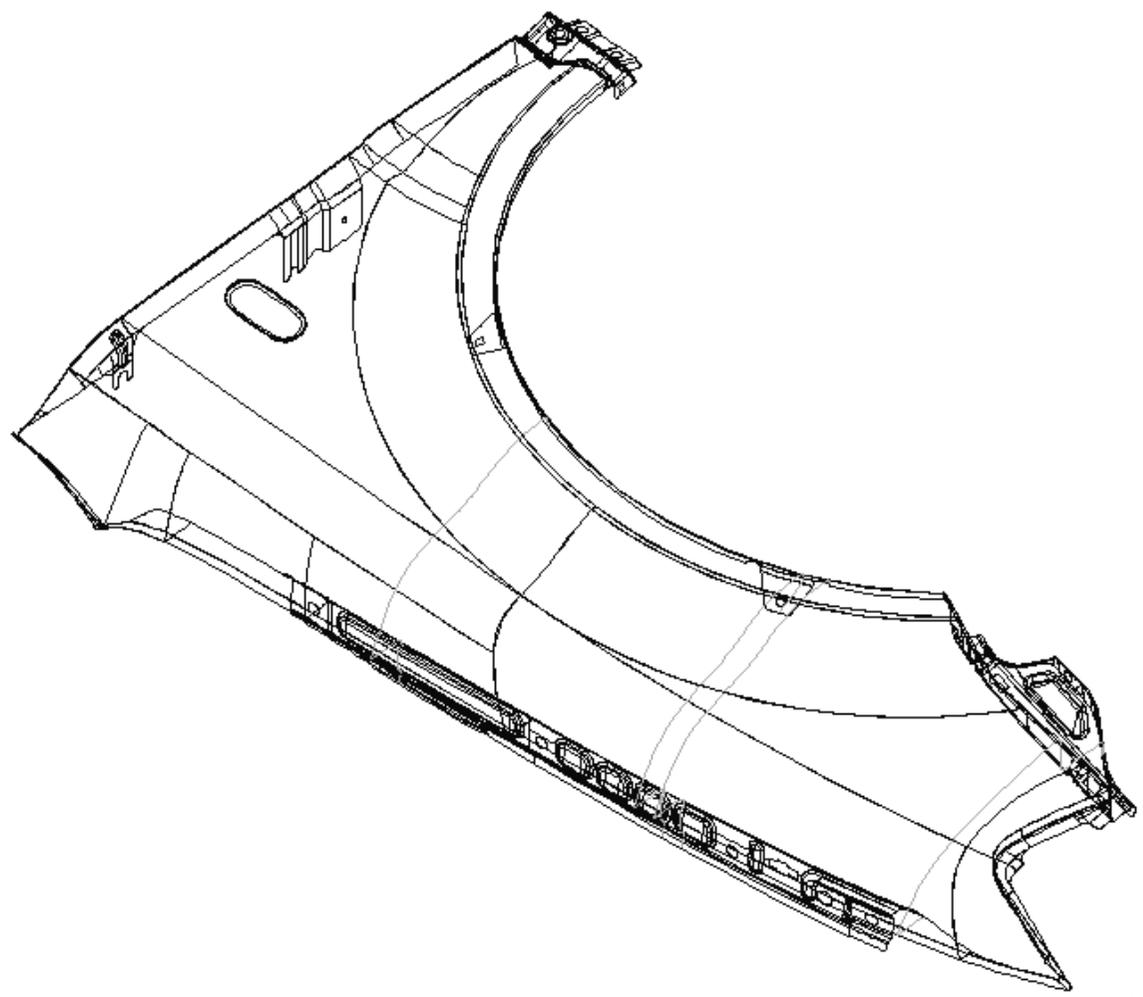
$$q(s, t) = s^3(A_3t^2 + B_3t + C_3) + s^2(A_2t^2 + B_2t + C_2) \\ + s(A_1t^2 + B_1t + C_1) + (A_0t^2 + B_0t + C_0)$$

$$f_i(s, t) = s^3(\alpha_{3i}t^2 + \beta_{3i}t + \gamma_{3i}) + s^2(\alpha_{2i}t^2 + \beta_{2i}t + \gamma_{2i}) \\ + s(\alpha_{1i}t^2 + \beta_{1i}t + \gamma_{1i}) + (\alpha_{0i}t^2 + \beta_{0i}t + \gamma_{0i})$$

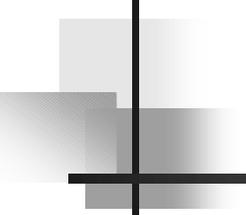
***Reducción de grado: Patrikalakis, Hoschek, etc.***



X 357.193 Y 83.566



X 481.075 Y -288.2



## Conclusiones

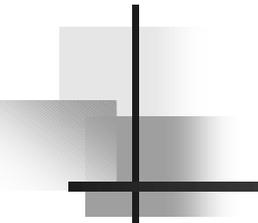
---

- ❖ Se obtiene un muy buen comportamiento sobre superficies regladas, superficies de revolución, etc. donde la implicación generica se comporta muy bien.
- ❖ Los tiempos de seccionado se han reducido.
- ❖ La representacion implícita está disponible para otras tareas CAD (offsetting, blending, etc).

## The approximate implicitization factorization

- ❖ [Dokken 1997,2001] Approximate Implicitization
  - ❖ Assume that the surface  $\mathbf{p}(s,t)$  has degree  $(n_1, n_2)$
  - ❖ Assume that  $\mathbf{q}$  has total degree  $m$  and that  $\mathbf{b}$  is a vector containing the unknown coefficients of  $\mathbf{q}$
  - ❖ The combination  $\mathbf{q}(\mathbf{p}(s,t))$  is a polynomial of degrees  $(mn_1, mn_2)$
  - ❖ Collect basis functions of degree  $(mn_1, mn_2)$  in  $\alpha(s,t)$
- ⊗ Then  $\mathbf{q}(\mathbf{p}(s,t))$  can be factorized

$$\mathbf{q}(\mathbf{p}(s,t)) = (\mathbf{D}\mathbf{b})^T \alpha(s,t)$$



## The Factorization

---

$$q(\mathbf{p}(s,t)) = (\mathbf{D}\mathbf{b})^T \alpha(s,t)$$

- ❖ The matrix  $\mathbf{D}$  is built from products of the coefficients of  $\mathbf{p}(s,t)$ .
- ❖ An element in  $\mathbf{D}$  is the product of a maximum of  $m$  such coefficients, where  $m$  the total degree of  $q$ .
- ❖ If  $\mathbf{p}(s,t)$  was described in a Bernstein basis of degree  $(n_1, n_2)$  then  $\alpha(s,t)$  contains the Bernstein basis of degree  $(mn_1, mn_2)$ .
- ❖ The first step of moving curves and surfaces use the same factorization.

## Properties of the factorization

$$q(\mathbf{p}(s,t)) = (\mathbf{D}\mathbf{b})^T \alpha(s,t)$$

- ❖ If  $\mathbf{D}\mathbf{b}=0$  and  $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$  then  $q(\mathbf{p}(s,t))=0$  and  $\mathbf{b}$  describes an implicitization  $q$  of  $\mathbf{p}(s,t)$ .
- ❖ If  $\alpha(s,t)$  describes a Bernstein basis then

$$\|\alpha(s,t)\|_2 \leq 1$$

$$|q(\mathbf{p}(s,t))| = |(\mathbf{D}\mathbf{b})^T \alpha(s,t)| \leq \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|_2$$

## Properties of the inequality

$$|q(\mathbf{p}(s,t))| = |(\mathbf{D}\mathbf{b})^T \alpha(s,t)| \leq \|\mathbf{D}\mathbf{b}\|_2.$$

Let  $\sigma_1$  be the smallest singular value of  $\mathbf{D}$  then

$$\min_{\|\mathbf{b}\|_2=1} \max_{(s,t) \in \Omega} |q(\mathbf{p}(s,t))| \leq \sigma_1.$$

Singular value decomposition (SVD) can be used to find approximate solutions of the implicitization problem.

## Piecewise polynomials can be approximated

- ❖ Approximation of multiple manifolds

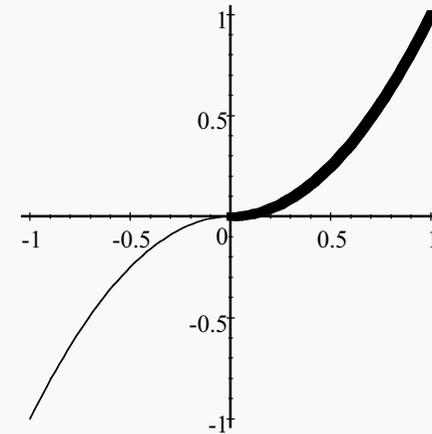
$$\sum_{i=1}^r (q(\mathbf{p}_i(s_i, t_i)))^2 \leq \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_r \end{pmatrix} \mathbf{b} \right\|_2^2.$$

- ❖  $D_1$  can be based on a curve,  $D_2$  on a surface,...
- ❖ Separation of two manifolds by approximate implicitization of one of the manifolds.

## Example: Two Parabolas

$$\mathbf{p}_1(s) = (-1, -1)(1-s)^2 + \left(-\frac{1}{2}, 0\right)2(1-s)s + (0, 0)s^2$$

$$\mathbf{p}_2(s) = (0, 0)(1-s)^2 + \left(\frac{1}{2}, 0\right)2(1-s)s + (1, 1)s^2$$



❖ We want to approximate both curve segments at the same time with one algebraic curve of degree 3.

❖ Thus we will make

- $q(\mathbf{p}_1(s)) = (\mathbf{D}_1 \mathbf{b}) \alpha_1(s)$

- $q(\mathbf{p}_2(s)) = (\mathbf{D}_2 \mathbf{b}) \alpha_2(s)$

∞ and combine the matrices:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{pmatrix}$$



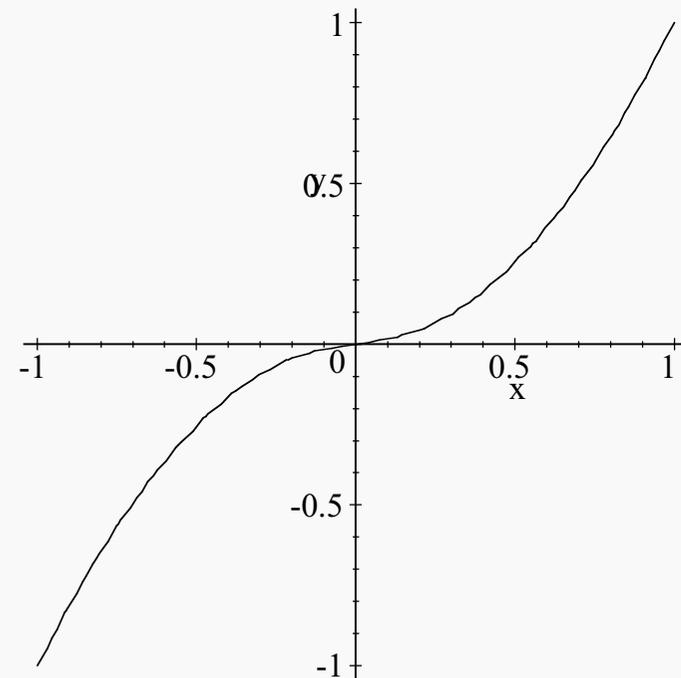
# Implicit from combined D

Eigenvalues:

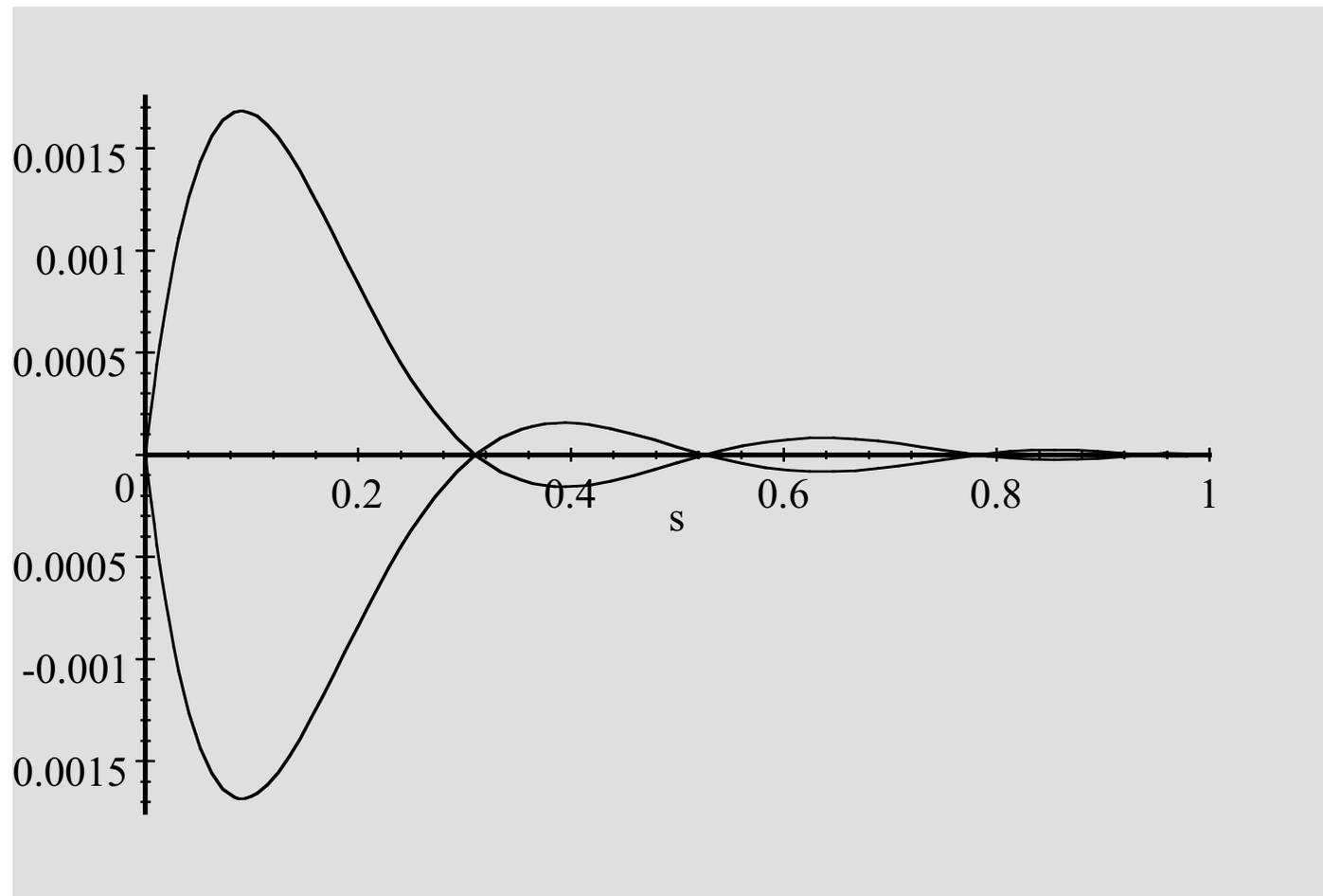
4.25, 3.91, 1.98, 1.31, 0.38, 0.37, 0.11, 0.05, 0.03, 0.007937

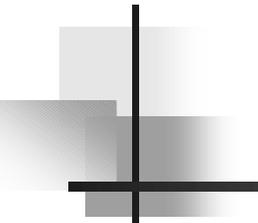
Combining eigenvector with basis functions and plot implicit:

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ x^2y \\ xy^2 \\ y^3 \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \\ x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -.4602815334 \\ .6983314313 \\ -.5087222523 \\ .1433800204 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -.0170228764 \\ .1443197267 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$



## Error of $p_1(s)$ and $p_2(s)$





# OFFSETS

---

**Motivación y definición**

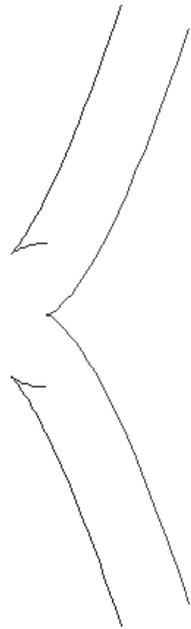
**Generación ecuaciones implícitas**

**Control de la topología de la offset**

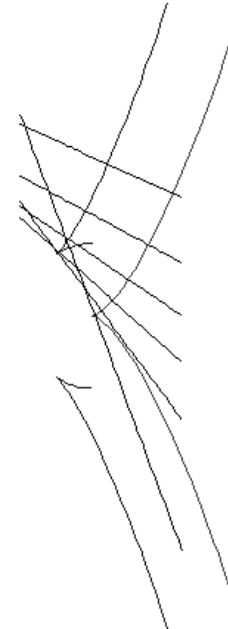
**Offsets locales con topología controlada**

## Definición geométrica de offset de una curva a distancia $d$

Conjunto de puntos cuya distancia euclídea al correspondiente punto de la curva es  $d$



$$\begin{aligned} y(s) &= s^3 \\ x(s) &= s^2 \end{aligned}$$



## Offsets de curvas planas: definiciones algebraicas

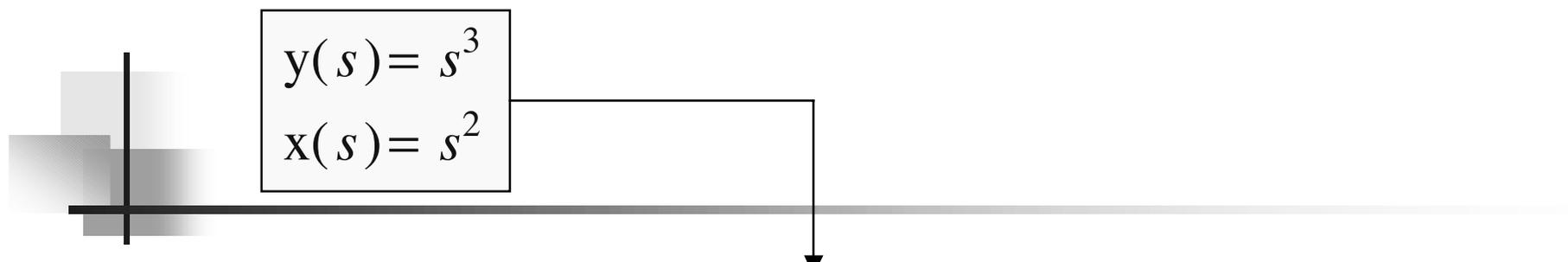
$$f(u, v) := 0$$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 0 \\ (x - u)^2 + (y - v)^2 - d^2 &= 0 \\ (x - u) \left( \frac{\partial}{\partial v} f \right) (u, v) - (y - v) \left( \frac{\partial}{\partial u} f \right) (u, v) &= 0 \end{aligned}$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

$$\begin{aligned} (u(t) - x)^2 + (v(t) - y)^2 - d^2 &= 0 \\ (x - u(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} u \right) (t) + (y - v(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} v \right) (t) &= 0 \end{aligned}$$


$$y(s) = s^3$$

$$x(s) = s^2$$

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 - R^2) (729 R^8 + 16 R^4 - 216 R^6 + (-1944 R^6 + 288 R^4) x \\ & + (-32 R^2 + 1188 R^4 - 729 R^6) y^2 + (-2916 R^6 + 1728 R^4) x^2 \\ & + (-504 R^2 + 6318 R^4) y^2 x + (4104 R^4 - 32 R^2) x^3 + (-1701 R^2 + 16) y^4 \\ & + (-2484 R^2 + 2187 R^4) y^2 x^2 + 729 y^6 + (4374 R^4 - 504 R^2) x^4 - 2376 x^5 R^2 + 729 x^8 \\ & + 216 x^7 + (-2916 R^2 + 16) x^6 + (216 - 4374 R^2) y^4 x + (-4860 R^2 - 32) y^2 x^3 \\ & + 729 y^2 x^6 - 1458 y^2 x^5 + (-432 - 2187 R^2) y^2 x^4 - 1458 y^4 x^3 + 729 y^4 x^2) \end{aligned}$$

## Factores Extraños

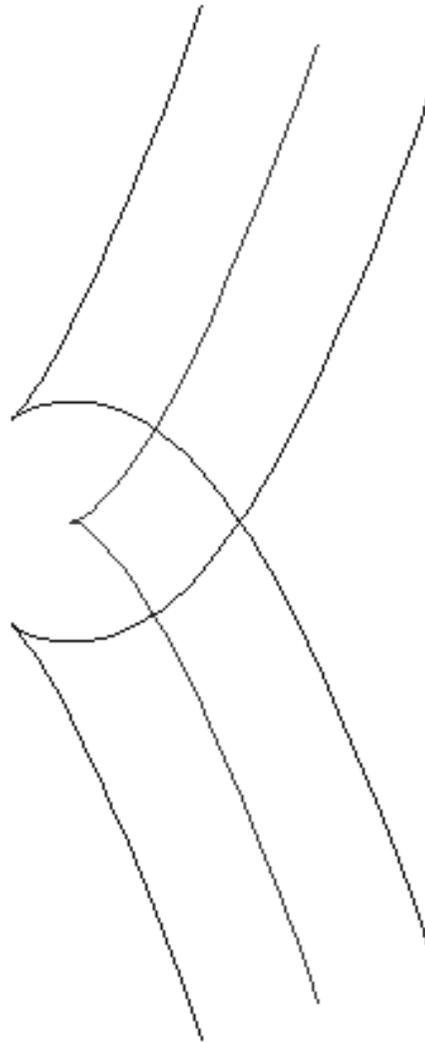
En el caso polinomial, se evitan dividiendo por

$$\gcd\left(\frac{\partial}{\partial s} X(s), \frac{\partial}{\partial s} Y(s)\right)$$

$$\begin{aligned}
& 729x^8 + 729x^6y^2 + 216x^7 - 1458x^5y^2 - 1458x^3y^4 - 11648x^6 - 9180x^4y^2 + 729x^2y^4 + 729y^6 - 9504x^5 \\
& - 19472x^3y^2 - 17280xy^4 + 67968x^4 + 25056x^2y^2 - 6788y^4 + 65536x^3 + 99072xy^2 - 158976x^2 \\
& - 27776y^2 - 119808x + 173056
\end{aligned}$$

$$y(s) = s^3$$

$$x(s) = s^2$$



$$R = 2$$

# Offsets de superficies: definiciones algebraicas

$$f(u, v, w) = 0$$

$$f(u, v, w) = 0$$

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 - R^2 = 0$$

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial v} f \right) (u, v, w) (x - u) - \left( \frac{\partial}{\partial u} f \right) (u, v, w) (y - v) = 0 \right.$$

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial w} f \right) (u, v, w) (y - v) - \left( \frac{\partial}{\partial v} f \right) (u, v, w) (z - w) = 0 \right.$$

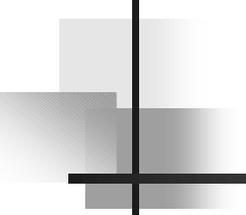
$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial u} f \right) (u, v, w) (z - w) - \left( \frac{\partial}{\partial w} f \right) (u, v, w) (x - u) = 0 \right]$$

## Offsets de superficies: definiciones algebraicas

$$u = u(s, t), v = v(s, t), w = w(s, t)$$

$$(x - u(s, t))^2 + (y - v(s, t))^2 + (z - w(s, t))^2 - R^2 = 0$$

$$\left[ \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial s} u \right) (s, t) (x - u(s, t)) + \left( \frac{\partial}{\partial s} v \right) (s, t) (y - v(s, t)) + \left( \frac{\partial}{\partial s} w \right) (s, t) (z - w(s, t)) &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} u \right) (s, t) (x - u(s, t)) + \left( \frac{\partial}{\partial t} v \right) (s, t) (y - v(s, t)) + \left( \frac{\partial}{\partial t} w \right) (s, t) (z - w(s, t)) &= 0 \end{aligned} \right]$$



## Inconvenientes

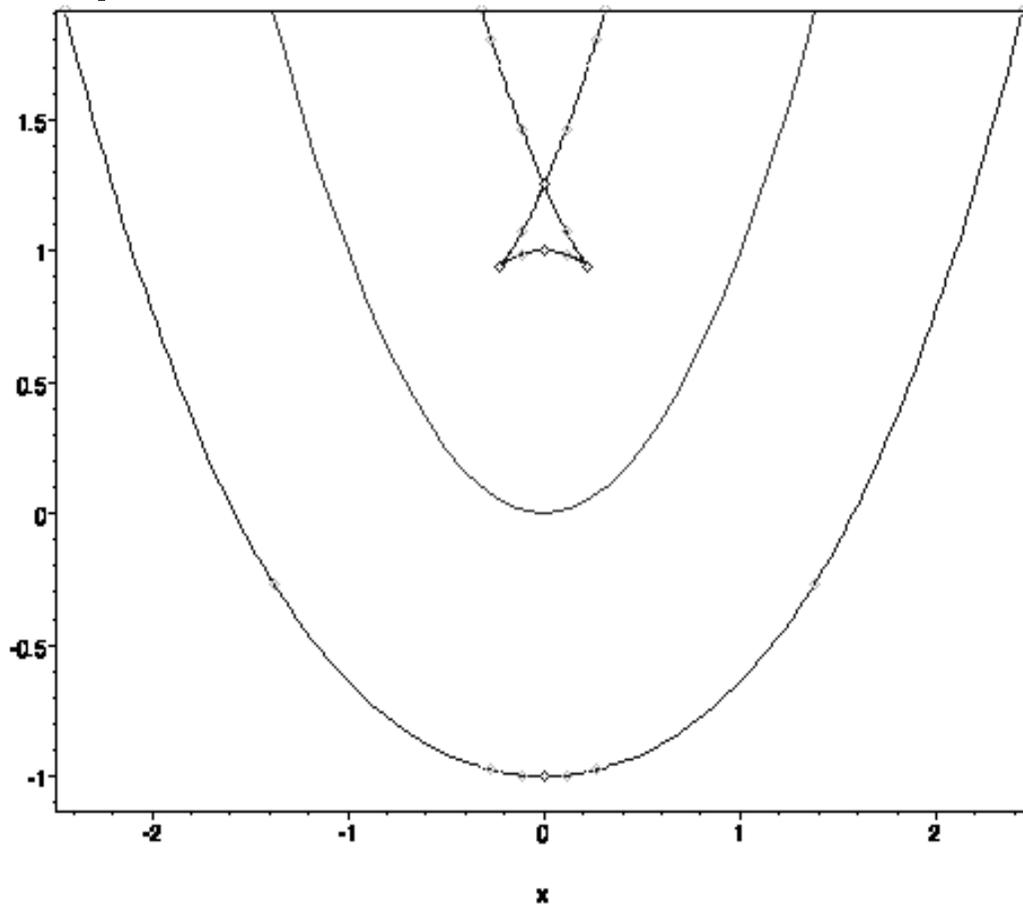
---

- Offsets de curvas/superficies racionales no son en general curvas/superficies racionales.
- El cálculo de Offsets se basa en la eliminación algebraica que requiere coeficientes y aritmética exacta.
- Las ecuaciones implícitas de las Offsets son en general muy grandes y difíciles de manipular.
- El cálculo de Offsets produce en muchos casos factores extraños.

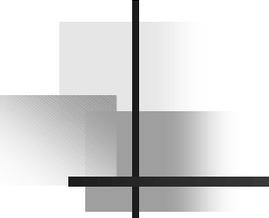
**Y además .....**

$$y = x^2 \quad R = 1$$

$$16x^6 + 16x^4y^2 - 40x^4y - 32x^2y^3 - 47x^4 + 16y^4 + 6x^2y - 40y^3 + 28x^2 + 9y^2 + 40y - 25$$



La offset de esta parábola contiene puntos singulares y la forma de una de sus componentes dista mucho de parecerse a una parábola.



## Generación de ecuaciones implícitas de Offsets optimizadas para su evaluación

Mediante resultantes, Bases de Gröbner, ...  
la ecuación implícita de la Offset se obtiene  
en forma expandida:

- Una expresión algebraica enorme.
- Una expresión difícil a evaluar.
- Imposible de calcular cuando los coeficientes de la curva de partida no se conocen de forma exacta.

## Implicitación no expandida de Offsets

The implicit equation of the  $d$ -offset for the curve  $\mathcal{C}$  defined by

$$x = u(t) \qquad y = v(t)$$

is a divisor of

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(x, y) = \text{Resultant}_t \left[ \begin{array}{c} (u(t) - x)^2 + (v(t) - y)^2 - d^2 \\ (u(t) - x) \frac{\partial u}{\partial t}(t) + (v(t) - y) \frac{\partial v}{\partial t}(t) \end{array} \right] =$$

$$= \prod_{\{\tilde{t} : G(x, y; \tilde{t}) = 0\}} \left( (u(\tilde{t}) - x) \frac{\partial u}{\partial t}(\tilde{t}) + (v(\tilde{t}) - y) \frac{\partial v}{\partial t}(\tilde{t}) \right)$$

$$G(x, y; t) = (u(t) - x)^2 + (v(t) - y)^2 - d^2 = 0$$

# Control de Topología de Offsets

¿Cuándo la d-offset

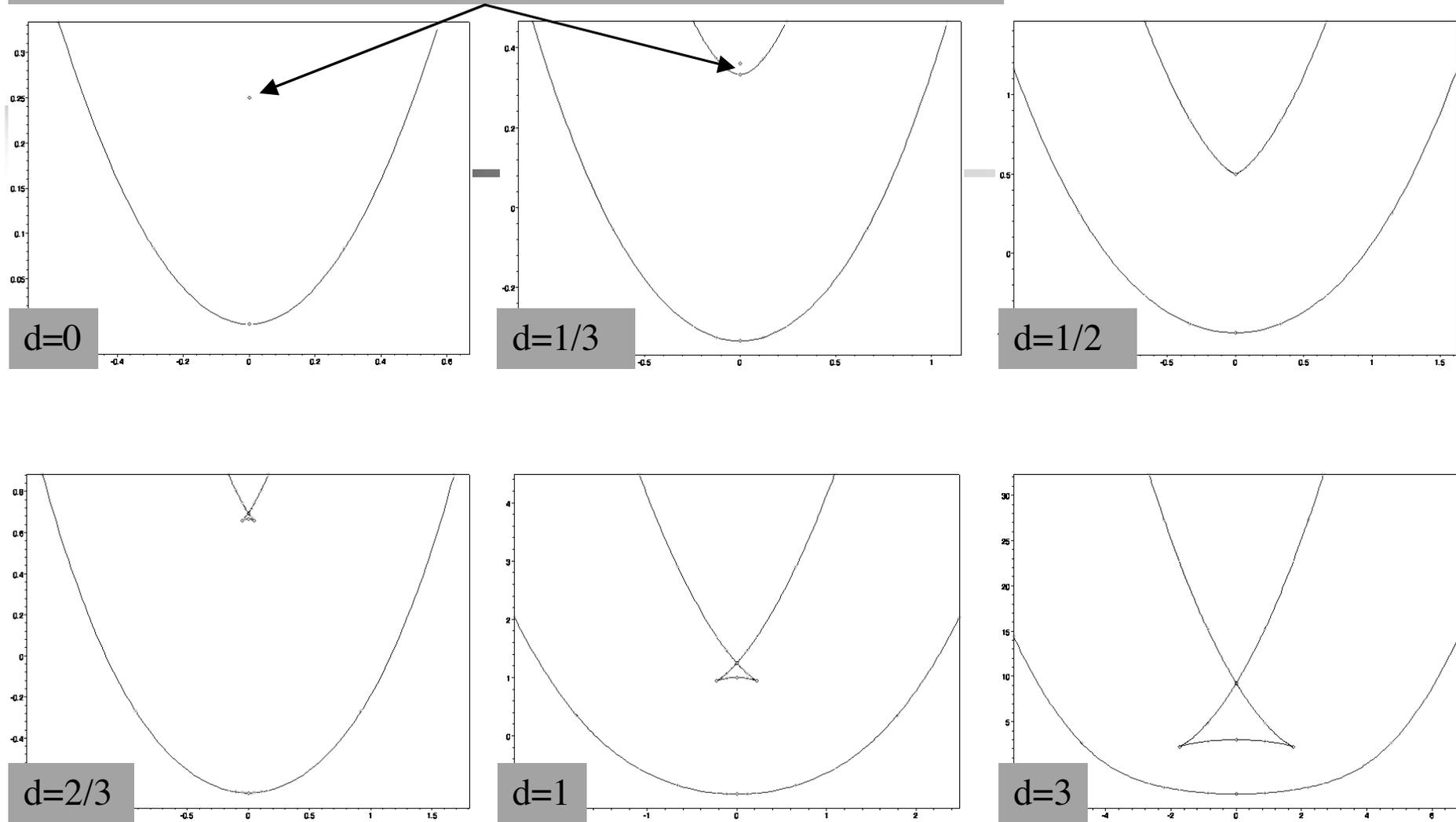
$$\begin{aligned} &16 x^6 + 16 x^4 y^2 - 40 x^4 y - 32 x^2 y^3 + (-48 d^2 + 1) x^4 + (-32 d^2 + 32) x^2 y^2 \\ &+ 16 y^4 + (-2 + 8 d^2) x^2 y + (-8 - 32 d^2) y^3 + (-20 d^2 + 48 d^4) x^2 \\ &+ (16 d^4 - 8 d^2 + 1) y^2 + (32 d^4 + 8 d^2) y - 16 d^6 - 8 d^4 - d^2 \end{aligned}$$

de la parábola

$$u(t) = t, v(t) = t^2$$

no es topológicamente una parábola?

# El punto aislado viene de la parte compleja



**Los cálculos:**

## **Una Eliminación de Cuantificadores sencilla**

La offset no es topológicamente una parábola cuando su discriminante con respecto  $y$ :

$$x^2 d^2 (64 x^6 + (48 - 192 d^2) x^4 + (192 d^4 + 336 d^2 + 12) x^2 - 64 d^6 - 12 d^2 + 48 d^4 + 1)^3$$

tiene más de 1 raíz real. O, equivalentemente, si el polinomio

$$64 x^3 + (48 - 192 d^2) x^2 + (192 d^4 + 336 d^2 + 12) x - 64 d^6 - 12 d^2 + 48 d^4 + 1$$

tiene 1 raíz real positiva.

**Los cálculos:**

## **Una Eliminación de Cuantificadores sencilla**

Para cualquier  $d$  el número de raíces reales de

$$64 x^3 + (48 - 192 d^2) x^2 + (192 d^4 + 336 d^2 + 12) x - 64 d^6 - 12 d^2 + 48 d^4 + 1$$

es siempre igual a 1:  $[1, 1, -d^2, -d^4 (4 d^2 + 1)^2]$

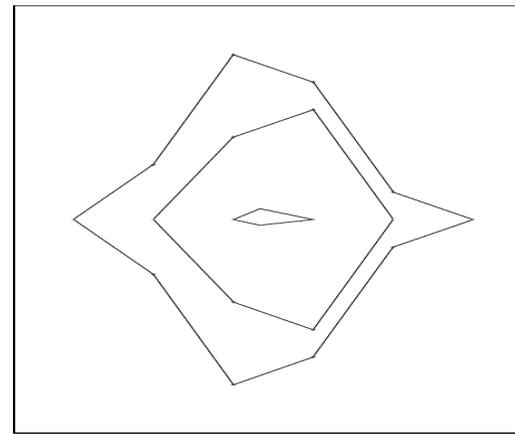
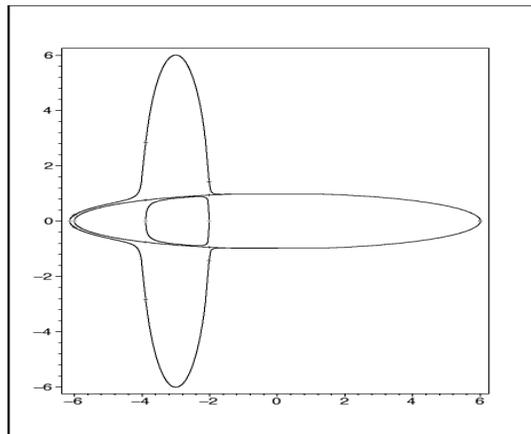
Para cualquier  $d > 1/2$  el número de raíces reales de

$$64 x^3 + (48 - 192 d^2) x^2 + (192 d^4 + 336 d^2 + 12) x - 64 d^6 - 12 d^2 + 48 d^4 + 1$$

con  $x > 0$  es siempre igual a 1:

$$[1, (2 d - 1) (2 d + 1), -d^2 (20 d^2 + 1) (4 d^2 + 5), -d^4 (4 d^2 + 1)^2 (2 d - 1)^3 (2 d + 1)^3]$$

# Cálculo de la topología de una curva definida implícitamente

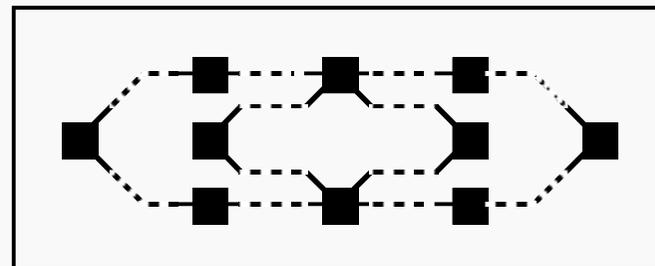
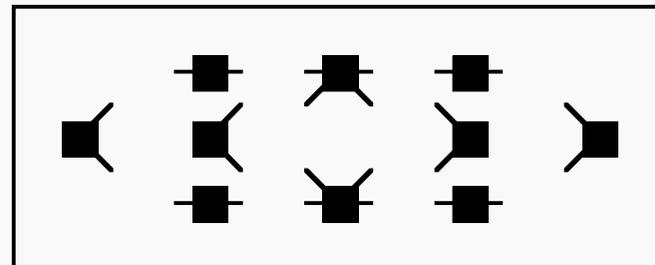
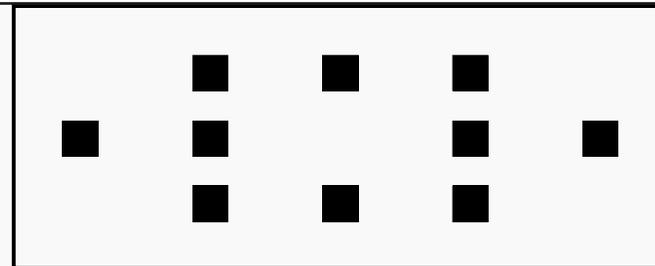


$$g(x,y) = 279756x + 279936xy^4 - 559692y^2x - 15583x^3 + 217x^5 + \frac{130218}{5}x^2 - \frac{23039}{10}x^4 + \frac{359}{10}x^6 + 370656y^4 - \frac{3726432}{5}y^2 - 72774y^2x^2 + \frac{12947}{5}y^2x^4 + 1296y^6 + 46728y^4x^2 + 15588y^2x^3 + \frac{37333439}{100}$$

# La Estrategia

$$P(x, y) := 2x^4 - 3x^2y + y^4 - 2y^3 + y^2$$

$$R(x) = x(2048x^6 - 4608x^4 + 37x^2 + 12)$$



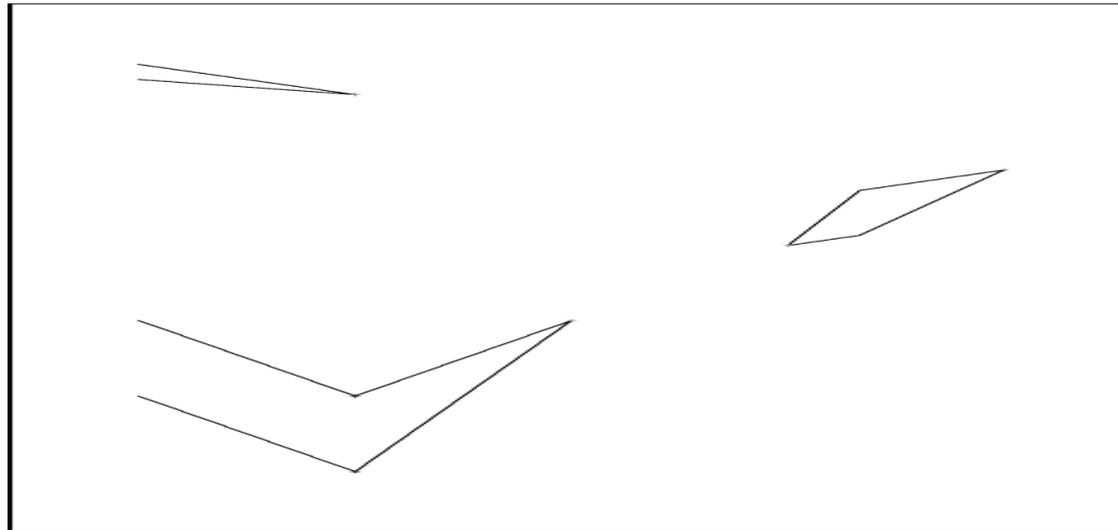
	Time	$d$	$r$	GP	Precision
Pol <sub>1</sub>	2.481	8	28	y	20
Pol <sub>2</sub>	0.130	5	4	y	15
Pol <sub>3</sub>	0.269	5	5	y	15
Pol <sub>4</sub>	0.171	4	4	n	15
Pol <sub>5</sub>	0.061	4	3	n	10
Pol <sub>6</sub>	1.170	8	8	n	20
Pol <sub>7</sub>	0.120	4	2	n	10
Pol <sub>8</sub>	0.360	6	6	y	15
Pol <sub>9</sub>	0.869	8	13	n	15
Pol <sub>10</sub>	0.351	6	5	n	10
Pol <sub>11</sub>	2.409	6	4	y	15
Pol <sub>12</sub>	116.959	8	4	y	40
Pol <sub>13</sub>	0.110	8	3	y	10
Pol <sub>14</sub>	3.569	6	8	n	30
Pol <sub>15</sub>	0.180	4	6	n	10
Pol <sub>16</sub>	0.230	6	7	n	10

Table 1: Experimental results

$$\text{Pol}_{12} = y^8 + 25y^4x^4 + 61y^6 + 62x^5y^4 + x^6 - 5x^2y^5 - 11xy + \frac{1}{10000000}y$$

Digits	$\alpha_2$ and $\alpha_3$
10	$0.9090909091 \cdot 10^{-8}$ $0.9090909091 \cdot 10^{-8}$
20	$0.909090909090909091 \cdot 10^{-8}$ $0.909090909090909091 \cdot 10^{-8}$
30	$0.90909090909090909090909091 \cdot 10^{-8}$ $0.909090909090909090909091 \cdot 10^{-8}$
40	$0.9090909090909090909090909073334909 \cdot 10^{-8}$ $0.9090909090909090909090909108483272 \cdot 10^{-8}$

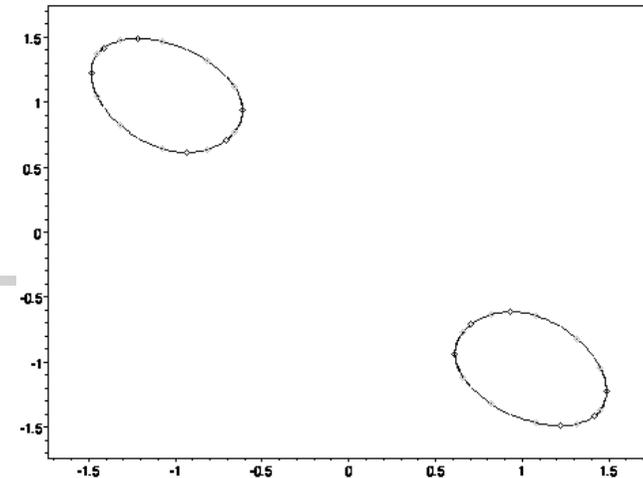
Table 2: Two real roots of the discriminant very close



Una aplicación:  
Secciones planas de  
superficies implícitas

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 2)^2 - 9x^2 - 9y^2 = 0$$

$$x + y + z = 0$$



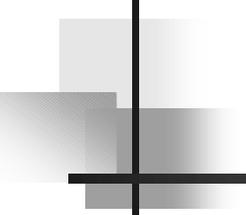
El análisis algebraico/topológico concluye que:

- ❖ La curva sección no tiene puntos singulares
- ❖ La curva sección tiene dos componentes cerradas empezando en:

$$[.6126044921, -.9332990412, .3206945491]$$

$$[-1.486514595, 1.218778958, .267735637]$$

$$\frac{\partial}{\partial s} x(s) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} f}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial s} y(s) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f}{\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)^2}}$$



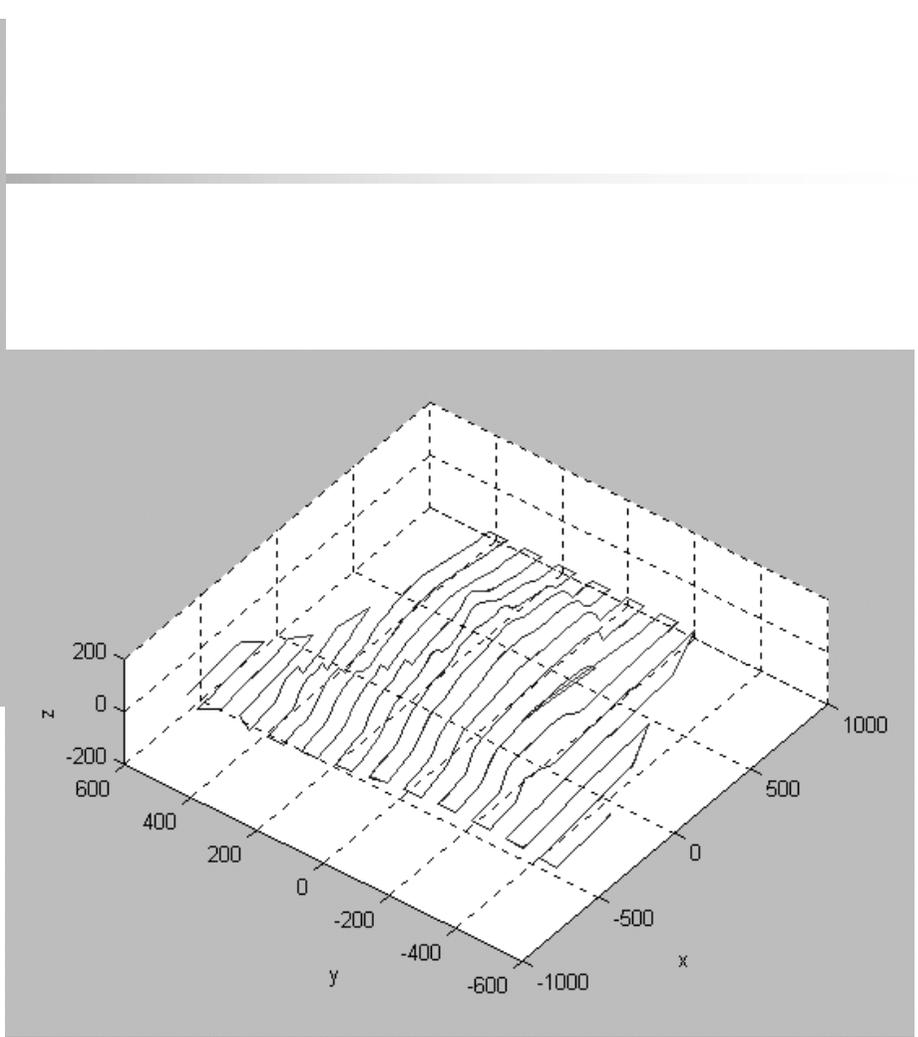
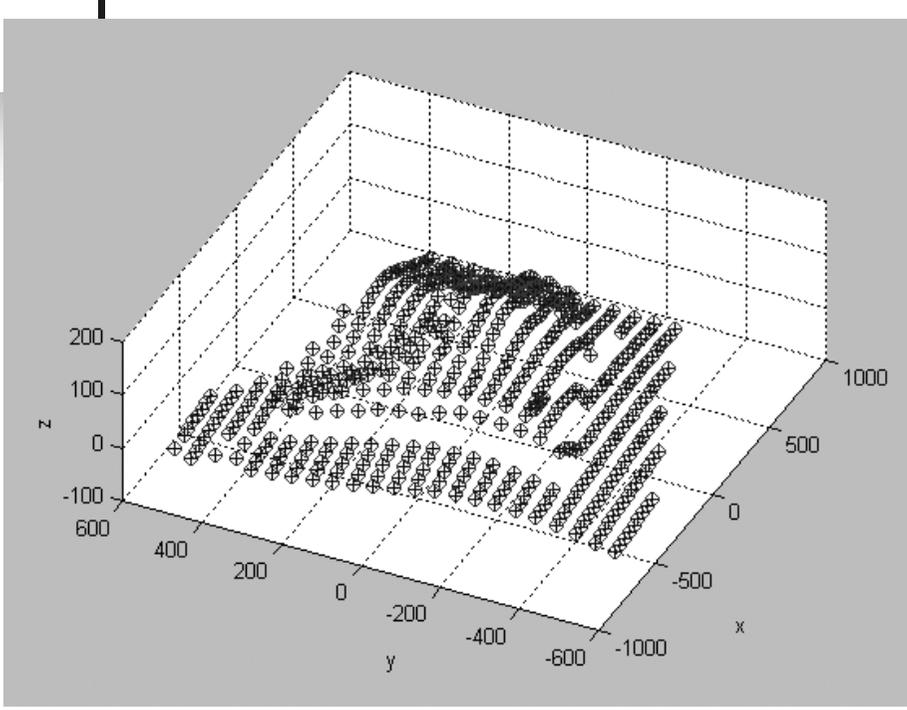
# Cálculo del Error de Forma

El problema algebraico

Dados dos conjuntos de  $n$  puntos  $X$  e  $Y$  en  $\mathbb{R}^3$ , determinar el movimiento  $F$  tal que  $F(X)$  e  $Y$  están lo más cerca posible.

$X$ : Puntos teóricos (desde la definición teórica)  
 $Y$ : Puntos reales (desde medidas reales)





$$X = \{P_1 = (x_1, y_1, z_1), \dots, P_n = (x_n, y_n, z_n)\}, \quad Y = \{Q_1 = (a_1, b_1, c_1), \dots, Q_n = (a_n, b_n, c_n)\}$$

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n x_i \quad \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n y_i \quad \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n z_i$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_i \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n b_i \quad \mathbf{C} = \sum_{i=1}^n c_i$$

- $\alpha =$

$$\frac{1}{n}(\mathbf{A} - \mathbf{Z} \cos(\theta) \sin(\eta) \cos(\xi) - \mathbf{Y} \cos(\theta) \sin(\eta) \sin(\xi) - \mathbf{Z} \sin(\theta) \sin(\xi) - \mathbf{X} \cos(\theta) \cos(\eta) + \mathbf{Y} \sin(\theta) \cos(\xi))$$

- $\beta =$

$$\frac{1}{n}(\mathbf{B} - \mathbf{Z} \sin(\theta) \sin(\eta) \cos(\xi) - \mathbf{Y} \sin(\theta) \sin(\eta) \sin(\xi) + \mathbf{Z} \cos(\theta) \sin(\xi) - \mathbf{Y} \cos(\theta) \cos(\xi) - \mathbf{X} \sin(\theta) \cos(\eta))$$

- $\gamma =$

$$\frac{1}{n}(\mathbf{C} - \mathbf{Z} \cos(\eta) \cos(\xi) + \mathbf{X} \sin(\eta) - \mathbf{Y} \cos(\eta) \sin(\xi))$$

$$\begin{aligned}
& (n\mathbf{YA} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}) \sin(\theta) \sin(\eta) \sin(\xi) + (n\mathbf{ZA} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}) \sin(\theta) \sin(\eta) \cos(\xi) + \\
& + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{YB}) \cos(\theta) \sin(\eta) \sin(\xi) + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{ZB}) \cos(\theta) \sin(\eta) \cos(\xi) + \\
& + (n\mathbf{XA} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \sin(\theta) \cos(\eta) + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{ZB}) \sin(\theta) \sin(\xi) + (n\mathbf{YB} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}) \sin(\theta) \cos(\xi) + \\
& + (\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{XB}) \cos(\theta) \cos(\eta) + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{A} - n\mathbf{ZA}) \cos(\theta) \sin(\xi) + (n\mathbf{YA} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}) \cos(\theta) \cos(\xi)
\end{aligned}$$

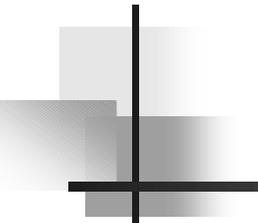
$$\begin{aligned}
& (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{YB}) \sin(\theta) \cos(\eta) \sin(\xi) + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{ZB}) \sin(\theta) \cos(\eta) \cos(\xi) + \\
& + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} - n\mathbf{YA}) \cos(\theta) \cos(\eta) \sin(\xi) + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{A} - n\mathbf{ZA}) \cos(\theta) \cos(\eta) \cos(\xi) + \\
& + (n\mathbf{XB} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}) \sin(\theta) \sin(\eta) + (n\mathbf{XA} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cos(\theta) \sin(\eta) + (n\mathbf{YC} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{C}) \sin(\eta) \sin(\xi) + \\
& + (n\mathbf{ZC} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C}) \sin(\eta) \cos(\xi) + (n\mathbf{XC} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{C}) \cos(\eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n\mathbf{ZB} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{B}) \sin(\theta) \sin(\eta) \sin(\xi) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B} - n\mathbf{YB}) \sin(\theta) \sin(\eta) \cos(\xi) + \\
& + (n\mathbf{ZA} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A}) \cos(\theta) \sin(\eta) \sin(\xi) + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} - n\mathbf{YA}) \cos(\theta) \sin(\eta) \cos(\xi) + \\
& + (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} - n\mathbf{YA}) \sin(\theta) \sin(\xi) + (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{A} - n\mathbf{ZA}) \sin(\theta) \cos(\xi) + (n\mathbf{YB} - \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}) \cos(\theta) \sin(\xi) + \\
& + (n\mathbf{ZB} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{B}) \cos(\theta) \cos(\xi) + (n\mathbf{ZC} - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C}) \cos(\eta) \sin(\xi) + (n\mathbf{Y} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{YC}) \cos(\eta) \cos(\xi)
\end{aligned}$$

where

$$\mathbf{XA} = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

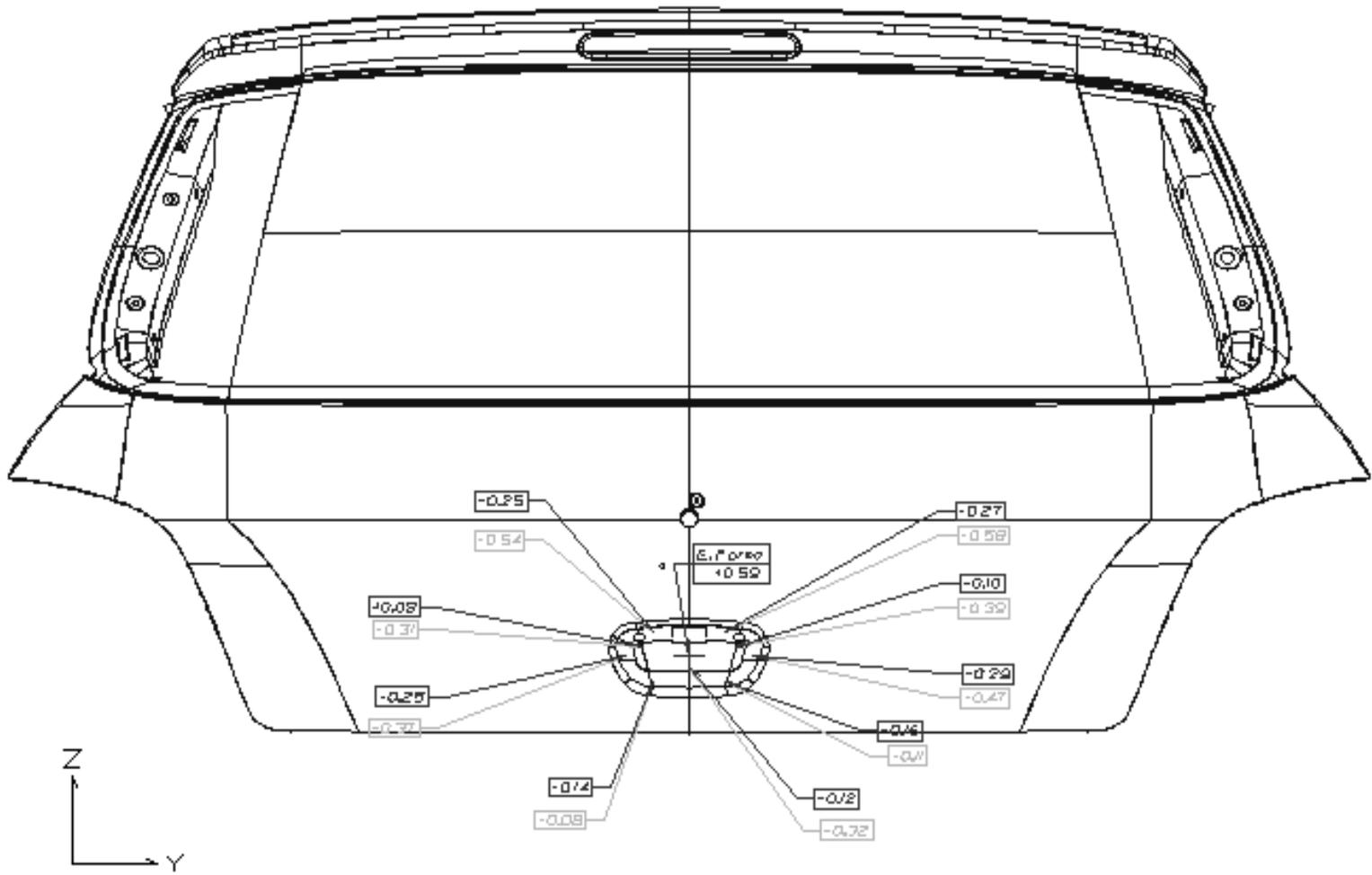
etc.

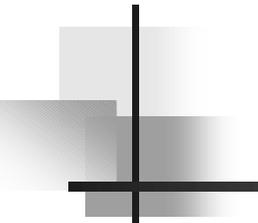


$$\tan(\xi) =$$

$$\begin{aligned}
 & - ((-Y C + Y C n) \cos(\eta) + (Y A n - Y A) \sin(\eta) \cos(\theta) + (-Y B + Y B n) \sin(\eta) \sin(\theta) \\
 & + (-Z A + Z A n) \sin(\theta) + (Z B - Z B n) \cos(\theta)) / ((Z C - Z C n) \cos(\eta) + (-Z A n + Z A) \sin(\eta) \cos(\theta) \\
 & + (Z B - Z B n) \sin(\eta) \sin(\theta) + (Y A n - Y A) \sin(\theta) + (-Y B n + Y B) \cos(\theta))
 \end{aligned}$$

Las otras dos ecuaciones (en dos incógnitas) se han resuelto simbólicamente: proporciona una ecuación en una variable ...





---

**Triangulación de superficies 'trimmed'**

e

**Iluminación/sombreado**

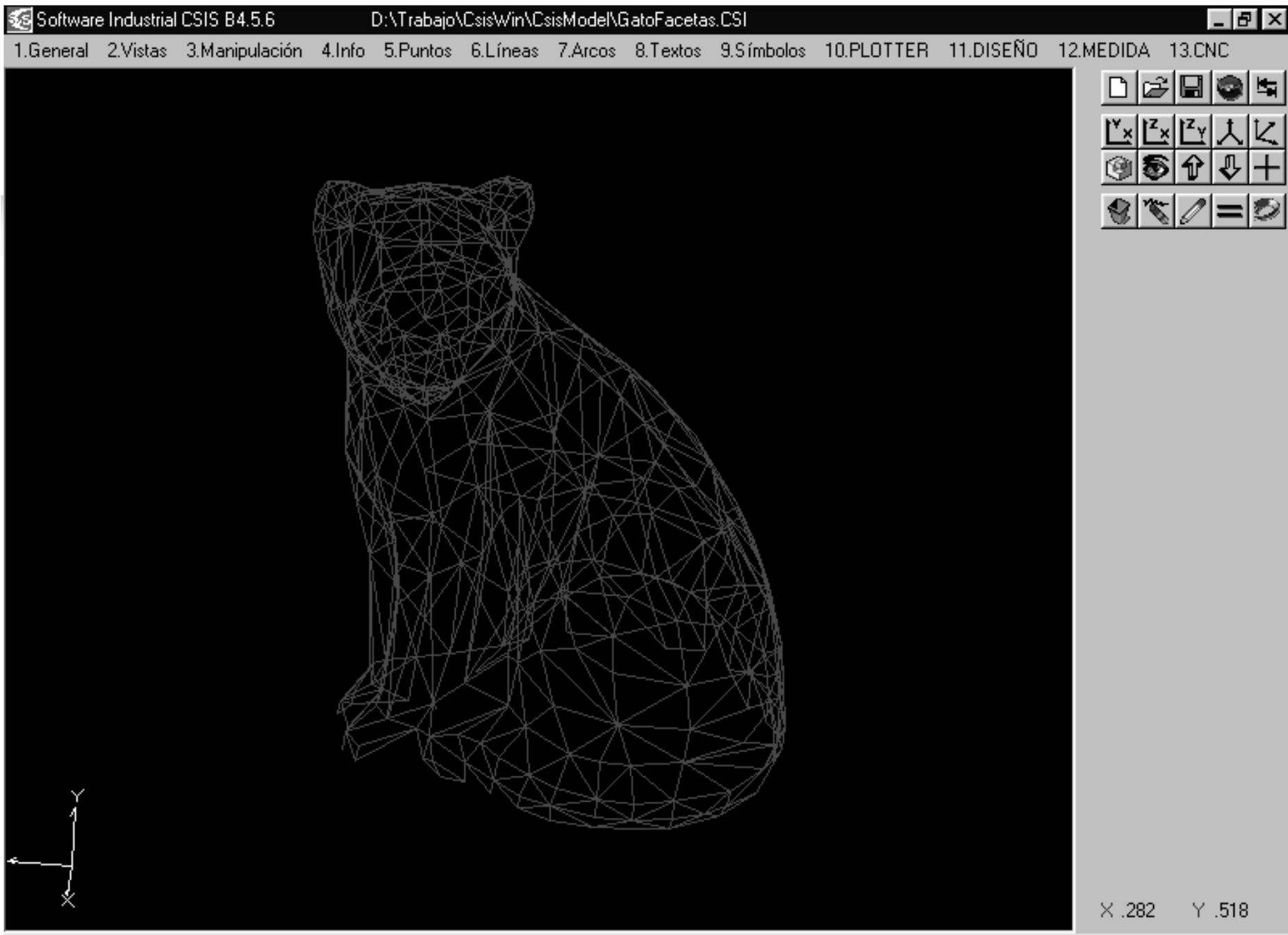
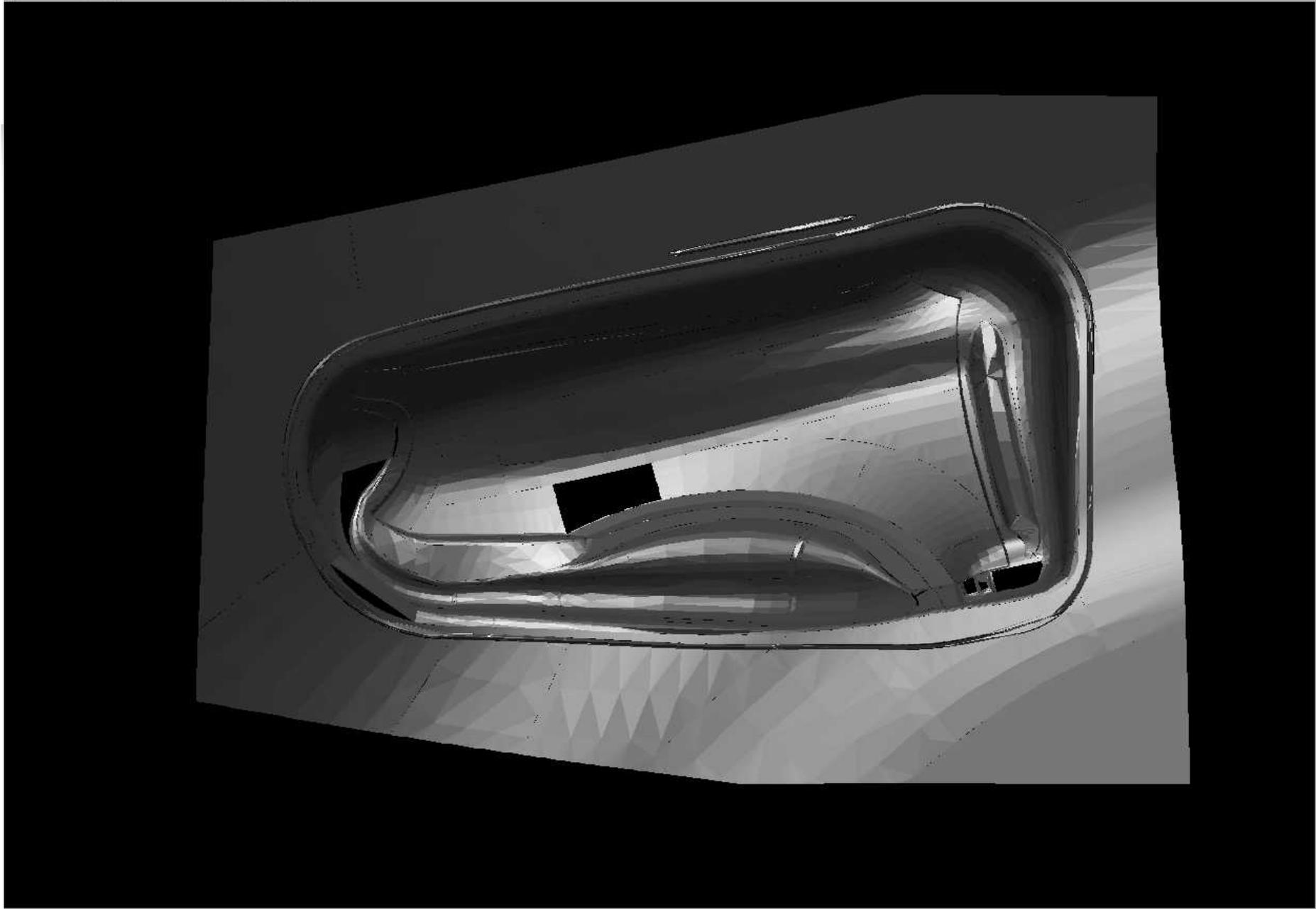
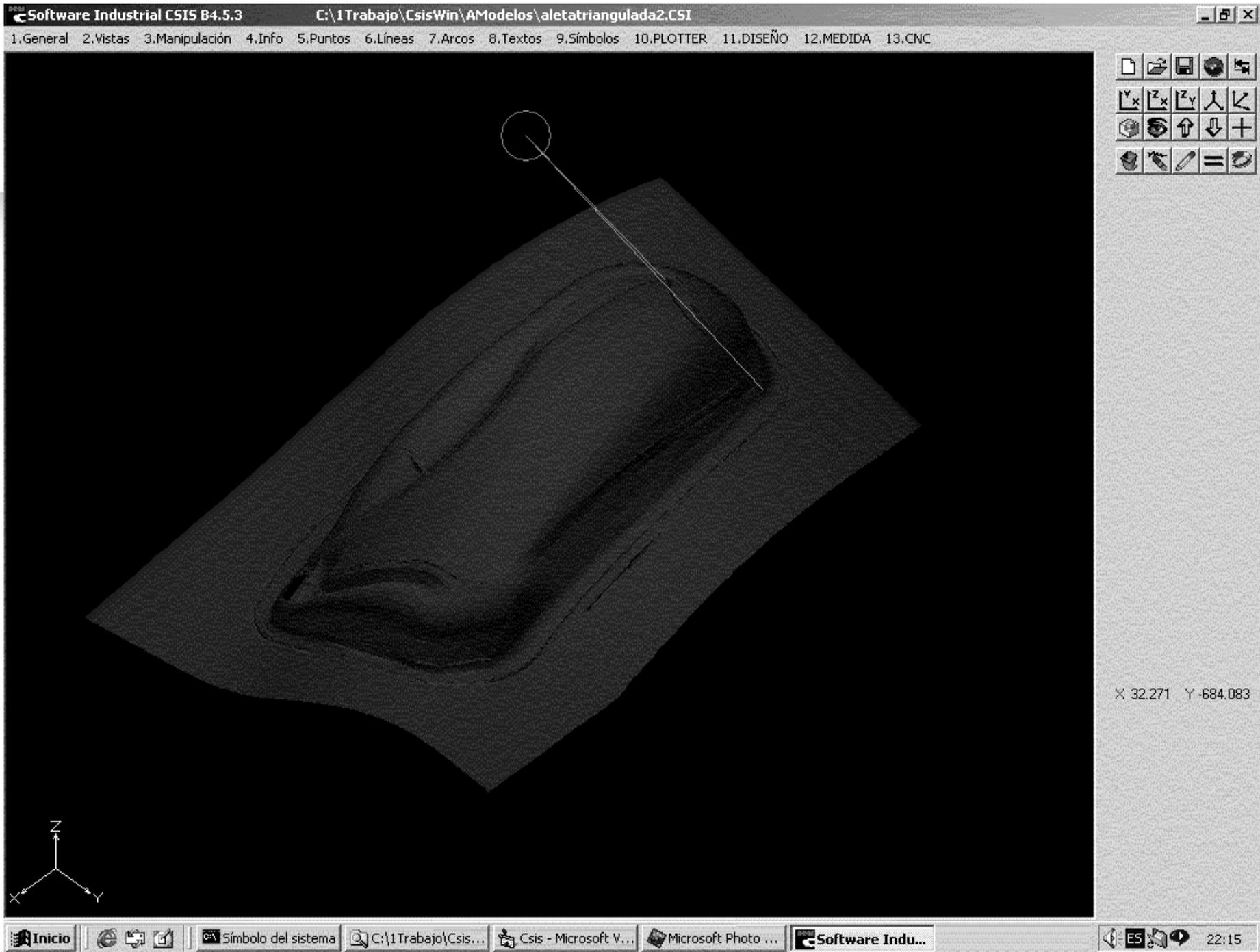


Figure No. 1

File Edit View Insert Tools Window Help





**A**  
**Numeric/Symbolic**  
**Problem Solving Environment**  
**for CAGD**

Maple/Mathematica/Mupad  
Matlab  
CSIS/Think3

## Some capabilities

### GENERATION OF POLYNOMIAL AND RATIONAL B-SPLINE CURVES AND SURFACES:

- Reading IGES/VDA format
- Plotting IGES/VDA format

### POLYNOMIAL AND RATIONAL B-SPLINE CURVE/SURFACE MANIPULATION

- Numerical generation of polynomial and rational B-spline curves and surfaces.
- Computation of the B-spline curve/surfaces derivatives, using:
  - basis function method
  - control point method.
- Knot vector refinement.
- Bezier decomposition.
- Approximate implicitization
- Approximation of rational B-spline curves/surfaces with polynomial ones, degree raising, ...

### A CAGD SYSTEM WITH EXACT ARITHMETIC

- Generic implicitization
- Symbolic/Numerical Polynomial System Solving

**Example 6** We consider the B-spline curves (polynomial and rational) defined by the following parameters:

```
> read "simbC.txt";
```

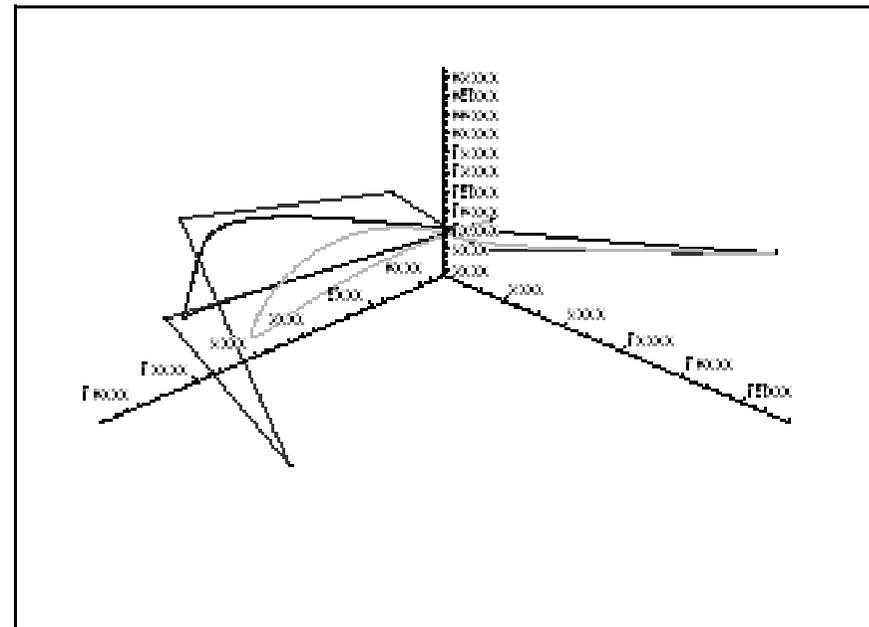
```
Curve order: 6
```

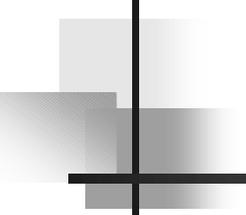
```
Knot vector: [0,0,0,0,0,0,.1210225739,1.,1.,1.,1.,1.,1.]
```

```
Control points: [[1813.213542, 3155.072848, 7292.017654,  
10852.09613, 11970.06777, 13138.01982, 5307.115079],  
[15411.10969, 6888.316017, 7878.233333, 4268.225166,  
9045.040000, 6034.080537, 9315.020747], [22834.01291,  
13631.11796, 26325.11671, 23448.19923, 5654.282051,  
18408.02733, 22853.31278]]
```

```
Weights: [.1883026555, .1081886648e-1, .5431078818e-1,  
.5421364074, .1062056055, .6872239468, .2581224202e-1]
```

DEMO

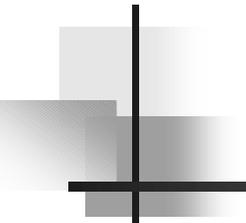




# PROBLEMAS

---

- ❖ Detección de autointersecciones para curvas y superficies
- ❖ A-splines
- ❖ Cálculo de la topología de superficies definidas implícitamente
- ❖ Cálculo de familias (definidas de forma paramétrica) de curvas y superficies con topología prefijada de antemano.



---

***EL PROYECTO GAIA II***



# ***IST-2001-35512 - GAIA II***

## ***Intersection algorithms for geometry based IT-applications using approximate algebraic methods***

- **Establish communication between the algebraic geometry and computer aided geometric design communities**
- **Improve the speed, robustness and accuracy of intersection algorithms in CAD by integrating approximate algebraic methods and traditional approaches**
- **Understand better possibilities and limitations of approximate implicitization**
- **Improve the usefulness of algebraic geometry in CAD and other application domains by using knowledge from**
  - **Real and classical algebraic geometry**
  - **Computer Aided Design (CAD)**
  - **Approximation theory**





# ***IST-2001-35512 - GAIA II***

## ***Intersection algorithms for geometry based IT-applications using approximate algebraic methods***

### ■ **Participants**

- SINTEF Applied Mathematics, Norway (Coordinator)S
- Johannes Kepler University, Linz, Austria INTEF
- University of Nice Sophia Antipolis and INRIA, France
- University of Cantabria, Santander, Spain
- University of Oslo, Norway
- think3, France & Italy

### ■ **Start date July 1<sup>st</sup> 2002, Duration 36 months**

- **Contact details:** SINTEF Applied Mathematics      e-mail: [tor.dokken@sintef.no](mailto:tor.dokken@sintef.no)  
Attention: tor Dokken      Phone:      Telephone: +47 22 06 76 61  
P.O. Box 124      Fax:      +47 22 06 73 50  
0314 Oslo, Norway      <http://www.math.sintef.no/gaiatwo/>



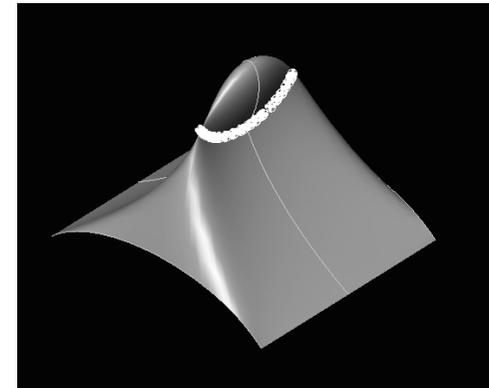
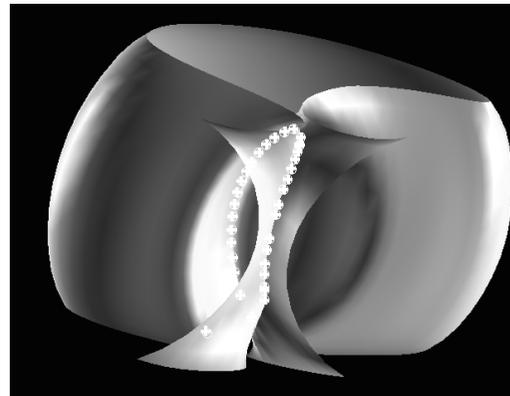
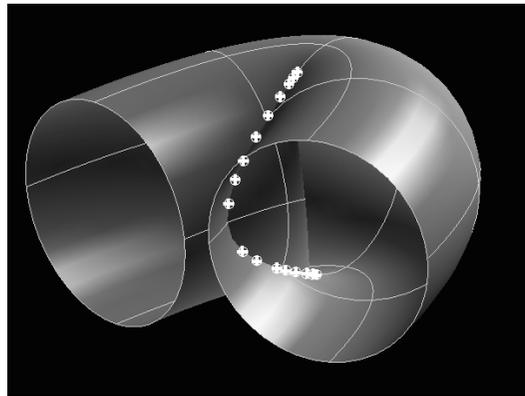
---

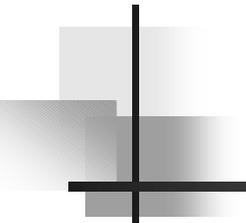
Project funded by the Future and Emerging Technologies arm of the IST Programme  
FET-Open scheme



# ***IST-2001-35512 - GAIA II*** ***Intersection algorithms for*** ***geometry based IT-applications*** ***using approximate algebraic*** ***methods***

- **Examples of self-intersections from the assessment project preceding GAIA II**





# *Diseño Geométrico Asistido por Ordenador*

*Álgebra Computacional*

*Cálculo Numérico*

*Desarrollo de Software*

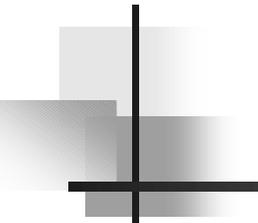
*Ecuaciones Diferenciales*

*Geometría Algebraica*

*Geometría Algebraica Real*

*Geometría Diferencial*

.....



## El Equipo

---

D. Bochis	F. Etayo
I. Necula	C. Gómez de Dios
M. Romano	L. González Vega
J. Espínola	E. Mainar
C. Tanasescu	J. Puig-Pey
F. Carreras	T. Recio
S. Corvez	R. Sendra

E\_mail: [gvega@matesco.unican.es](mailto:gvega@matesco.unican.es)

<http://frisco.matesco.unican.es/~gvega>