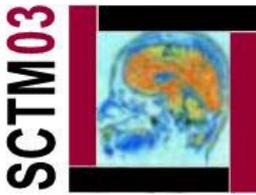


## *Radiaciones y Vida*



*José Hernández Armas*

Catedrático de Radiología y Medicina Física y Director del Laboratorio de Física Médica y Radiactividad Ambiental del Departamento de Medicina Física y Farmacología de la Universidad de La Laguna.  
Jefe del Servicio de Física Médica y Protección Radiológica del Hospital Universitario de Canarias.

### *1. Introducción*

Los seres vivos han recibido siempre radiación debida a fuentes naturales, tales como la radiactividad en suelo y en alimento o bebida, así como rayos cósmicos procedentes del espacio exterior. Toda la historia de la humanidad ha estado presidida por desarrollarse permanentemente en presencia de radiaciones.

Las radiaciones artificiales ocasionan una exposición adicional sobre la anterior, dando lugar a un incremento de la que recibimos desde la naturaleza. Como resultado de la vida moderna, millones de personas cada año vuelan en aviones comerciales recibiendo por ello una exposición extra a los rayos cósmicos.

El **uso** de la radiación forma actualmente parte integral de nuestra vida. En particular, las aplicaciones médicas de la radiación se consideran como algo común, abarcando tanto el diagnóstico radiológico como el tratamiento del cáncer.

El uso de la radiación en medicina y en la industria ocasiona, sin duda, resultados tremendamente beneficiosos para la sociedad. Al mismo tiempo, se puede asegurar que una dosis excesiva de radiación puede tener consecuencias desastrosas sobre la salud y el bienestar. La radiación puede causar enfermedades, y curarlas también. ¿Qué nivel de riesgo estamos dispuestos a aceptar por determinados beneficios?

El **miedo** a la radiación ocasiona las respuestas más irracionales de personas que, en los demás temas, responden de manera tranquila e inteligente. De alguna forma es comprensible, ya que la radiación es invisible y produce cambios biológicos sutiles que normalmente no son observables hasta pasados muchos años. Por otra parte, la radiación suele asociarse inmediatamente con bombas, lluvia radiactiva, muerte y destrucción. **El conocimiento es el mejor antídoto contra el miedo.**

En muchos ámbitos de la Medicina se están aplicando directa o indirectamente los resultados de usar radiaciones ionizantes sobre los pacientes. Este uso tiene su exponente principal en el **Radiodiagnóstico**, pero también las radiaciones constituyen la base de la especialidad médica **Medicina Nuclear**. Además, las radiaciones constituyen un arma esencial, a veces única, en el tratamiento de diversos tipos de cáncer (**Radioterapia**). Todos estos usos se fundan en los incontables beneficios para la realización de diagnósticos o para la ejecución de tratamientos de enfermedades. Como quiera que, de manera indefectible, el uso siempre va acompañado de efectos lesivos, es imprescindible que la utilización se realice respetando principios de **Protección Radiológica** que eviten, dentro de lo razonablemente posible, los efectos indeseados.

Cualquiera que sea el tipo de utilización, el efecto buscado es siempre una consecuencia de la interacción entre la radiación ionizante y la materia, particularizando habitualmente para la materia viva. Todos los procesos de interacción radiación-materia se expresan en el lenguaje de

las matemáticas. El uso de las matemáticas en los ámbitos clínicos de utilización de las radiaciones es una característica diferenciadora entre los mismos y los demás ámbitos de la práctica médica.

El principal propósito de esta ponencia es exponer un conjunto de ejemplos que pongan de manifiesto algunos aspectos de las matemáticas (especialmente el cálculo) que han sido y son útiles para las personas que trabajan con radiaciones electromagnéticas en Medicina.

## 2. Matemáticas en el uso terapéutico de radiaciones (Radioterapia)

El proceso de planificar un tratamiento en Radioterapia implica la elección y disposición de haces de radiación alrededor del paciente, a fin de proporcionarle una alta dosis en el lugar donde se le haya desarrollado un tumor y una dosis tan baja como sea posible en los demás tejidos.

Veamos algún ejemplo concreto de aplicación sencilla: *haces únicos*.

En muchos casos de leucemia, el paciente se trata con un “baño” de radiación a todo el cuerpo. En estas circunstancias no hay un lugar específico para el tumor, de forma que no puede especificarse una dosis de radiación determinada para el tumor.

Se trata de proporcionar una dosis uniforme a todo el cuerpo. Esto puede hacerse mediante uno o dos grandes campos de radiación o con diferentes combinaciones de campos más pequeños, administrados bien secuencialmente o usando un número de fuentes simultáneamente.

Veamos un caso concreto.

Se usa un gran haz como parte de un tratamiento de irradiación corporal total. La superficie anterior del paciente se encuentra a una distancia de  $2.25m$  de la fuente de radiación. El tamaño del haz a esta distancia es de  $70 \times 50cm$ . La tasa de dosis, medida en el espacio libre en una pequeña masa de tejido a una distancia de  $80.5cm$ , es de  $1Gy$  por minuto. Hay que establecer la dosis máxima debida a este haz, la dosis en la línea media del paciente y la dosis a la salida por la espalda del paciente, cuyo grosor es de  $24cm$ , teniendo en cuenta que se usa el mismo haz para un campo posterior y que cada haz se aplica durante 1 minuto.

Para el cálculo de la tasa de dosis en el espacio libre inmediato a la superficie del paciente, la aplicación de la ley de la inversa del cuadrado de la distancia conduce a:

$$1Gy/min (80.5/225)^2 = 0.128Gy/min$$

La relación tejido-aire (relación de la dosis en un punto del tejido y la dosis en un punto del aire situado a la misma distancia de la fuente) para este campo es de 1.09 (tablas). Por tanto, la tasa máxima de dosis es igual a  $0.128 \times 1.09 = 0.140Gy/min$ .

Como el paciente tiene un grosor en el tronco de  $24cm$ , la dosis en el punto medio en el espacio libre es:  $1Gy/min (80.5/237)^2 = 0.115Gy/min$ . Ya que la relación tejido-aire para una profundidad de  $12cm$  es 0.81 (tablas), la tasa de dosis en línea media es:  $0.115 \times 0.81 = 0.093Gy/min$ .

La tasa de dosis en el espacio libre en la superficie de salida es de  $1Gy/min (80.5/249)^2 = 0.104Gy/min$ , y como la relación tejido-aire es 0.53, la tasa de dosis en la superficie de salida es de  $0.104 \times 0.53 = 0.055Gy/min$ . Así, la dosis en la superficie (a  $0.5cm$ ) es:  $0.104 + 0.055 = 0.159Gy$ . La dosis en línea media es:  $0.093 + 0.093 = 0.186Gy$ .

Los cálculos de las planificaciones de los tratamientos radiológicos se han ido haciendo progresivamente más complicados, hasta el punto de que hoy ya no puede concebirse el efectuarlos de la manera anterior, más que en casos muy concretos. Estos cálculos se realizan

actualmente mediante complejos programas informáticos que se alimentan con los datos proporcionados por simulaciones Monte Carlo de los procesos de interacción de las radiaciones con los átomos y moléculas constituyentes del cuerpo humano.

En el Hospital Universitario de Canarias se utiliza un sistema de planificación de tratamientos radiológicos en el que hay que suministrar, lógicamente, los datos correspondientes a la configuración del paciente, los cuales se obtienen bien a través de imágenes obtenidas en un tomógrafo computerizado o bien mediante medidas y tomas de contornos realizadas sobre el propio paciente.

Uno de los métodos de cálculo de la dosis absorbida está basado en el conocimiento de los valores porcentuales de dosis en profundidad. En esencia:

(Dosis absorbida en un paciente) =  
 (Rendimiento del equipo irradiador) × (%Dosis en profundidad) × (Tasa de dosis normalizada al eje del campo) × (Factor de corrección por filtro del haz de radiación) × (Factor de conversión Gy/Unidades monitor) × (Nº Unidades monitor):

$$D(x, y, z) = S_{c,p}(v_c, v_p | filter) * PDD(v_p, z, SSD) \\ * R_{oa}(x, y, z, v_z) * C_{filter} * R_{cGy/MU} * N_{MU}$$

donde  $z$  indica la profundidad del punto,  $S$  es el factor relativo para dar la radiación producida a la profundidad  $z$ ,  $v_c$  es el tamaño del campo en la superficie de agua o a la distancia fuente-superficie, y  $v_p$  es el tamaño del campo en el isocentro o distancia fuente-eje.

Los parámetros a considerar son:

- Distancia fuente-superficie del paciente (SSD)
- Distancia fuente-isocentro del equipo (SAD)
- % Dosis en profundidad (PDD)
- Factor pico dispersión del haz (PSF)
- Factor de conversión  $Gy/UM$  : R

Cuando SSD no es igual a SAD es necesario corregir PDD y R. Para ello hay que aplicar la ley de la inversa del cuadrado de la distancia y los factores pico de dispersión:

$$PDD(v_p, z, SSD) = F(z) * \frac{PSF(v_F)}{PSF(v_p)} * PDD(v_F, z, SSD_m)$$

$$F(z) = \left( \left[ \frac{SSD_m + z}{SSD + z} \right] * \left[ \frac{SSD + d_{max}}{SSD_m + d_{max}} \right] \right)^2$$

$$v_F = \frac{v_p}{\sqrt{F(z)}}$$

$$R_{cGy/M}(SSD) = \left( \frac{SSD_m + d_{max}}{SSD + d_{max}} \right)^2 * R_{cGy/M}(SSD_m)$$

Las sencillas expresiones anteriores no tienen en cuenta situaciones muy frecuentes en la práctica clínica: inhomogeneidades y campos irregulares, ya que esto ocasiona cambios en el comportamiento de los componentes del haz de radiación. Asimismo, la incidencia oblicua del haz es muy difícil de introducir con métodos de corrección adecuados.

El cálculo habitual se realiza utilizando un algoritmo que hace uso de la teoría del haz pincel. En ella, el haz de tratamiento se divide en pequeños haces, llamados haces pincel. Cada pequeña sección del haz se considera constituida por tres finos haces pincel:

- el correspondiente a la radiación primaria
- el correspondiente a la radiación dispersa simple
- el correspondiente a la radiación dispersa múltiple

En este modelo, la distribución transversal de la dosis para cada uno de los tres haces pincel se modela mediante una función gaussiana  $K=K_\sigma$ , llamada kernel del haz pincel. El subíndice sigma establece el ancho de la gaussiana: es diferente para cada haz pincel y así, el haz pincel primario tendrá una menor sigma que los haces pincel dispersos.

La dosis para un campo irregular puede escribirse en términos del kernel del haz pincel mediante la expresión

$$D_{PBI}(x, y, z, A) = N(x, y, z) \iint_{A'} a(x', y') * PDD(x', y', z) * K(x - x', y - y', z) dx' dy'$$

La ecuación expresa la dosis debida a fotones para cualquier situación clínica.  $N$  es un factor de conversión para expresar la dosis real. Es igual para todos los puntos situados a una profundidad dada en caso de incidencia normal del haz. Todos los haces se ponderan con el valor del porcentaje de dosis en profundidad para cada profundidad. El factor  $a(x', y')$  permite corregir la situación en que los haces de radiación pasen a través de bloques o inhomogeneidades o en caso de incidencia oblicua.

La función kernel puede escribirse en función de la fluencia de fotones en la superficie,  $W$ :

$$K(x - x', y - y', z) = W(r') K_p(x - x', y - y', z) + R_1(z) K_{s_1}(x - x', y - y', z) + R_2(z) K_{s_2}(x - x', y - y', z) + \dots$$

Tras un cambio de variable y aplicando los límites de integración correctos, la dosis se calcula mediante la expresión:

$$D_{PBI}(x, y, z, ref) = N(z) * PDD(z) \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{(-\frac{1}{2}v-x)/\sigma_p(z)}^{(\frac{1}{2}v-x)/\sigma_p(z)} e^{-t^2/2} dt \int_{(-\frac{1}{2}v-y)/\sigma_p(z)}^{(\frac{1}{2}v-y)/\sigma_p(z)} e^{-t^2/2} dt$$

Las integrales pueden reescribirse en términos de funciones de error:

$$\begin{aligned} D_{PBI}(x, y, z(x', y')) &= N(x, y, z) * PDD(x', y') * a(x', y') * \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{(x_1-x)/\sigma_p(z)}^{(x_2-x)/\sigma_p(z)} e^{-t^2/2} dt \int_{(y_1-y)/\sigma_p(z)}^{(y_2-y)/\sigma_p(z)} e^{-t^2/2} dt \\ &= N(x, y, z) * PDD(x', y') * a(x', y') * [erf((x_2 - x) / \sigma_p(z)) - erf((x_1 - x) / \sigma_p(z))] * \\ &\quad [erf((y_2 - y) / \sigma_p(z)) - erf((y_1 - y) / \sigma_p(z))] \end{aligned}$$

Esto significa que dentro de la pequeña región se hace la hipótesis de que hay una cantidad infinita de haces pincel, todos con las mismas características. La ecuación establece solamente la contribución de la región  $a \times b$  con centro en  $(x',y')$  al punto  $P(x,y,z)$ . Para calcular la dosis total en el punto  $P$ , debe sumarse la contribución de todas las regiones.

### 3. Matemáticas básicas en la práctica diaria de la Medicina Nuclear

Puede definirse la especialidad médica de la Medicina Nuclear como aquella que mediante el uso de sustancias radiactivas no encapsuladas obtiene información diagnóstica de pacientes mediante el análisis de la distribución de aquellas sustancias en el cuerpo del paciente.

El personal médico y sanitario ha de estar familiarizado con los conceptos básicos del fenómeno físico que utiliza: la desintegración radiactiva, que está regido por la ley general:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

de la que se deriva el periodo de semidesintegración  $T_{1/2} = 0.693/\lambda$  y el de vida media, igual a  $1.44T_{1/2}$ .

La cantidad de núcleos radiactivos que experimentan transiciones en un periodo de tiempo se llama actividad acumulada, que se expresa en la unidad de actividad, Becquerelios, por la unidad de tiempo hora. Es inmediato tener en cuenta que:

$$\text{Actividad acumulada (Bq-horas)} = A \text{ (Bq)} \times T_{1/2} \text{ (horas)} \times 1.44$$

La calidad de las imágenes que se obtienen cuando se registra la actividad radiactiva administrada a un paciente está en general relacionada con la actividad, mientras que la energía depositada en el paciente depende de la actividad acumulada. Por ello, la relación anterior es manejada continuamente por el personal médico y de Radiofísica Hospitalaria, pues establece que un radionúclido con una vida media corta tiene más actividad con menor material radiactivo, lo que suele ser deseable para estudios clínicos puesto que la relación (calidad de imagen / dosis al paciente) es inversamente proporcional a la vida media.

La utilización adecuada de materiales radiactivos administrados al paciente y la interpretación de los resultados consiguientes implica el apoyarse en modelos matemáticos capaces de dar una idea de lo que ha ocurrido con el material radiactivo dentro del cuerpo del paciente. De manera muy simplificada se puede hablar de un modelo de compartimentos, tanto cuando se considera un compartimento cerrado como cuando se trata de uno abierto.

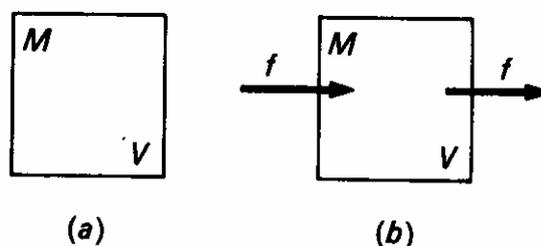


Figura 1. Modelos de compartimentos: (a) cerrado; (b) abierto.

**Modelo de compartimento cerrado.** Considérese un recipiente cerrado con un volumen  $V$  de agua. En él se disuelve una masa  $M$  de una sustancia. Se introduce un trazador radiactivo de actividad radiactiva  $R$  conocida y masa despreciable. Supóngase reparto homogéneo e inmediato del trazador.

Se toma una muestra de volumen  $v$ , que contiene una masa  $m$ . La radiactividad en la muestra es  $r$ .

Como el reparto del trazador es homogéneo, la concentración es igual en todo el recipiente y se tiene:  $r/v = R/V = \omega$ ; o bien por unidad de masa:  $r/m = R/M = x$ .

Este sencillo método se utiliza para determinar el volumen sanguíneo inyectando hemafís marcados con Cr-51. También el agua total del organismo, inyectando agua tritiada.

Desgraciadamente, un compartimento biológico nunca es totalmente cerrado, y se puede llegar a resultados absurdos si se desprecian los intercambios metabólicos entre compartimentos. Así, por ejemplo, se administran a un sujeto normal 100 microcurios de yoduro marcado (con I-131). Se mide la radiactividad plasmática al cabo de 24 horas y se obtienen 0.25 microcurios por litro. Entonces, según la ecuación de dilución, el volumen de difusión sería de 400 litros, lo que es absurdo. El modelo es incorrecto, pues no ha tenido en cuenta la fijación del yodo en el tiroides.

$$\boxed{\frac{r}{v} = \frac{R}{V} = \omega} \quad (\text{concentración radiactiva})$$

$$\boxed{\frac{r}{m} = \frac{R}{M} = x} \quad (\text{radiactividad másica})$$

Figura 2. Modelo de compartimentos: ecuación de dilución.

**Modelo de compartimento abierto.** Consideremos el mismo recipiente que antes, pero ahora en comunicación con el exterior. Entra y sale de él por unidad de tiempo la cantidad  $f$  de materia;  $f$  es una constante, al igual que la masa  $M$ : hay equilibrio entre las entradas y las salidas (estado de equilibrio dinámico).

El valor de  $f$  depende al mismo tiempo de la masa  $M$  del recipiente y de la cinética del intercambio: una misma tasa  $f$  puede corresponder a un intercambio rápido si  $M$  es pequeña, o a un intercambio lento si  $M$  es grande. Por esta razón se define otra magnitud más directamente cinética: la tasa de renovación  $k = f/M$ .

Las cantidades  $M$ ,  $V$ ,  $k$  y  $f$  caracterizan al modelo con independencia del trazador. Durante un tiempo  $t$  entra y sale la cantidad  $ft$ , es decir, una fracción  $kt$  de la masa del compartimento.

La introducción en el compartimento de un trazador de actividad  $R_0$  en el instante  $t=0$  va seguida de una eliminación progresiva, y la actividad  $R$  del compartimento disminuirá a lo largo del tiempo. Supóngase que la mezcla es inmediata y homogénea.

La actividad que sale del compartimento durante el tiempo  $dt$  es  $-dR$ . Esta actividad será proporcional a  $f$  y a la actividad específica  $x = R/M$ .

Cuando sale del compartimento la actividad  $dR$ , la actividad y por tanto la actividad másica disminuyen en el compartimento y se tiene  $-dx = -dR/M$ , de donde:

$$-(dx/dt) = kx.$$

La solución de esta ecuación diferencial es  $x = x_0 e^{-kt}$ , y análogamente se obtendrá para  $R$  y para  $\omega$ .

Después de haber introducido la actividad  $R_0$  en un compartimento se procede a hacer medidas sucesivas de la actividad másica  $x$  en muestras tomadas en el transcurso del tiempo y se obtienen resultados experimentales que se sitúan sobre una recta descendente en coordenadas semilogarítmicas, lo que permite deducir que es correcta la suposición de modelo de compartimento abierto.

En la recta, el tiempo que separa dos puntos  $x_1$  y  $x_1/2$  se llama periodo biológico, que está relacionado con la tasa de renovación por la expresión  $K = 0.693/T_b$ .

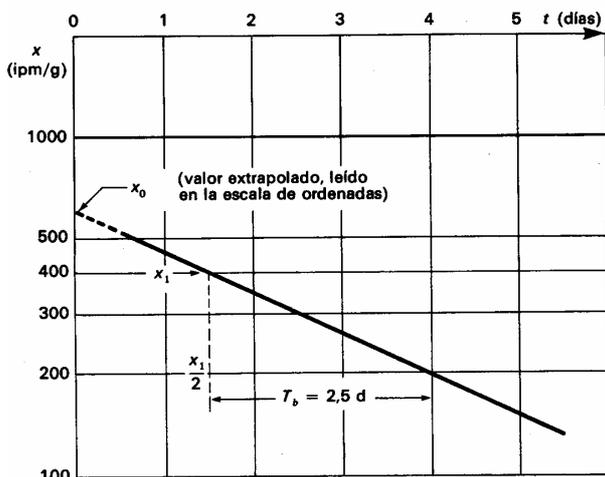


Figura 3. Curva experimental de un compartimento abierto.

Al cabo del tiempo  $T_b$  la cantidad de materia que ha salido es  $fT_b$ , es decir,  $kMT_b$  o  $0.693M$ . Esta materia ha sido reemplazada por la misma cantidad que ha entrado en el compartimento. Al cabo de un tiempo igual a  $1/k = 1.44T_b$  ha entrado y salido una cantidad de materia igual a la masa  $M$  del compartimento. A este tiempo se le llama tiempo de renovación. Entonces, conociendo  $x_0$  o  $\omega_0$  se puede determinar, por la ecuación de dilución, o bien  $M$ , o bien  $V$ .

En Biología es necesario con frecuencia utilizar modelos más complejos. Son frecuentes los modelos catenario y mamilar.

Si en el instante  $t=0$  se inyecta la radiactividad  $R_0$  en el primer compartimento, se puede determinar la ley de crecimiento de  $R_1=f(t)$  que, en general, es una suma de exponenciales decrecientes, del tipo

$$R_1 = K_1 e^{-\lambda_1 t} + K_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Los parámetros  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dependen de  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_e$  y  $f_s$ .

Los sistemas fisiológicos corresponden con frecuencia a modelos más complejos, y los resultados experimentales son difíciles de analizar e interpretar.

Con demasiada frecuencia el compartimento se asimila a una entidad anatómica o a un conjunto funcional dado: en algunos casos pueden coincidir, pero no tiene que ser así obligatoriamente. En realidad, un compartimento es un conjunto de moléculas que tienen la misma probabilidad de experimentar un suceso dado.

En la práctica médica habitual sólo sirven los modelos simples en los que la ecuación de dilución es inmediatamente utilizable; los modelos más complejos son muy útiles para conocer el metabolismo de numerosas sustancias, pero no se emplean en su forma completa.

**Medida de las tasas.** Si se inyecta bruscamente la actividad  $R$  en una vena, el producto radiactivo se difunde y “se extiende”, mientras que el conjunto del flujo sanguíneo se desplaza hacia el contador colocado, por ejemplo, frente a las cavidades cardiacas.

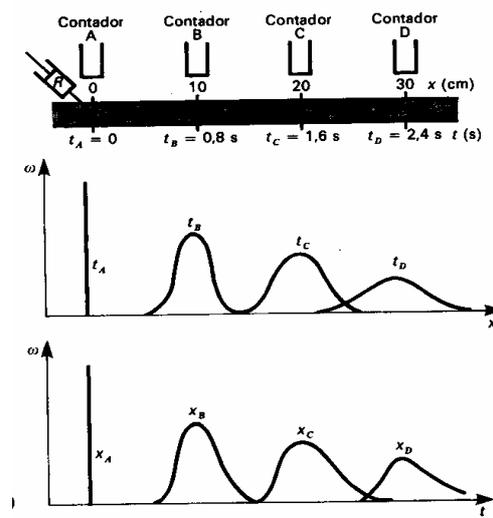


Figura 4. Medida del flujo cardiaco: posición de los contadores a lo largo de la vena; difusión de la radiactividad; registros temporales.

Durante el tiempo  $dt$ , el contador registra la actividad  $dR$  del volumen  $dV$  que pasa ante él. Se tendrá entonces:

$$dR/dt = (dR/dV)(dV/dt).$$

Como  $dR/dV = \omega$  y  $dV/dt = F$  (tasa sanguínea, en este caso tasa cardiaca), entonces:

$$dR = F \omega dt.$$

La actividad total registrada por el contador durante el paso de la zona radiactiva está dada por:

$$R = \int_0^\infty dR = F \int_0^\infty \omega dt,$$

así que

$$F = R / \int_0^\infty \omega dt \quad (\text{ecuación de Stewart-Hamilton}).$$

Si el contador puede medir  $\omega$  en cada instante, la integral permite calcular entonces  $F$ .

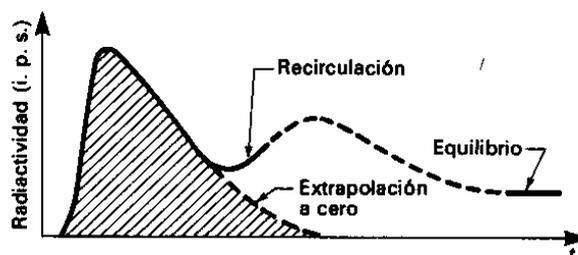


Figura 5. Medida del flujo cardiaco. Curva registrada al nivel de un contador.

**Dosis a pacientes debidas a radionúclidos administrados.** Se trata de calcular las dosis a tejidos en un órgano determinado debidas a material radiactivo que se encuentra en ese órgano o en otro órgano del cuerpo. Estos cálculos son importantes, ya que es esencial para la salud presente y futura del paciente conocer las dosis a órganos críticos debidas a la actividad situada en algún órgano.

El llamado comité MIRD (*Medical Internal Radiation Dose*) ha asumido, desde 1968, la responsabilidad de crear tablas de manera que los cálculos de dosis puedan hacerse para los radionúclidos usados.

El punto de partida para cualquier cálculo de dosis es el disponer de información detallada sobre los factores físicos implicados en la desintegración de los radionúclidos incluyendo los tipos de “partículas” emitidas, sus números relativos y la energía. Pueden observarse los datos correspondientes dados por MIRD 10 sobre el Tc-99m. A partir de estos datos se puede calcular la energía emitida por desintegración.

#### 4. Ejemplos de uso de las matemáticas en Radiodiagnóstico

El Radiodiagnóstico se ha definido como la obtención de imágenes del interior del organismo humano mediante la utilización de radiaciones. Actualmente, esta definición es incompleta ya que dentro del Radiodiagnóstico se encuentra también la obtención de imágenes con otros agentes físicos, tales como los ultrasonidos o los campos magnéticos. Actualmente, el pujante uso de las radiaciones ionizantes en Medicina ha dado lugar a una nueva especialidad que, además de permitir la realización de diagnósticos mediante la utilización de catéteres guiados por rayos X, realiza también innumerables intervenciones con finalidad terapéutica que han suplantado muchas intervenciones quirúrgicas agresivas que tenían que llevarse a cabo en el pasado para alcanzar el mismo objetivo: estamos hablando de la Radiología Vasculare Intervencionista, dentro de la que existe una subespecialidad que es la Cardiología Hemodinámica Intervencionista.

Es conocido que el Radiodiagnóstico interviene en una u otra forma en más del 70% de los diagnósticos médicos. Es aún más conocido que esta especialidad médica se desarrolló casi inmediatamente después de que el Profesor Rontgen comunicó, en diciembre de 1895, que había descubierto “una nueva clase de rayos”. El desarrollo meteórico de la utilización de los rayos X en Medicina no tiene comparación con ningún otro agente físico o químico que se utilice en la práctica médica. Desde 1896 hasta 1973 el Radiodiagnóstico podía definirse como la obtención

de una imagen radiante en una película radiográfica constituida por un soporte plástico impregnado con pequeños cristales de haluro de plata. Este tipo de Radiodiagnóstico aún está en vigor, y constituye todavía una buena parte del conjunto de los usos diagnósticos de los rayos X. Pero en la última fecha indicada se comenzó la utilización de un equipo técnico inventado por el Dr. Hounsfield, científico e ingeniero inglés. Ese equipo se denominó inicialmente Tomografía Axial Computerizada, y actualmente TC. Fue la irrupción de la imagen digital en el Radiodiagnóstico, que ha tenido desde entonces un crecimiento continuo. Es notorio el hecho de que la Radiología Vascular e Intervencionista ya no se concibe más que en un entorno de imágenes digitales. Y esta es también la situación de las imágenes de Ultrasonografía o las de Resonancia Magnética.

Se comprenderá que todo este desarrollo no puede entenderse sin la participación activa de las matemáticas: tanto para la descripción precisa del proceso de interacción agente físico-materia como en el proceso de generación de imágenes digitales. Es imposible en el espacio de estas líneas de hacer un recorrido por todo este panorama de tecnología aplicada a la medicina. Sin embargo, espero someter a la consideración del lector algunos ejemplos prácticos que ilustren cómo el cálculo matemático está presente en el día a día del uso clínico de los rayos X.

**Radiodiagnóstico general clásico.** Cuando se usa una película en Radiodiagnóstico, casi siempre se coloca entre dos pantallas fluorescentes que responden principalmente a la luz emitida por la sustancia fluorescente. El ennegrecimiento de la película debida a la acción directa de los rayos X es normalmente menos del 2% del efecto total.

Después de haberla procesado, la película se observa colocándola enfrente de un negatoscopio uniformemente iluminado, donde la sección de la película expuesta a la radiación se observa negra, y la no expuesta, blanca. Si el brillo de la luz del negatoscopio es  $B_0$  y la cantidad transmitida es  $B$ , entonces la densidad de la película viene definida por  $D = \log(B_0/B)$ , o bien  $B = B_0 e^{-2.303D}$ . Si la película transmite 1/10 de la luz incidente, la densidad es 1 ( $B_0/B = 10$ ).

La razón para esta elección de definición de densidad se explica considerando que si una película con densidad 1.0 transmite 1/10 de la luz incidente, dos de estas películas transmitirán  $0.1 \times 0.1 = 0.01$  de la luz, y entonces tendrá una densidad 2. Dos de estas películas tienen el doble de cantidad de granos de plata reducida que una película simple. Por tanto, es razonable expresar la densidad combinada de las películas como 2.0. De esta forma la densidad es proporcional a la cantidad de plata procesada en la película.

La cantidad de granos de haluro de plata reducidos a plata metálica es directamente proporcional a la cantidad de radiación que alcanza a la película. Dicha cantidad viene dada por el miliamperaje de la corriente electrónica que generó el haz de rayos X y por el tiempo que estuvo actuando: es lo que suele expresarse como el *mAs* del haz de rayos. Asimismo, la energía depositada por la radiación en la unidad de masa, es decir, la dosis, es directamente proporcional a la cantidad de radiación.

Cada día se producen unas 200000 imágenes médicas, lo que implica que un número similar de decisiones se toman basadas en la calidad de estas imágenes.

La calidad de la imagen radiográfica significa cuantificar la perfección de la misma, para lo que hay que establecer los valores que en ella toman los siguientes parámetros:

- Contraste
- Borrosidad
- Ruido

El término contraste está directamente ligado a la diferencia de los coeficientes lineales de atenuación de los medios atravesados por la radiación. El contraste radiográfico se utiliza para describir la diferencia de densidad óptica entre dos áreas de una radiografía. En muchos casos, un contraste radiográfico alto mejora la capacidad de diferenciar estructuras del objeto en la radiografía. El contraste radiográfico es el resultado de dos factores: el contraste de la imagen y el contraste de la película o sistema receptor de la imagen.

Se denomina curva característica de una película a la curva que representa los valores de densidad óptica medida para cada zona de la película frente al logaritmo de la exposición relativa de dicha zona (en  $mR$ ). Puede considerarse como una descripción de la respuesta del sistema de registro de la imagen (en este caso película) a unas ciertas condiciones de entrada. El contraste de la película está asociado con la pendiente de la curva característica; mayor pendiente significa película más sensible o más rápida, es decir, que requiere menos exposición.

Las curvas características son las curvas estándar usadas para presentar las propiedades de una película. Estas curvas tienen cuatro regiones importantes:

La porción plana en el extremo izquierdo, donde la densidad es independiente de la exposición, es debida a la densidad de la película base más el velo de fondo: hay densidad tanto si la película ha sido expuesta como si no. El velo tiende a aumentar si la película es vieja o si se almacena a temperaturas altas.

En la siguiente región de la curva la densidad aumenta rápidamente con la exposición. Esta región va seguida por una porción recta donde la densidad aumenta linealmente con el logaritmo de la exposición. Finalmente la curva comienza a aplanarse a alta exposición, se produce saturación y región de exposición correcta.

La velocidad de una película puede determinarse hallando el valor de la exposición necesaria para producir una densidad de 1 mayor que la densidad de la base más velo.

La sensibilidad de estas películas es la recíproca de estas exposiciones. Todo lo dicho para películas es válido para combinaciones películas-pantallas intensificadoras.

Lo frecuente es usar películas en la parte lineal del gráfico, con densidades comprendidas entre 0.4 y 2.0.

La mínima diferencia en exposición detectable dependerá de la pendiente de la curva característica. La pendiente de la porción recta de la curva se suele denominar la gamma de la película:  $\text{Gamma} = (D_2 - D_1) / \log(X_2/X_1)$ , correspondiendo los subíndices a los valores de dos puntos situados en dicha zona recta.

La exposición a la radiación debe ser tal que todas las partes de la radiografía se encuentren en la porción recta de la curva característica, lo cual asegurará el mismo contraste para todas las densidades.

El término borrosidad va ligado al grado de detalle observable en una imagen registrada. La borrosidad tiene tres causas principales: tamaño del foco productor de radiación; sistema de detección de radiación; movimiento de la estructura radiografiada. Estas tres causas de imprecisión suelen cuantificarse mediante el uso de un dispositivo de prueba, llamado habitualmente modelo de barras. Pero existe un método para describir la borrosidad de la imagen de una forma precisa y práctica e independiente del observador. Consiste en analizar las características de la imagen de la línea producida por un objeto de prueba con una hendidura. El gráfico que representa los resultados de la exploración de la imagen con un microdensitómetro, es decir, la distribución espacial de la densidad óptica en la imagen de la ranura, se conoce como función de dispersión lineal.

Una forma de obtener más información sería utilizar la dada por la función de dispersión lineal y aplicarle una transformada de Fourier. El resultado es la función de la

transferencia de modulación, que representa la capacidad de resolución de un sistema de imágenes.

La frecuencia espacial es una relación del cambio de la densidad óptica con relación a la distancia (es similar al concepto de pares de líneas por *mm*). Las porciones de una imagen en las que las densidades ópticas varían de valores altos a bajos en una distancia corta se dice que contienen información de frecuencia espacial alta.

La función de transferencia de modulación describe la capacidad de un sistema de formación de imágenes para reproducir información de frecuencia espacial baja, media y alta.

En las imágenes médicas, ambas frecuencias espaciales, baja y alta, son clínicamente importantes. Las componentes de la imagen con frecuencia espacial baja proporcionan información útil para el diagnóstico cuando se examina una imagen del abdomen, donde los cambios graduales en las densidades ópticas en algunas regiones anatómicas pueden indicar la presencia de patología. La información de frecuencia espacial alta en una imagen de extremidades o de una mama indica los detalles finos y las estructuras dentro de estos órganos.

Es importante distinguir entre la curva de la función de dispersión lineal y la curva de la función de transferencia de modulación. El eje *X* para la función de dispersión lineal está en unidades de longitud, mientras que para la función de transferencia de modulación está en unidades de frecuencia espacial (normalmente en ciclos por *mm*). Al comparar sistemas de imagen, la función de dispersión lineal de un sistema con borrosidad mayor será más ancha que la de un sistema nítido. La función de transferencia de modulación de un sistema mejor que otro (más nítido) estará por encima de la función de transferencia de un sistema de mayor borrosidad.

Las funciones de transferencia de modulación pueden determinarse por separado para cada uno de los factores que influyen en el sistema de imagen. Como cada valor en una curva de función de transferencia de modulación (MTF) está entre 0 y 100%, el MTF del sistema puede determinarse multiplicando las MTF de cada uno de los componentes. La MTF de todo sistema siempre estará por debajo de las curvas de cada componente aislado.

**Fijando nuevos parámetros de operación.** Un médico o un técnico que obtenga radiografías de un paciente ha de tener presente los anteriores conceptos para ser capaz de establecer de manera inmediata el cambio que ha de experimentar el valor del *mAs* a fijar en la consola de un equipo de rayos X para obtener una radiografía si la distancia foco-película cambia. Los conceptos anteriores han de ligarse con el hecho de que la energía emitida desde el foco emisor de radiación se extiende por la superficie delimitada por el ángulo sólido formado por dicho punto y el lugar de interacción de la radiación. Dicha superficie es, evidentemente, proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente de radiación. Como la misma cantidad de energía ha de repartirse en superficies progresivamente crecientes con la distancia, se comprenderá que es de aplicación la denominada ley de la inversa del cuadrado de la distancia, que, en términos matemáticos, se expresa:

$$D_1 / D_2 = (d_2 / d_1)^2,$$

siendo  $D_i$  los valores de dosis a las distancias  $d_i$ . Entonces, para mantener un valor de dosis necesario para obtener una imagen similar al variar la distancia, se tendrá:

$$(\text{Nueva distancia})^2 / (\text{Antigua distancia})^2 = \text{Nuevo valor de } mAs / \text{Antiguo valor de } mAs.$$

De acuerdo con lo anteriormente expresado, para mantener constante una determinada cantidad de radiación ha de mantenerse constante el producto de los valores de miliamperios y tiempo, es decir, la carga eléctrica configurada por el haz de electrones generados en el tubo de rayos X.

**Sensitometría.** Los conceptos anteriores también han de manejarse con soltura por el médico o el técnico a la hora de buscar una imagen radiográfica con mayor contraste, que permita diferenciar mejor las zonas anatómicas observadas en función de las diferencias de densidad óptica. Para ello suele usarse el concepto gradiente, que es similar al concepto gamma anterior, si bien suelen fijarse los valores 2 y 0.25 como los correspondientes a los valores indicados con los subíndices 2 y 1 anteriores.

$$\text{Gradiente medio} = (\text{Densidad } 2.0 - \text{Densidad } 0.25) / (\log X_{D_2} - \log X_{D_1})$$

Cuanto mayor sea el valor del gradiente para una determinada película o combinación película-pantalla, mayor será el contraste.

**Rejillas o parrillas.** Cuando el haz de rayos X pasa a través de un paciente, el haz es absorbido y dispersado. Mientras que el haz atenuado produce una “sombra” útil, el haz dispersado por el paciente tiende a enmascarar los efectos beneficiosos. La radiación dispersada se elimina colocando una rejilla entre la película y el paciente.

La rejilla consiste en una serie de tiras de plomo de grosor  $c$  y de altura  $h$  separadas por espaciadores de material de baja densidad de anchura  $b$ . En una rejilla típica, las tiras pueden ser de  $0.05\text{mm}$  de grosor, de altura  $2.5\text{mm}$  y separadas por espaciadores de  $0.35\text{mm}$  de ancho.

Se define la razón de rejilla como  $h/b$ .

Las rejillas pueden ser paralelas o focalizadas. Pueden ser estacionarias o en movimiento.

En una rejilla paralela el haz primario se cortará por las tiras de plomo a una distancia  $w$ , que está relacionada con la distancia foco-película,  $d$ :  $w/d = b/h$ , es decir,  $w = d/\text{razón de rejilla}$ . Usando esta sencilla ecuación, puede calcularse el ancho máximo de campo que puede radiografiarse con una determinada rejilla.

El uso de una rejilla siempre incrementa la exposición debido a que absorberá algo de la radiación primaria. Por ejemplo, al obtener una imagen de un maniquí de  $20\text{cm}$  de agua a  $100\text{ kV}$ , una rejilla 8:1 reduce el haz primario por un factor de 1.8, y el primario más el disperso por 3.7. Para obtener la misma densidad en la película con rejilla que sin ella la exposición tendrá que incrementarse por un factor de 3.7. A esto se le llama el factor de rejilla.

Como la exposición es directamente proporcional al producto  $mAs$ , cada vez que se use una rejilla se tendrá que realizar el siguiente cálculo:

- 1) Nuevo  $mAs$  con rejilla = Viejo  $mAs$  sin rejilla  $\times$  factor de rejilla
- 2)  $mAs$  con nueva rejilla = (Nuevo factor de rejilla  $\times$   $mAs$  con vieja rejilla / factor de vieja rejilla)

A fin de reducir exposiciones, las rejillas con menores razones están siendo usadas más frecuentemente.

**Digitalización.** Actualmente, el Radiodiagnóstico está siendo cada vez más el reino de las imágenes digitales. Como es bien sabido, la palabra “digital” se refiere a “cálculo por

métodos numéricos o por unidades discretas”. Una imagen digital es una representación numérica de un objeto (que también puede ser una imagen). Consiste en una disposición bidimensional de elementos de la imagen (pixel) representando una subdivisión en las direcciones  $X$  e  $Y$  del área de la imagen.

El proceso de digitalización de una imagen siempre consta de tres pasos:

- Muestreo
- Cuantificación
- Codificación

El muestreo consiste en obtener un número finito de muestras del brillo según posiciones predefinidas en la imagen.

En el proceso de cuantificación y codificación, se convierte una variable continua en una discreta, de forma que toma valores en un conjunto finito de números según una función de asignación. Las reglas de cuantificación definen los niveles de transición entre intervalos. El número de intervalos está directamente relacionado con el método que se utilice para la codificación binaria de los niveles de brillo. Si se dispone de  $n$  bits para la codificación del brillo tendremos  $2^n$  niveles distintos para cuantificar la señal, o sea, el brillo.

La resolución del brillo es la capacidad para distinguir entre dos niveles de grises consecutivos. En radiografía digital se utilizan habitualmente 256 niveles de grises, o sea, para cada pixel se necesitan 8 bits (1 byte) para codificar el brillo. El proceso de cuantificación/codificación influye en el contraste.

Así, por ejemplo, si decimos que una imagen se ha digitalizado con una rejilla cuadrada de  $4 \times 4$  elementos ( $2^m$ ,  $m=2$ ) y se ha cuantificado con un código Gray de (3,3) (que define el número de niveles de grises), estamos indicando que:

- a) Estamos manejando una escala de grises de  $2^3 = 8$  niveles (siendo el nivel 0 para el blanco y 7 para el negro)
- b) Cada nivel de brillo se puede codificar mediante  $N = 3$  bits.

En general, si suponemos que el número de pixels es  $2^m$ , y que el código Gray es de  $(n,n)$ , el número de bits necesarios para almacenar cada imagen viene dado por  $2^{(2m+n)}$ .

Una vez las imágenes en forma digital se aplica normalmente una transformada lineal o logarítmica que comprime el rango de la imagen, haciéndola más adecuada para su proyección en una pantalla de un monitor.

**Procesado de imágenes.** El procesado digital de imágenes consiste en la utilización de algoritmos para la modificación de los valores de los pixeles de una imagen digital. Se persigue con ello: a) mejorar la imagen desde el punto de vista subjetivo, o b) interpretar automáticamente las imágenes con un ordenador. El procesamiento puede ser una operación puntual, local o global.

Entre las técnicas más comunes en el procesado digital de imágenes que se utilizan en la práctica médica tenemos:

1) *Modificación de contraste.* Es el nivel más básico del procesamiento de imágenes. El contraste de una imagen puede apreciarse en un histograma en que se representen los niveles de gris frente a su frecuencia de aparición. La expansión del histograma puede realizarse de forma

lineal o no lineal. Entre las funciones no lineales se encuentran la exponencial y la ecualización de histograma.

Si se denomina  $I(x,y)$  el valor digital en la localización  $(x,y)$ , la modificación de contraste puede representarse por  $I_{out}(x,y) = c I_{in}(x,y) + d$ .

2) *Operaciones aritméticas y geométricas.* Las operaciones aritméticas con imágenes se utilizan con mucha frecuencia. En Radiología es particularmente frecuente la sustracción de imágenes, sobre todo en angiografía, empleando imágenes obtenidas antes y después de la inyección de contraste intravascular, de forma que se visualizan los vasos sanguíneos sin la superposición de estructuras óseas. La forma más simple de angiografía digital de sustracción consiste en sustraer la imagen previa a la llegada de contraste a la imagen correspondiente al pico máximo de contraste. Para ello se restan a la segunda imagen, pixel a pixel, los datos correspondientes a la imagen antes del contraste (máscara):

$$I_{out}(x,y) = I_1(x,y) - I_2(x,y) + c,$$

siendo  $I_1$  e  $I_2$  las imágenes amplificadas logarítmicamente obtenidas antes y después de la inyección de contraste, y  $c$  un valor que permite que tanto valores positivos como negativos se presenten siempre como enteros positivos.

La amplificación logarítmica antes de la sustracción permite linealizar las señales de atenuación debidas al contraste.

3) *Promedio temporal.* El promedio de una secuencia de imágenes implica la suma de imágenes pixel a pixel. Mediante esta operación, el nivel de ruido en la imagen obtenida se reduce en un factor igual a la raíz cuadrada de  $N$  ( $N$  imágenes sumadas en cada posición).

4) *Filtrado espacial.* En esta operación se utilizan los valores de varios píxeles de la imagen de entrada para determinar un único valor de pixel en la imagen de salida. La función lineal usada más habitualmente es la convolución o combinación lineal de los niveles de gris de varios píxeles. La operación de convolución consiste en una serie de multiplicaciones punto a punto y sumas de los productos para derivar una imagen a partir de una imagen de entrada.

La transformada de Fourier convierte una distribución en el dominio espacial en una descripción equivalente en el dominio de frecuencias. Es frecuente realizar este tipo de transformación por las ventajas que significa trabajar con funciones en el dominio de frecuencias. La transformada de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de Fourier de las dos funciones.

5) *Wavelets.* Se están utilizando estas transformadas en el ámbito de las imágenes médicas. Sus aplicaciones pueden ser muy diversas, incluyendo el realce del contraste, la detección de microcalcificaciones en mamografías, la compresión de imágenes para su transmisión eficaz en redes, etc.

Se trata de funciones matemáticas “con forma de onda” que permiten la descomposición de una imagen en distintas aproximaciones con diferente escala o resolución. Así son capaces de descomponer una imagen en componentes de diferente frecuencia, estudiando cada componente con una resolución adaptada a su escala. En cada resolución puede aplicarse una técnica de procesamiento de imagen diferente, adaptándola a la resolución. Por último, las imágenes procesadas de distinta escala pueden reconstruir de nuevo la imagen médica buscada,

empleando la transformada “wavelet” inversa. De este modo se pueden aplicar con facilidad diferentes algoritmos adaptados al tamaño de los objetos que se encuentran en la imagen.

**Mamografía digital.** Es un método efectivo para la detección y diagnóstico de cáncer de mama. Las diferencias entre los coeficientes de atenuación del tejido mamario fibroglandular, de la grasa y del carcinoma mamario son muy pequeñas, por lo que es difícil llegar a un diagnóstico acertado de tumores rodeados de tejido fibroglandular. El contraste del objeto disminuye rápidamente con el incremento de la energía, por lo que se usan rayos X de muy baja energía (26 a 30 keV).

Las propiedades del contraste se describen mediante la pendiente o gradiente de la curva característica. Debido a la forma típica, el rango de exposiciones para los que el gradiente de la proyección es significativo, o sea, la latitud de la imagen, está limitada a un factor de, aproximadamente, 25. Como el rango de exposiciones transmitidas puede ser de 100 a 1, la pérdida de información puede ser particularmente importante para pacientes con mamas que contengan gran proporción de tejido fibroglandular.

La mamografía digital da lugar a una imagen “muestreada”. El muestreo se hace tanto en el dominio espacial como en el de intensidades. La intensidad de la imagen se digitaliza en términos de un número finito de niveles de señal que abarcan desde 0 a  $2^n - 1$ , siendo  $n$  el número de bits usados para digitalizar las variaciones de la señal detectada. En mamografía digital el número de bits está entre 12 y 16, lo que da lugar a un número comprendido entre 4096 y 64000 valores de intensidad. La calidad de la imagen digital depende críticamente de estos intervalos de muestreo.

Actualmente, los detectores usados en mamografía digital tienen una resolución espacial inferior a la clásica de película pantalla. En efecto, se necesitaría para ello unos  $70 \times 10^6$  pixels. Sin embargo, con menos pixels el sistema digital permite percibir mejor estructuras de moderado y de bajo contraste.

Hoy ya existe respuesta técnica para la resolución espacial realmente necesaria en mamografía digital. Con los actuales monitores ya se alcanza una adecuada resolución espacial y se consigue, mediante el sistema digital, el empleo de sistemas de archivo de imágenes y comunicaciones (PACS).

### **5. Protección Radiológica: Consideraciones matemáticas. Cálculo de blindajes.**

Toda ella descansa en el denominado Sistema de Limitación de Dosis o Sistema de Protección Radiológica, que establece que todo uso de la radiación sobre personas debe hacerse de forma que se cumplan premisas tales como Justificación y Optimización.

En el caso de que la radiación pudiera afectar a personal trabajador profesionalmente expuesto o al público en general ha de cumplirse, además, el principio de no superación de unos valores límite de dosis individuales.

Tanto el principio de Justificación como el de Optimización alcanzan su exacta formulación cuando se expresan en el lenguaje matemático que resulta de la aplicación de un análisis costes-beneficios al uso de la radiación sobre los humanos. Aunque este análisis es frecuente en las ciencias económicas, parece a primera vista extraño que sea la verdadera base sobre la que se apoya el actual reconocimiento de la pertinencia del uso de las radiaciones en la práctica médica.

Hagamos unos comentarios sobre ambos principios.

*Justificación.* En el análisis costo-beneficios, los beneficios a tener en cuenta han de comprender todos los beneficios recibidos por la sociedad, tanto si son cuantificables como si no. Asimismo, se considera que los costes comprenden la suma total de todos los aspectos negativos de una operación expresados en costes monetarios y todos los daños para la salud del hombre o daños al medio ambiente.

La justificación exige que el beneficio neto que se obtiene a partir de la fórmula que se indica a continuación, sea positivo:

$$B = V - (P + X + Y),$$

siendo  $B$  el beneficio neto,  $V$  el beneficio bruto o valor de la práctica con radiaciones,  $P$  el costo base de producción o coste de introducción de la práctica,  $X$  el costo de un nivel determinado de protección e  $Y$  el costo del detrimento ligado a esa operación como consecuencia de la exposición que, como todo costo, podrá expresarse por el producto de valor de la unidad de esa magnitud de costo multiplicado por el valor absoluto de dicha magnitud.

La unidad de costo del detrimento suele expresarse como  $\alpha_j$  (valoración de la unidad persona-Sievert para justificación).

En general, la justificación suele determinarse examinando la diferencia entre una nueva práctica ( $n$ ) y una condición de referencia ( $r$ ) en forma de la ecuación:

$$(B_n - B_r) = (V_n - V_r) - (P_n - P_r) - (X_n - X_r) - \alpha_j (Y_n - Y_r)$$

En la mayoría de los casos los valores de  $\Delta V$ ,  $\Delta P$  y  $\alpha_j$  son, precisamente, los parámetros definidos con menor precisión. Esto tiene como consecuencia que las decisiones tales como la justificación de una práctica no pueden ser más precisas que los parámetros de los que depende.

Sin embargo, es posible usar la ecuación de justificación para realizar un análisis de condiciones límite para evaluar estos parámetros. Muchas situaciones ocasionan grandes variaciones en estas condiciones, lo cual hace obvia la elección, o bien el análisis ayuda a identificar los parámetros críticos. El análisis de límites tiene lugar cuando  $\Delta B = 0$ , lo que ocasiona que:

$$(\Delta V - \Delta P) = \Delta X + \alpha_j \Delta Y$$

En el límite, la justificación puede usarse para investigar los posibles rangos de valores de  $\alpha$ , lo cual puede ser apropiado en aquellos casos en que no se conocida la propia  $\alpha$ . En esta situación, se considera la siguiente ecuación en el límite para los rangos variables de incertidumbre de los parámetros:

$$((\Delta V - \Delta P) - \Delta X) / \Delta Y = \alpha_j$$

La justificación necesita asignar un valor monetario para  $\alpha$  como unidad de dosis colectiva. Se han publicado los valores usados en distintos países. Está claro que  $\alpha$  puede tener distintos valores como resultado de diversos factores. Esto es particularmente evidente cuando se considera la modificación de exposición debida a fuentes de radiación natural.

Uno de los factores clave en el uso correcto de la radiación es el factor detrimento. El detrimento en un grupo de población irradiada se define como la esperanza matemática del daño que la radiación puede ocasionar, teniendo en cuenta no sólo las probabilidades de cada tipo de efecto dañino, sino también la gravedad de los efectos. Así, si  $p_i$  es el riesgo de experimentar el

efecto  $i$ , cuya gravedad se mide con un factor  $g_i$ , entonces el detrimento  $Y$  para un grupo de  $N$  personas es  $Y_i = N \sum p_i g_i$ .

*Optimización.* Es un elemento esencial de la radioprotección aplicada. Para la optimización, el análisis costo-beneficios es diferencial y corresponde a un análisis costo-eficacia. Para aplicarla ha de tenerse en cuenta que la función beneficio depende de la variable dosis colectiva,  $S$ , resultante de la operación. La condición de máximo se expresa como  $dB / dS = 0$ , es decir:

$$(dV/dS) - ((dP/dS) + (dX/dS) + (dY/dS)) = 0.$$

Como se puede considerar que tanto  $V$  como  $P$  son independientes de  $S$  para una práctica radiológica dada, la condición de optimización queda reducida a:

$$(dX/dS) = - (dY/dS).$$

Es conveniente señalar que ya se ha indicado que el detrimento da lugar a un término económico cuando se multiplica su valor por el de la unidad de dosis efectiva colectiva (persona-Sievert). En rigor, por tanto, y desde el punto de vista del costo del detrimento, el mismo puede calcularse multiplicando el costo monetario asignado a la unidad de dosis efectiva colectiva por la cuantía del compromiso de dosis efectiva colectiva asociado con el nivel de protección considerado:  $Y = \alpha S$ . Pues bien, el compromiso de dosis efectiva colectiva debido a un suceso determinado, decisión o práctica, se define como la integral extendida a un intervalo de tiempo entre 0 e infinito de la dosis efectiva colectiva debida a ese evento, decisión o práctica.

A su vez, la dosis efectiva colectiva en una población se define por la expresión

$$S = N(E) dE,$$

siendo  $N(E)$  el espectro de la población en relación con la dosis efectiva y  $N(E) dE$  el número de individuos que reciben una dosis efectiva en el rango  $E$  a  $E + dE$ . Por consiguiente, la dosis efectiva colectiva es el producto ponderado de la dosis efectiva y el número de individuos en la población expuesta.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, se concluye que  $(dX / dS)_{S_0} = -\alpha$ , siendo  $S_0$  el valor correspondiente a un parámetro que da protección óptima y un costo de protección determinado.

Estos aspectos matemáticos no tienen una utilización inmediata cuando se están usando radiaciones ionizantes. ¡No es comprensible solicitar a un facultativo médico que haga un análisis costo-beneficios cada vez que vaya a prescribir una exploración radiológica! Sin embargo, los especialistas en Protección Radiológica están obligados a conocerlos para poder convencer al personal médico y sanitario de la necesidad de la observación de los principios de Protección Radiológica, ya que, en caso contrario, el recurso sería la pura imposición. Además, ante una situación como la presente en que se han promulgado recientemente unos cambios en los límites de dosis tanto del personal expuesto como del público en general, la necesidad de conocer las bases matemáticas que subyacen en las premisas del sistema de Protección Radiológica se convierte en algo esencial.

**Cálculo de blindajes.** El uso de radiaciones ionizantes en la práctica médica está determinado por el cumplimiento del sistema de limitación de dosis que, después de las premisas de justificación y optimización de cualquier uso de radiación que se haga, establece la obligatoriedad, para todo centro sanitario en el que se use radiación, de poner en marcha medidas que eviten que, en condiciones normales de trabajo, se superen los límites de dosis establecidos para el personal trabajador profesionalmente expuesto a radiaciones.

Entre esas medidas se encuentra la colocación de blindajes o barreras de material interpuestas entre el haz de radiación y el trabajador, a fin de que que atenúen la intensidad de la radiación que alcance al trabajador de forma que no ocasionen la superación de aquellos valores límite, en condiciones normales de actividad laboral. Estas medidas de protección también tienen que ser capaces de evitar que el público en general que visite un centro hospitalario supere los límites de dosis establecidos para ellos por la legislación vigente ( $1mSv/año$ ). Conseguir estos dos objetivos es un imperativo legal que habitualmente pasa desapercibido tanto para el personal sanitario no expuesto profesionalmente a radiaciones como al público en general y que, sin embargo, requiere un cuidadoso análisis que implica el uso de capacidades matemáticas evidentes, como puede comprobarse con la presentación siguiente.

En condiciones de buena geometría (haz de radiación monoenergético, estrecho y bien colimado), la atenuación de un haz de radiación gamma viene dada por  $I = I_0 e^{-\mu x}$ , siendo  $I$  la intensidad de la radiación después de atravesar un espesor  $x$  de material,  $I_0$  el valor de la intensidad de la radiación incidente en el material y  $\mu$  el denominado coeficiente de atenuación lineal de la radiación, que es un valor numérico (con dimensiones de inversa de longitud) que depende tanto del tipo de material interpuesto en el camino del haz de radiación como de las características de la radiación.

Un valor de grosor de material muy usado es el de capa hemirreductora, es decir, aquel grosor de material que reduce la intensidad de la radiación incidente a la mitad. Es evidente que

$$CHR = 0.693 / \mu$$

Análogamente se define el concepto de capa décimo-reductora, CDR, la cual es

$$CDR = \ln 10 / \mu$$

**Blindaje para rayos X.** El blindaje estructural contra rayos X se diseña para proteger frente a los rayos X útiles, la radiación de fuga y la radiación dispersa. Siempre se diseña para proteger a la gente en un área ocupada que está fuera del área o dependencia en que se usa el equipo emisor de radiación. Los requisitos para una instalación dada están determinados por:

- 1) El kilovoltaje máximo al que pueda operar el tubo de rayos X.
- 2) El miliamperaje máximo de la corriente del haz.
- 3) La carga de trabajo ( $W$ ), que es una medida de uso que se da a la máquina de rayos X. Es frecuente expresar la carga de trabajo en unidades de miliamperios-minuto por semana.
- 4) El factor de uso de una dirección,  $U$ , que es la fracción de la carga de trabajo durante la que el haz útil de radiación tiene la dirección que se esté considerando.
- 5) El factor de ocupación de un área tras el blindaje,  $T$ , que es el factor por el que se debe multiplicar la carga de trabajo para corregir la misma teniendo en cuenta el grado o tipo de ocupación del área en cuestión.

**Cálculo de blindajes para equipos de megavoltaje.** Con objeto de reducir la tasa de dosis a niveles que no ocasionen la superación de los límites de dosis establecidos para el personal que usa estos equipos, es usualmente necesario colocar barreras de plomo, de hormigón o de otros materiales entre las personas y las fuentes de radiación.

Analicemos, como ejemplo de una posible configuración de un acelerador lineal de electrones de uso médico, el grosor de paredes necesario para conseguir los niveles de protección requeridos. Se necesitará para ello conocer la producción de la máquina, el tipo de radiación emitido, la distancia desde la fuente hasta el punto a proteger, el tiempo que el haz de radiación apunta en esa dirección y las características de las personas a proteger.

Los tipos de radiación a considerar son:

- Radiación primaria
- Radiación de fuga
- Radiación dispersa

Para diseñar las barreras hay que disponer de los siguientes datos:

- 1) Carga de trabajo: Aunque un acelerador puede proporcionar tasas de dosis de hasta  $5\text{Gy}/\text{min}$  a  $1\text{m}$ , el tiempo necesario para la colocación de los pacientes hace que el número máximo de personas tratadas sea de unas 30 en sesiones de 7 horas de trabajo. Como la dosis media por pacientes es de unos  $2.5\text{Gy}$ , la carga de trabajo a  $1\text{m}$  es:

$$W = (2.5 \text{ Gy}/\text{pac}) \times (30 \text{ pac}/\text{día}) \times (5 \text{ días}/\text{semana}) \times (50 \text{ semanas}/\text{año})$$

- 2) Ley de la inversa del cuadrado de la distancia.
- 3) Factor de uso.
- 4) Factor de ocupación.

En los estudios de protección radiológica conviene especificar la barrera en términos de número de capas decimorreductoras.

**Dosis a pacientes en Radiodiagnóstico.** El incremento progresivo en la utilización de los rayos X en Medicina significa que sean responsables de cerca del 15% de la dosis total que recibe de promedio una persona en un país de desarrollo sanitario similar al nuestro. En otras palabras, el Radiodiagnóstico es la principal causa de irradiación debida a agentes no naturales a que está expuesta la especie humana. Por ello y a fin de evitar tanto como sea posible los efectos perjudiciales de la radiación, se ha desarrollado una normativa aplicable a todo uso de radiación que esencialmente trata de conseguir que las dosis de radiación recibidas sean tan bajas como sea razonablemente posible. Es imperativo, pues, medir las dosis de radiación que se imparten en los centros sanitarios a los pacientes con objeto de determinar si exceden unos valores medios de referencia que se han establecido para exploraciones simples o bien si exceden los valores de referencia de cada centro para las exploraciones complejas.

El asunto es de tal importancia que se ha tratado de establecer un modelo matemático basado en el método Monte Carlo para poder conocer las dosis de radiación recibidas por los pacientes. Este modelo ha dado lugar a un programa informático que, al menos para exploraciones simples, permite fijar el valor de dosis recibida por el paciente tanto en órganos individuales como la dosis efectiva correspondiente a la globalidad del individuo. Uno de estos programas es el que se denomina *Effdose*, el cual es utilizado habitualmente por personal

técnico y por personal Especialista en Radiofísica Hospitalaria que, obviamente, han de estar familiarizados con los fundamentos matemáticos que han permitido su construcción.

**6. A modo de conclusión**

Este recorrido, casi de puntillas, por el uso médico de las radiaciones ionizantes ha permitido observar que todo el personal implicado en su utilización: médicos especialistas, radiofísicos hospitalarios, técnicos, etc. están haciendo uso, en uno u otro grado, durante todos los momentos de su actividad profesional, de conceptos, lenguaje y herramientas matemáticas. Parodiando a Platón puede afirmarse: “Nadie puede entrar en el ámbito del uso médico de la radiación si no sabe matemáticas”. Sin dicho conocimiento los perjuicios para la salud de las personas pueden ser tremendos, habida cuenta del carácter lesivo de las radiaciones ionizantes.

**En Internet**

<http://webpages.ull.es/users/jjgranad/welcome.html>

*Laboratorio de Física Médica y Radiactividad Ambiental*  
Universidad de La Laguna