SOBRE GEOMETRÍA Y FÍSICA

Domingo Chinea (Universidad de La Laguna)

La geometría como una disciplina organizada fue fundada alrededor de los años 600 a. C., en la Grecia Clásica. En general, los griegos orientaron las matemáticas para deducir cuestiones y problemas sobre la naturaleza, y por ello se fundamentaron en la propia naturaleza. Durante el periodo comprendido entre los años 600 y 300 a. C., los filósofos griegos dieron a las matemáticas en general el rango de ciencia, construyeron la estructura de la geometría euclídea, basada en la abstracción y la demostración deductiva, y la aplicaron a la comprensión y entendimiento de nuestro universo.

La evolución de la geometría a través de los tiempos ha sido lenta, quizás debido a que la geometría de Euclides fue obtenida a partir de unos postulados que a priori eran ciertos sin discusión alguna y que reflejaban la propia geometría de nuestro espacio, y por ello durante muchos siglos esta geometría ha dominado los estudios matemáticos.

Suele decirse que la Física utiliza a las matemáticas en general como lenguaje, aunque en realidad existe una más profunda relación entre ambas ciencias. La Física tiene por objeto el conocimiento y comprensión de las leyes que rigen la naturaleza y sus fenómenos. La geometría y la física crecieron observando la naturaleza, la primera prestando más atención a la "forma" de los objetos que nos rodean y la segunda a su "movimiento". Ahora, como todo movimiento supone una trayectoria (una curva en lenguaje geométrico), ambas han seguido vidas paralelas, y los grandes cambios en la historia de la geometría y de la física casi siempre aparecen conectados, con grandes influencias recíprocas.

En lo que sigue, trataremos de describir, a grandes rasgos, tres de las etapas que más han influido en el desarrollo armónico de la geometría y la física. La primera se refiere a sus orígenes, que podíamos fijar en la grecia antigua, con la geometría de Euclides y la física de Pitágoras, Aristóteles y Arquímedes. La segunda, la gran revolución a partir del renacimiento con la física de Galileo y la mecánica de Newton desde el punto de vista físico y la geometría de Descarte y Fermat. Finalmente la tercera etapa, en la cual profundizaremos un poco más, se refiere a la que surge tras la aparición de dos trabajos cruciales en geometría, el primero de K. F. Gauss (1777-1855) titulado *"Disquisiciones generales circa superficies curvas"* (en 1827), considerado como la obra maestra de la geometría diferencial clásica de superficies, y el segundo la memoria que G. B. Riemann (1826-1866) presentó en 1854 para obtener el título de "Privatdozent", la cual tituló *"Sobre las hipótesis que sirven de fundamentos a la geometría"*. Con esta nueva visión de la geometría se posibilito que a principios del siglo XX se iniciara una de las revoluciones más espectacular que ha tenido la física a través de su historia. Por supuesto nos referimos la aparición de la física relativista, promovida por el que es considerado como el mayor genio del siglo XX: Albert Einstein (1879-1955).

1 Un poco de historia

1.1 Origen de la Geometría y la Física

Puede decirse que la matemática, como disciplina organizada, comenzó a existir en la Grecia Clásica, más o menos en la época entre los años 600 al 300 a. C.. No obstante, en las civilizaciones babilónica y egipcia, a partir del año 3.000 a.C., empieza a aparecer algunos rudimentos primarios de la matemática. La principal fuente de información sobre la matemática babilónica la constituyen los textos grabados en tablillas de arcillas. Algunas datan del año 2.000 a.C., aunque la mayoría corresponden al período del 600 a.C. al 300 d.C.. Estas tablillas nos suministran información sobre el sistema numérico, las operaciones aritméticas, y ciertos problemas algebraicos y geométricos.

Aunque el papel de la geometría babilónica fue insignificante, surgieron problemas sobre divisiones de campos o sobre tamaños de ladrillos necesarios para la construcción. De hecho, la geometría babilónica se reducía a una colección de reglas para el cálculo de áreas de figuras planas sencillas, y de los volúmenes de cuerpos sólidos sencillos, generalmente ligados a problemas prácticos, como la construcción de canales, presas y otros proyectos de riegos, así como para la construcción de graneros, edificios, y cálculos de áreas de terrenos. Aunque, la mayoría de las veces los problemas eran marcadamente aritméticos o algebraicos.

Los egipcios no establecían separación entre aritmética y geometría, y al igual que los babilonios, consideraban la geometría como una herramienta práctica. Los documentos matemáticos aparecen en forma de papiros, los más antiguos datan del año 1700 a.C., aunque las matemáticas que aquí aparecen posiblemente la conocían los egipcios desde el año 3.500 a.C.

Según Herodoto, historiador griego, siglo V a. C., la geometría tuvo su origen debido a las crecidas anuales del Nilo, que obligaba a trazar constantemente las lindes de los terrenos cultivados por los agricultores. Aunque, sin esa misma necesidad, la geometría de los babilonios era parecida. Los templos y las pirámides fueron otra aplicación de la geometría egipcia. De hecho, según Aristóteles, 384-322 a.C., la geometría se originó por la existencia de una clase sacerdotal ociosa. A los geómetras en esta época se les denominaban *"agrimensores"* o *"tensadores de cuerda"*, y se dedicaban tanto a realizar los planos de los templos para el culto religioso como para reconstruir las lindes de los terrenos.

Como señalamos, fueron los filósofos griegos clásicos quienes, durante el periodo comprendido entre los años 600 y 300 a.C., dieron a las matemáticas en general el rango de ciencia, construyendo la estructura de la geometría euclídea.

Las contribuciones más importante de este periodo clásico son los *Elementos* de Euclides (325-265 a. C.) y las *Secciones Cónicas* de Apolonio de Perga (262-190 a.C.). Los Elementos de Euclides constituyeron la base de todos los estudios matemáticos durante siglos, y el tratado sobre las Cónicas de Apolonio contiene resultados no superados hasta el siglo XVII.

Los griegos orientaron las matemáticas para deducir verdades sobre la naturaleza, y por ello se fundamentaban sobre verdades. Así, existían algunas verdades aparentemente evidentes, entre ellas: dos puntos determinan una recta, una recta se extiende indefinidamente, todos los ángulos rectos son iguales, cosas iguales añadidas a cosas iguales producen cosas iguales, figuras que pueden hacerse coincidir son congruentes, el todo es mayor que la parte... Estas "verdades" o axiomas las recoge Euclides como postulados y nociones comunes, y son la base para demostrar los demás enunciados matemáticos con la ayuda de la lógica y del razonamiento. Los postulados son propios del campo científico considerado, y los axiomas son comunes para todas las ciencias.

Los Elementos se componen de trece libros con un total de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y 465 proposiciones.

Recordamos a continuación los Postulados y las Nociones Comunes:

POSTULADOS:

1.- Postúlese el trazar un línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.

2.- Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.

3.- Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.

4.- Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.

5.- Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace que los ángulos internos del mismo lado sean menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

NOCIONES COMUNES:

1.- Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.

2.- Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son también iguales.

3.- Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

4.- Y las cosas que pueden superponerse entre sí son iguales entre sí.

5.- Y el todo es mayor que la parte.

Partiendo de estos axiomas, Euclides dedujo en sus Elementos las 465 proposiciones, sobre temas relativos a geometría plana, teoría generalizada de la proporción, teoría aritmética, geometría del espacio, y la inconmensurabilidad y los segmentos irracionales. En otras obras de él y en las de sus sucesores (Arquímedes, Apolonio,...) se dedujeron muchos más resultados.

El segundo trabajo cumbre en la geometría clásica es el de Apolonio sobre las secciones cónicas. Este tratado está formado por 8 libros y 487 proposiciones. Apolonio observó que los tres tipos de cónicas (elipse, parábola e hipérbola) podían obtenerse como secciones de un mismo cono recto sin más que cambiar la posición del plano que nos da la sección. Desde un interés puramente geométrico, las secciones cónicas han evolucionado a lo largo de la historia hasta su utilidad en diferentes contextos. Su importancia se consagra a partir del siglo XVII, con la demostración de Galileo de que la trayectoria de un proyectil es una parábola y con la descripción del movimiento planetario de Kepler y Newton, en donde se concluía que las órbitas de los planetas eran elípticas.

Es de observar que los geómetras griegos clasificaban las curvas en tres categorías:

- Lugares planos: Las líneas rectas y las circunferencias.

- Lugares sólidos: Las secciones cónicas.

- Lugares lineales: Las restantes curvas.

De hecho en grecia clásica ya se conocían algunas curvas, como la cuadratriz de Hipias (siglo V a.C.) y Dinostrato (siglo IV a.C.), la concoide de Nicomedes (entre el siglo II y I a.C.), la cisoide de Diocles (siglo II a.C.), la espiral de Arquímedes (siglo III a.C.), destinadas a resolver problemas, y en particular los tres clásico de la antigüedad: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Las culturas babilónica y egipcia contribuyeron en gran medida al desarrollo de la matemática y la astronomía. Sin embargo, fueron completamente estériles respecto al desarrollo de la física.

De hecho, fue en la grecia clásica donde se origina los primeros estudios en física.

La explicación posible de esta deficiencia de Babilonia y Egipto en comparación con Grecia, se atribuía a que los dioses antiguos de Babilonia y Egipto vivían arriba, entre las estrellas, mientras que los dioses de lo griegos vivían en la cima del monte Olimpo, y por tanto estaban más cerca de los problemas de la vida cotidiana.

Según la leyenda, el término magnetismo proviene de un pastor griego $M\alpha\gamma\nu\eta\sigma$ que quedó sorprendido al observar que el regatón de hierro de su bastón era atraído por una piedra (mineral de hierro magnético) que había en el borde del camino. Análogamente el término electricidad proviene de la palabra griega $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho o\nu$ (ámbar), a causa de que otro pastor helénico, al tratar de pulir un trozo de ámbar frotándolo sobre la lana de una de sus ovejas, observó que poseía la misteriosa propiedad de atraer pequeños trozos de madera.

Aunque difícilmente podamos documentar estos legendarios descubrimientos, si podemos afirmar que la primera formulación matemática de una ley física se debe a Pitágoras (569-475 a.C.), filósofo griego que vivió a mediados del siglo VI a.C. Pitágoras investigó la relación entre las longitudes de las cuerdas en los instrumentos musicales que producen combinaciones armónicas de sonidos. Para ello, empleó el denominado *"monocordio"* un instrumento en forma de caja con una única cuerda.

En la terminología actual, Pitágoras probó que la frecuencia, es decir el número de vibraciones por segundo de una cuerda sujeta a una tensión dada, es inversamente proporcional a su longitud. Pitágoras intentó dar un paso más al sugerir que el movimiento de los planetas debe "ser armonioso", sus distancias de la tierra deben de estar en las misma relaciones de la longitud de las cuerdas (bajo la misma tensión) que producen las siete notas fundamentales de la lira, el instrumento musical nacional de los griegos.

Aristóteles (384-322 a.C.) fue uno de los gigantes de la grecia clásica. Es considerado, junto a Platón y Sócrates, como uno de los pensadores más destacados de la antigua filosofía griega.

Su filosofía sobre la naturaleza y los fenómenos físicos tenía la deficiencia de que su gran inteligencia no estaba bien orientada matemáticamente, al igual que muchos otros antiguos filósofos griegos. De hecho sus ideas respecto al movimiento de los objetos terrestres y los cuerpos celestes, quizás hicieron más daño que beneficio al progreso de la ciencia. Su filosofía se basaba en la idea de que había dos clases de movimientos: rectilíneos, cuyo modelo es el peso que cae o el fuego que asciende, y circulares, como el movimiento de los astros. Para Aristóteles el movimiento circular era el único que era "simple y completo", y lo consideraba también perfecto y eterno. Para él los astros seguían trayectorias circulares, pues no había ninguna razón para que el espacio no fuera homogéneo y por tanto que las trayectorias cambiaran de forma con el tiempo. Aristóteles creía que la tierra era estacionaria y que el sol la luna, los planetas y las estrellas se movían en órbitas circulares alrededor de ella.

Otro gran griego de la antigüedad, que vivió un siglo después de la época de Aristóteles fue Arquímedes (287-212 a.C.). Este pronto se interesó por las matemáticas, en las que adquirió una gran destreza. De hecho tuvo grandes contribuciones en geometría. Es considerado, por muchos, el mayor matemático y físico de la antigüedad.

Las aportaciones más importantes de Arquímedes a la Física se centran en la mecánica de sólidos, principalmente en Estática, y en la Hidrostática.

En su obra *"Sobre el equilibrio de las superficies"* desarrolló las leyes de la palanca y discutió el problema de encontrar el centro de gravedad de cualquier cuerpo dado.

El estilo de Arquímedes es muy semejante al de Euclides. Durante su época, las matemática griega estaba casi limitada a la geometría.

Como en los "Elementos" de Euclides, Arquímedes formuló sus leyes sobre el equilibrio comenzando primero enunciando unos postulados y derivando a continuación las proposiciones. El primer volumen de su obra comienza con siete postulados, los cuales reproducimos:

1.- Pesos iguales a igual distancia están en equilibrio y pesos iguales a distancia desiguales no están en equilibrio sino que se inclinan hacia el peso que está a mayor distancia.

2.- Si estando los pesos a cierta distancia y en equilibrio, se añade algo a uno de ellos, no hay equilibrio, sino que se inclinan hacia aquel al cual se ha añadido algo.

3.- Análogamente, si se quita algo a uno de los pesos, no están en equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso del que no se ha quitado nada.

4.- Si figuras planas iguales y similares coinciden cuando se superponen una a otra, sus centros de gravedad también coinciden.

5.- Si las figuras son desiguales pero similares, sus centros de gravedad estarán situados similarmente. Entiendo por puntos situados similarmente en relación con figuras similares, puntos tales que si se trazan líneas a su través a los ángulos iguales, resultan ángulos iguales con los correspondientes.

6.- Si dos pesos a cierta distancia están en equilibrio, otros dos pesos iguales a ellos estarán también en equilibrio a las mismas distancias.

7.- En una figura cuyo perímetro es cóncavo en la misma dirección, el centro de gravedad debe estar dentro de la figura.

A estos postulados siguen 15 proposiciones derivadas. Entre ellas se deduce el Principio de la Palanca.

Probablemente el descubrimiento más conocido de Arquímedes es su ley sobre la pérdida que sufren los cuerpos sumergidos en un líquido.

Con la decadencia griega, el centro cultura se traslada a Alejandría, fundada en el año 332 a.C.. Quizás las mayores aportaciones a la física de la cultura alejandrina se centran en la astronomía, siendo su mejor exponente C. Ptolomeo , que vivió y trabajó durante la primera mitad del siglo II de nuestra era (85-165 d.C.). Ptolomeo profundizó en las ideas de Aristóteles sobre el Universo, y construyó un modelo cosmológico completo.

En este modelo, la tierra era el centro del universo, y estaba rodeada por ocho esferas que transportaban a la luna, el Sol, las estrellas y los cinco planetas conocidos en aquel tiempo: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Los planetas se movían en círculos más pequeños engarzados en sus respectivas esferas para que así se pudieran explicar sus relativamente complicadas trayectorias celestes. La esfera más exterior era la que transportaba a las llamadas estrella fijas. Lo que había detrás de la última esfera nunca fue descrito con claridad. Sus estudios astronómicos se recogen en su *"Almagesto"*.

Este modelo de Ptolomeo fue ampliamente adoptado, incluso por la Iglesia cristiana, pues además presentaba la gran ventaja de que fuera de la esfera de las estrellas fijas quedaba un gran espacio para el cielo y el infierno.

Como en el caso de las matemáticas, y de la ciencia en general, al extinguirse la cultura griega quedó detenida el desarrollo de la de la geometría y de la física. Los romanos, aunque estimulaban el saber, se interesaron primordiamente por las aplicaciones prácticas y durante su imperio se descuidó mucho el pensamiento abstracto y filosófico, pilares de la ciencia de aquella época. Incluso después de la caída del imperio romano la situación empeoró, ya que los estados feudales que se formaron en sus ruinas no representaba el marco adecuado para ningún género de desarrollo científico.

Afortunadamente la ciencia griega encontró refugio en la cultura árabe, floreciente a partir del siglo VII, época de su extensión por el sur del mediterráneo y España. Los árabes tradujeron los manuscritos griegos, y realizaron progresos en matemáticas, aunque no parece que realizaran mucho en el campo de la física.

Uno de los factores determinante en la difusión del conocimiento fue la invención de la imprenta, a mediados del siglo XV.

1.2 EL Renacimiento, Geometría Analítica y la Física de Galileo y Newton

Como indicamos, la evolución de la geometría a través de los tiempos ha sido lenta, debido quizás a que la geometría de Euclides fue obtenida a partir de unos postulados que a priori parecían ciertos sin discusión alguna y reflejaban la propia geometría de nuestro espacio, y por ello esta geometría continuó durante muchos siglos dominando los estudios matemáticos.

No obstante, a lo largo de la historia aparecieron otras geometrías, que nacieron de la necesidad de solucionar nuevos problemas de la vida cotidiana, o de la propia evolución de las matemáticas que invitaron a aprovechar las técnicas, los avances y desarrollos de sus diferentes ramas.

Como ejemplos, tenemos la *geometría proyectiva*, que surgió motivada por los pintores del renacimiento al tratar de resolver el problema de plasmar en un lienzo las escenas reales, y la *geometría analítica* que incorporó un tratamiento algebraico a la geometría, necesario para aplicarla a los nuevos retos científicos, los descubrimientos, y sucesos acaecidos durante los siglos XVI y XVII (la creación de la teoría heliocéntrica, la exploración geográfica que implicaba el uso de mapas, la utilización de la pólvora que dio lugar al estudio de las trayectorias de los proyectiles, el telescopio y el microscopio que motivó el estudio de las lentes, las técnicas de las guerras,...).

René Descartes(1596-1650) y P.Fermat (1601-1665) fueron los primeros en darse cuenta de esta necesidad de utilizar métodos cuantitativo en el estudio de la geometría. Ellos eran consciente de la potencia del álgebra y por ello empezaron a utilizarla para sus estudios geométricos, en particular para asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y a las superficies. Con ellos puede decirse que se iniciaba una nueva rama: la mencionada geometría analítica.

Descartes, no era realmente un matemático, puede considerarse como el primer gran filósofo moderno y su geometría fue sólo una mínima parte de toda una obra que básicamente estaba dedicada a la filosofía y a la ciencia en general. Para Descartes la geometría euclídea (de los clásicos) era abstracta en exceso y muy ligadas a las figuras, con lo que cada demostración, en la mayoría de las veces, exigía nuevos e ingeniosos argumentos. Tampoco el álgebra se escapaba de sus críticas. Para él, el álgebra estaba completamente lleno de reglas y fórmulas que en ocasiones resultaba un "arte confuso y oscuro que turbaba la mente". Por ello lo que propone Descarte es de una parte, tomar lo mejor del álgebra y aplicarlo a la geometría, y de otra traducir las operaciones algebraicas al lenguaje de la geometría, para corregir los defectos de ambas. Se dio cuenta de la gran potencia del álgebra y su superioridad sobre los métodos de los griegos para la formalización, descripción y desarrollo del pensamiento geométrico. Fruto de esta fusión, surge su *"La Gémetrie"*, único libro de matemática que escribió (de hecho "La Géometrie" es uno de los tres apéndices que aparece en su *"Discurso del método"* un clásico de la literatura y filosofía publicado en 1637).

Antes de dedicarse al estudio de lugares geométricos, P. Fermat había realizado contribuciones al algebra. Esto permitió que en su obra *"Ad locos planos et solidos isagoge"* se aplicara el álgebra al estudio de las curvas. Esta obra no fue publicada en vida del autor, y por ello favoreció la impresión de que la geometría analítica había sido introducida por R. Descartes. Sin embargo es muy posible que que Fermat descubriese su geometría analítica hacia 1629.

La idea principal de la geometría analítica, la utilización de las técnicas del álgebra y del empleo de ecuaciones para estudiar los problemas geométricos en principio no despertó gran entusiasmo y hubo de pasar cerca de cien años para su consagración. Durante el siglo XVII surgieron obras en donde se comentaban los nuevos métodos, pero es durante el siglo XVIII cuando se profundizó en el estudio en el plano y también en el espacio de la geometría desde el punto de vista analítico, quizás motivado por la exploración de problemas físicos, que llevaron a la búsqueda de un mejor conocimiento de las curvas y superficies. En este desarrollo participaron muchos matemáticos de la época, entre otros: I. Newton (1642-1727), J. Bernoulli (1667-1748), L. Euler (1707-1783), Clairaut (1713-1765), G. Monge (1746-1818). Estos matemáticos han jugado también un papel fundamental en lo que se denomina geometría diferencial.

Aunque las cónicas y algunas otras curvas planas eran conocidas desde la grecia antigua, hasta el renacimiento solo la recta y la circunferencia jugaban un papel privilegiado en la naturaleza y por tanto también en la física.

La física quedó aferrada a la recta y a la circunferencia durante muchos siglos. Hasta el siglo XVI, se pensaba que la trayectoria de proyectiles eran rectas que luego se volvían bruscamente curva, y que los planetas describían órbitas circulares.

Durante el siglo XVII, con la revolución científica , comienza a fraguarse los cimientos de la física moderna no relativista.

Dos genios universales son claves en este desarrollo: Galileo Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1643-1727).

Uno de los hechos más importante que propicio tal revolución fue la teoría heliocéntrica.

Nicolás Copérnico (1473-1543) en su obra "De Revolutionibus Orbitum Coelestium", aparecida en el mismo año de su muerte, estableció un nuevo sistema del mundo con el Sol en su centro, pero todavía con la creencia de que los planetas describían órbitas circulares. Es de observar que para evitar su prohibición por la Iglesia, se añadió a este libro un prefacio que declaraba que todas las ideas expresadas en él eran de carácter puramente hipotético y representaban más bien un ejercicio matemático que una descripción de las cosa reales.

Pasó casi un siglo para que las ideas de Copérnico sobre el Universo fueran tomadas en serio.

El primer astrónomo que demostró la teoría heliocéntrica fue Tycho Brahe (1546-1601), quién realizó mediciones de la posición de los planetas con una precisión de un minuto de arco.

J. Kepler (1571-1630) en su *"Astronomía nova*, en 1609, expuso su famosas tres leyes sobre la trayectoria de los planetas. Como es conocido, en la primera de ellas formula que los planetas describen elipses, con el sol en uno de sus focos.

Para Galileo, las matemáticas constituían la base del conocimiento profundo de las leyes de la Naturaleza. Su física estaba basada en la experimentación y en su formalización matemática.

En 1609, con un telescopio que acababa de inventar, observando Jupiter encontró que éste estaba acompañado por varios pequeños satélites o lunas que giraban a su alrededor. Así, no todo giraba directamente alrededor de la tierra.

Galileo en su *"Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo, ptolemaico y copernicano"* 1632, apoyó la teoría copérnica sobre el movimiento de los planetas. En realidad, Él y J. Kepler fueron los primeros en apoyar públicamente esta teoría. Aunque, Kepler modificó la teoría sugiriendo que los planetas no se movían en círculos sino en elipses. El apoyo a la teoría copérnica enfrentó a Galileo con la Iglesia y le costó su famoso Proceso.

Galileo fue también el primero que estableció, en sus *"Discursos y demostraciones matemáticas acerca de dos Nuevas Ciencias"* (1638), que la trayectoria de los proyectiles de las piezas de artillería eran parábolas.

Otro importante resultado que introdujo Galileo fue el principio de inercia (La primera ley de Newton).

La explicación más coherente sobre la trayectoria de los planetas fue proporcionada por I. Newton (1643-1727), en su obra *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"* (1687), probablemente la obra más importante publicada en las ciencias físicas de todos lo tiempos. En ella, Newton no solo presentó una teoría de como se mueven los cuerpos en el espacio y en el tiempo, sino que también desarrolló las complicadas matemáticas necesarias para analizar esos movimientos.

Para realizar su obra, Newton se apoyó en los trabajos de Copérnico, Descartes, Kepler, Galileo,...

Su "Principia Mathematica" está constituida por tres libros que contienen los fundamentos de la física y la astronomía escritos en el lenguaje de la geometría pura. Se le suele comparar a Los elementos de Euclides. De hecho se nota el influjo de la geometría euclídea, con predominio de la forma sintética, aunque también aparecen algunos razonamientos analíticos.

En ella se enuncian las tres leyes del movimiento, la ley de gravitación, y aplicaciones al sistema solar.

También ,en su "Principia Mathematica" aparece indirectamente su cálculo diferencial e integral, desarrollado en su obra *Analysis per aequiationes numero terminorum infinitas.*

Evidentemente en todos estos desarrollos se necesitaba de la geometría de coordenadas, es decir la geometría analítica, que unida con procesos de paso al limite, permitió que Newton y G. W. Leibnitz (1646-1716) crearan el cálculo diferencial, con el que se formuló la famosa ley de gravitación universal que explicaba, con un solo enunciado, las tres leyes de Kepler y otros muchos fenómenos de la mecánica celeste.

1.3 Los Inicios de la Geometría Diferencial de Superficies.

Puede decirse que la geometría diferencial nace, mediante un proceso natural, sobre los cimientos de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal de I. Newton y G.W. Leibnitz. En realidad, desde la época de estos dos matemáticos se había aplicado el cálculo al estudio de curvas planas. Aunque, el primero en realizar un exhaustivo estudio sobre geometría diferencial en el espacio euclídeo fue *Karl Friedrich Gauss*, iniciando así esta nueva rama de la geometría, que actualmente se le denomina *Geometría Diferencial Clásica.*

Antes de Gauss, algunos matemáticos habían elaborado estudios sobre geometría diferencial de superficies. Recordemos los mas notables.

Uno de los pioneros en la teoría de superficies fue Leonhard Euler (1707-1783). Dotado de una gran inteligencia y una magnifica memoria tuvo grandes aportaciones en casi toda las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. Son clásicos sus trabajos sobre mecánica, álgebra, análisis matemático, teoría de los logaritmos de los números negativos e imaginarios, geometría analítica y diferencial, calculo de variaciones,....En 1748 Euler publica la más célebre de sus obras matemáticas: su *Introductio in analysis infinitorum.* Entre una gran variedad de temas tratados en esta obra se encuentra el estudio de curvas y superficies, las cuales son investigadas con la ayuda de sus ecuaciones, es decir desde el punto de vista analítico. Aunque su contribución más importante al campo de la geometría diferencial se encuentra en su obra *Investigaciones sobre la curvatura de superficies.* En esta obra, para estudiar el comportamiento de una superficie M en las proximidades de un punto P de M, Euler "corta" la superficie M por planos normales que pasan por P y estudia la curvatura de las curvas planas resultantes (secciones normales). Euler obtiene que de todas las secciones normales a M que pasan por P existe una que tiene mayor curvatura y otra que tiene la menor, y estas dos secciones se cortan en P bajo un ángulo recto. Estas curvas reciben el nombre de curvas principales, y a sus curvaturas se les denominan *curvaturas principales.* La *curvatura* de la superficie M en P es el producto de las dos curvaturas principales.

En su trabajo *Sobre sólidos cuyas superficies pueden ser desarrolladas sobre un plano* (1772), Euler introduce el concepto de superficie desarrollable, es decir, superficies que pueden ser aplicadas o extendidas sobre un plano, y prueba que una tal superficie es o un cilindro, un cono o un superficie formada por las tangentes a una curva (es de observar que estas superficies tienen curvatura nula). En este trabajo Euler introduce, por primera vez, las coordenadas de los puntos de una superficie en función de dos parámetros.

Euler también tiene estudios sobre *geodésicas*. En el plano euclídeo, las rectas, además de ser las curvas más simples, juegan un papel fundamental y son la base para todo tipo de construcciones geométricas. En una superficie arbitraria este papel privilegiado es desarrollado por las líneas geodésicas. El problema de encontrar la geodésicas de una superficie ya había sido planteado por Johann Bernoulli en 1697 y al parecer encontró la ecuación general de las geodésicas, aunque su resultado fue publicado en 1742. Antes de esto, en 1732, Euler también publicó la ecuación diferencial en su trabajo *"Sobre la curva más corta que une dos puntos arbitrarios de una superficie arbitraria"*. El estudio de las geodésicas fue abordado por Euler en diferentes trabajos. Así, en el volumen II de su *"Mechanics*, (1736), Euler probó que un masa puntual forzada a estar sobre una superficie si no está sujeta a ningún otro tipo de fuerzas debe moverse a lo largo de una geodésica. También probó que en una curva geodésica la normal a ella coincide con la normal a la superficie.

Otros matemáticos de la época de Euler también realizaron contribuciones a la geometría diferencial. Entre ellos destaca A. Clairaut (1713-1765), quién a los dieciséis años publica el trabajo *"Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura"*, una memoria sobre aspectos analíticos de las superficies y curvas espaciales. En otros trabajos trató las geodésicas sobre superficies de revolución.

Otra figura también importante en la historia de la geometría diferencial fue Gaspar Monge (1746-1818). Su introducción en el estudio de la geometría diferencial fue motivado por problemas prácticos, concretamente por el estudio de problemas de fortificación. Monge comienza sus investigaciones de geometría diferencial con un estudio en teoría de curvas en el espacio titulado *"Memoria sobre las evolutas, los radios de curvatura y los diferentes géneros de inflexión de las curvas de doble curvatura"*, (1785). Monge desempeño un papel fundamental en la creación de las Escuelas Normal y Politécnica de Francia, siendo en esta última su profesor más activo. En esta Escuela Politecnica, Monge impartió un curso sobre aplicaciones del análisis a la geometría, que esencialmente era un curso de introducción a la geometría diferencial. Como en esa época no se disponía de ningún texto, Monge escribe un libro titulado *"Hojas de análisis aplicado a la geometría"* (1795), el cual es considerado como el primer texto sobre geometría diferencial. El mencionado curso era muy difícil para los alumnos de entonces, sobre todo en lo referente al estudio diferencial de las curvas y superficies. En 1802, Monge junto con un colaborador suyo, J. P. Hachette, elaboran un estudio más general al anterior en la memoria *"Aplicación del álgebra a la geometría"*, a fin de responder a las exigencias de los programas de la Escuela Politécnica. Puede decirse que en estas dos obras se encuentra la mayor parte de la geometría analítica del espacio y de la geometría diferencial clásica que suelen incluirse en los actuales textos elementales de estas materias.

No sólo Monge es importante por su contribución a las matemáticas sino por la escuela que creó. Así, el impulso dado por Monge en la geometría del espacio fue acelerado por sus discípulos. A estos se les debe la difusión de la geometría a través de textos elementales, muchos de los cuales alcanzaron gran éxito, publicándose en numerosas ediciones. Así, entre los años 1798 y 1802 aparecieron cuatro libros sobre geometría analítica elemental debidos a S.F. Lacroix (1765-1843), J.B. Biot (1774-1862), L. Puissant (1769-1843) y F.L. Lefrancais (1769-1843), todas ellas influenciadas por las lecciones impartidas en la Escuela Politécnica.

Otro de sus discípulos, Charles Dupin (1784-1873), también contribuyó al desarrollo de la geometría diferencial básicamente en sus obras *"Desarrollos de geometría pura"* y *"Aplicaciones de geometría y mecánica" publicadas* en 1813 y 1822, respectivamente

Los impulsos definitivos para el desarrollo y consagración de la geometría diferencial fueron dados por dos grandes genios: Karl Friedrich Gauss y Georg Bernhard Riemann.

2 La Geometría Diferencial de Gauss

2.1 Contribución de Gauss al estudio de las Superficies

Karl Friedrich Gauss (1777-1855), es considerado como uno de los genios universales que más ha aportado al desarrollo de las matemáticas. Realizó trabajos de investigación en diferentes ramas de las matemáticas (teoría de números, álgebra, análisis matemático, geometría, probabilidad y estadística, teoría de errores,...) y en otros campos científicos (astronomía, física teórica, mecánica, electromagnetismo, acústica, óptica,...). Su inclinación hacia la geometría, y en particular hacia la teoría de superficie, estuvo quizás motivada por sus trabajos de geodesia y cartografía, y por su participación en la triangulación de Hannover durante los años comprendidos entre 1818 y 1832 fueron dominados por el vasto proyecto de realizar planos y mapas (trabajos topográficos) en el Reino de Hannover. Gauss fue quién dirigió la puesta inicial de esta aventura. Durante esta época había gran interés por los estudios geodésicos, así como un deseo teórico por determinar, mediante mediciones y triangulaciones, la verdadera forma de la tierra. Esta cuestión había sido ya abordada en el siglo XVIII cuando se había llegado a la aceptación universal de la teoría de Gravitación de Newton.

La cartografía era un importante tema práctico que se venía estudiando desde siglos. Por ello, la aplicación entre superficies que conservasen ciertas propiedades métricas (longitud, ángulos, áreas,...) era un problema básico y fundamental para la reproducción de partes de la superficie de la tierra en cartas geográficas planas. Sabemos que es imposible aplicar parte de una superficie de la tierra sobre el plano conservando la longitud (lo cual es una consecuencia directa del famoso Teorema Egregium de Gauss). Si queremos obtener cartas geográficas para la navegación, para la determinación de las rutas de los barcos, un concepto tan fundamental, o más, que la distancia es la dirección. Por ello, las aplicaciones que conservan los ángulos (aplicaciones conformes, que incluyen a las isometrías, que son las aplicaciones que conservan las longitudes) parecen idóneas para la reproducción de mapas. Además, Las regiones conformemente relacionadas son similares, si consideramos regiones suficientemente pequeñas. Casos especiales de aplicaciones conforme de la superficie terrestre sobre el plano son la proyección estereográfica, conocida por los griegos y la proyección de Mercator (1512-1594), la cual todavía es usada en la cartografía actual.

En 1822, Gauss obtiene un procedimiento para determinar, sobre superficies analíticas, todas las aplicaciones (locamente) conformes, en su memoria *"Solución general al problema de aplicar regiones de forma que cualquier porción pequeña y su imagen sean similares"*, y por lo que recibió un premio de la Real Sociedad de Ciencias de Copenhague. Al parecer, durante la elaboración de este trabajo, Gauss tenía ya en proyecto la realización de una teoría general de superficies, pues en la portada de la memoria Gauss escribió que esta obra era el punto de partida para obtener cosas más interesantes.

El 8 de octubre de 1827 Gauss presentó su teoría general de superficies en la memoria titulada *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"*, la cual es considerada como la obra maestra de la geometría diferencial clásica de superficies, y la obra de referencia de los posteriores desarrollos de la geometría diferencial de variedades.

2.2 La obra Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas

La obra está dividida en veintinueve secciones. En las tres primeras secciones, Gauss introduce los convenios de notación y algunos resultados (esencialmente conocidos) sobre trigonometría esférica, y define punto regular o singular de una superficie imponiéndole la condición de existencia o no del plano tangente a la superficie en ese punto, respectivamente.

En la secciones cuatro y cinco aborda el problema de la orientación de una superficie. Así, para orientar el plano tangente en un punto de la superficie, Gauss considera la dirección normal a la superficie en ese punto. Comenta la posibilidad de elegir dos posibles vectores unitarios y normales en cada punto regular de una superficie, que representan la misma dirección normal y reflexiona sobre cuál de estos dos vectores debe de elegir. Gauss expone tres métodos generales para definir una superficie. El primero por medio de una ecuación en implícita en las coordenadas x,y,z, es decir una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$. El segundo método es expresando las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de la superficie en función de dos variables.

Finalmente en el tercer método, una de las coordenadas, por ejemplo z, se expresa en función de las otras dos. Además, obtiene las expresiones del vector unitario normal para los distintos métodos.

En la sección seis Gauss, inspirado por sus trabajos sobre astronomía y geodesia, introduce tres conceptos que serán fundamentales a lo largo de su obra:

a) La *aplicación esférica normal*.

b) La *curvatura total* (ó curvatura integral) de una parte acotada de una superficie (un "trozo compacto" de superficie).

c) La *"medida de curvatura"* $K(p)$ en un punto p de una superficie M, la cual hoy es conocida como *curvatura de Gauss* $K(p)$ de M en el punto p.

En las siguientes seis secciones (de la siete a la doce) Gauss se dedica a calcular la curvatura de una superficie y estudiar algunas consecuencias. Primero, usando su definición de curvatura obtiene una expresión general de ella, para luego obtener su expresión cuando la superficie viene dada por cada uno de los tres métodos que Gauss describe para representar una superficie. También prueba que su curvatura es el producto de las dos curvaturas principales, las cuales habían sido introducidas por Euler, y obtiene el conocido Teorema Egregium:

Teorema. [Teorema Egregium de Gauss] *La curvatura de Gauss de una superficie es invariante respecto de aplicaciones que conserven el elemento de longitud (o primera forma fundamental), es decir, respecto de aplicaciones isométricas.*

Es de observar que Gauss no utilizaba el término "isometría" sino que hablaba de superficies que se pueden "desarrollar" sobre otras superficies.

De aquí Gauss deduce que una isometría entre dos superficies en $\mathbb{R}^3$ conserva la curvatura total de correspondientes "trozos finitos" de superficies.

En la sección trece Gauss interpreta una superficie, no como el borde de un sólido, sino como un cuerpo flexible pero no extensible y comenta que se pueden distinguir dos manera de hacer geometría sobre una superficie. De una parte, la que se hace presuponiendo una forma definida de la superficie en el espacio y de otra la que es independiente de las distintas formas que una misma superficie se puede presentar en el espacio. Esta segunda forma de estudiar las superficies es lo que se denomina hoy la geometría diferencial intrínseca. Conceptos y propiedades como, la medida de curvatura (la curvatura de Gauss), la consideración de figuras sobre una superficie, sus ángulos, áreas, curvaturas integrales, las curvas más cortas (geodésicas) que unen puntos pertenecen a esta geometría y sus propiedades sólo dependen del elemento lineal (primera forma fundamental) de la superficie. Desde este punto de vista, una superficie plana y una desarrollable (es decir una superficie cónica, cilíndrica o tangencial) pueden considerarse iguales. Termina la sección comentando que el método genérico para definir la naturaleza de las superficies, consideradas desde el punto de vista intrínseco, es partir de su elemento lineal $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$. Pero antes de hacer esto, Gauss señala que primero debe de introducir los principios de la teoría de las curvas más cortas sobre una superficie.

Desde la sección catorce a la diecinueve Gauss se dedica al estudio de las geodésicas sobre las superficies. Este problema lo aborda utilizando el cálculo variacional. El primer resultado que demuestra Gauss es que las geodésicas son caracterizadas por la condición (extrínseca) de que su vector aceleración es normal a la superficie (lo que ya había obtenido Euler, y al parecer también J.Bernoulli), es decir que el vector normal principal a una geodésica es normal a la superficie.

Obtiene lo que hoy día se conoce como Lema de Gauss. De hecho, primero Gauss prueba, lo siguiente:

Teorema . *Si sobre una superficie consideramos un número infinito de líneas más cortas (geodésicas) de igual longitud con un mismo punto inicial, entonces la curva que unen sus extremos será normal (ortogonal) a cada una de las líneas.*

Después describe un resultado más general, en la sección dieciséis, que dice que se obtiene de forma similar al anterior, y que enuncia como sigue:

Dada una curva de una superficie, en todos los puntos de ella, y sobre un mismo lado de la curva trazamos segmentos de geodésicas ortogonales de iguales tamaños, la curva que unen los extremos de estos segmentos también es perpendicular a los segmentos geodésicos.

Considera también el elemento lineal sobre una superficie: $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, para dar significado geométrico a los coeficientes E, F y G, en la sección dieciocho. Para ello, supone la superficie dada en la forma $\vec{\mathbf{x}}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, y estudia longitudes, los ángulos y áreas de trozos de superficies delimitados por curvas paramétricas.

Gauss sigue investigando las geodésicas en la sección dieciocho, dando condiciones para que una curva tenga longitud mínima, suponiendo que la curva viene expresada por una relación entre los parámetros de la forma $u = u(v)$. Sin embargo, Gauss no proporciona una expresión explícita de la ecuación diferencial que nos da las geodésicas. Gauss sólo comenta que es una ecuación diferencial de segundo orden entre u y v.

En la sección diecinueve introduce un tipo especial de coordenadas sobre la superficie: supone que las curvas u-paramétricas son geodésicas (con parámetro natural) y que las curvas v-paramétricas son ortogonales a las de parámetro u. En ese caso se deduce que E=1, F=0. Con estas coordenadas, que suelen denominarse coordenadas geodésicas, muchos de los cálculos que ya había obtenido se simplifican.

Después de unos laboriosos cálculos Gauss obtiene en la sección veinte la primera versión de lo que se conoce como Teorema de Gauss-Bonnet. En su artículo lo describe como sigue:

Lo que excede de π la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico es igual a la curvatura total del triángulo.

En las últimas nueve secciones, Gauss se dedica a la demostración de teoremas para comparar los ángulos y las áreas de triángulos geodésicos sobre una superficie con los de triángulos con las mismas longitudes en el plano euclídeo, y generaliza resultados de Legendre para triángulos geodésicos esféricos a triángulos geodésicos sobre superficies arbitrarias.

Hasta aquí hemos desarrollado las principales ideas que aparecen en la memoria de Gauss. No cabe la menor duda de que el trabajo es importante por sí mismo, pero quizás más importante fue sus consecuencias posteriores. Los geómetras anteriores a Gauss consideraban una superficie o bien como constituida por una infinidad de curvas adosadas unas a otras, o que era el borde de algún sólido, en el espacio tridimensional. Para Gauss, para estudiar la geometría de una superficie bastaba considerar sólo la superficie, para él la superficie en sí era un ente propio y el espacio ambiente no influía sobre ella para nada. Si se introducen sobre la superficie coordenadas (u, v) obtenidas de una representación paramétrica $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de la superficie, y si se obtienen E, F y G, entonces se deducen las propiedades de la superficie (uno puede obtener la curvatura, estudiar longitudes, ángulos, áreas, geodésicas,...). En resumen el elemento lineal o primera forma fundamental, $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, determina la geometría de la superficie. Así, la superficie tiene "su propia geometría". Se puede profundizar más, por ejemplo uno puede olvidarse del espacio ambiente e introducir otra "primera forma fundamental" sobre la misma superficie. Con ello lo que estamos haciendo es introduciendo otra forma de tomar medidas sobre la superficie y por ello la geometría resultante sobre ella es diferente. Así, una misma superficie puede tener diferentes geometrías dependiendo de la elección de la forma de tomar medidas sobre ella. Lo mismo podríamos hacer en nuestro espacio tridimensional (donde la "primera forma fundamental" que se considera es $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$). La primera forma fundamental que usualmente se elige sobre una superficie procede de la elección de la medida euclídea ($ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo hoy sabemos que podemos elegir diferentes expresiones para una métrica en nuestro espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ y consecuentemente obtener geometrías diferentes sobre él.

Estas ideas, de separación de la superficie del espacio ambiente y de la separación del espacio de las posibles construcciones geométricas en el mismo, derivadas de la elección de una métrica determinada, son las base en donde se sustenta la aportación de Riemann al estudio de la geometría diferencial.

3 La Geometría de Riemann

3.1 Contribución de Riemann a la Geometría Diferencial

Bernhard Riemann (1826- 1866), otro de los grandes genios de todos los tiempos, estudió en Gottingen. Fue alumno de Gauss y Weber. Tuvo grandes aportaciones a diversas áreas de las matemáticas como teoría de numeros, análisis de variable compleja y real, teoría de funciones, en topología, y en geometría. También tuvo contribuciones a la física (teoría del calor, la luz, teoría de gases, magnetismo, dinámica de fluidos, acústica,...). En algunos de sus trabajos contribuyó al estudio de las relaciones de las matemáticas con la física, de hecho fue pionero en una nueva concepción de los fenómenos físicos dentro de un marco general y unificador, es decir dedicó parte de su corta vida a la búsqueda de un teoría unificada de las fuerzas fundamentales.

La aportación de Riemann a la geometría diferencial no fue sólo de generalizar la geometría de superficies de Gauss a dimensiones superiores.

Puede decirse que Riemann revolucionó la geometría al considerar y profundizar en la idea de Gauss de que había que separar el espacio de las construcciones y propiedades geométricas que pueden desarrollarse en él, las cuales se derivan de la forma en que se pueda "medir".

Para obtener el título de "Privatdozent", Riemann tenía que defender una memoria en un acto ante el profesorado de la Universidad de Gottingen.

Gauss propuso a Riemann el tema sobre los fundamentos de la geometría. La memoria que título *"Sobre las hipótesis que sirven de fundamentos a la Geometría"* fue defendida en (1854), pero publicada después de su muerte, en 1868.

En su obra Riemann no realizó cálculos y apenas aparecen fórmulas, y sus ideas aunque claras y profundas no están suficientemente desarrolladas. La razón se debió a que su obra iba dirigida a una gran audiencia, el profesorado de Gottingen al completo, y por ello hizo todos los esfuerzos para que su obra fuese comprendida por todos los asistentes, incluidos los no versados en matemáticas.

También hay que decir que Riemann buscaba una justificación filosófica profunda al nuevo tratamiento que le daba a la geometría, y esto no dependía de fórmulas sino de replanteamientos de los principios básicos que habían permanecido invariantes a lo largo de la historia, en particular desde la época de Euclides.

En 1861 envió un artículo (al que se le suele denominar el Pariselarbeit), sobre teoría del calor, a la academia de Ciencias de Paris para competir por un premio (que no obtuvo). En este artículo aparecen parte de los desarrollos analíticos de su lección, y fue publicado en 1876 (después de su muerte).

3.2 Sobre las Hipótesis que Sirven de Fundamentos a la Geometría.

Riemann introduce su obra con una reflexión, de tipo filosófico, sobre como se había enfocado la geometría (hasta su época). Así comenta que desde siempre, en los estudios en Geometría se presuponía como dado tanto el concepto de espacio, como los primeros conceptos básicos para las construcciones en dicho espacio. Para él, sólo se daban definiciones nominales, mientras que las verdaderas determinaciones aparecían en forma de axiomas y con ello quedaba a oscuras la relación entre esas presuposiciones, no se comprendía si su relación era necesaria, ni en qué medida lo era, y si a priori era posible. Así, por ejemplo, en la Geometría Euclídea, se considera nuestro espacio, y de las experiencias empíricas se deducen una serie de reglas o verdades, a priori ciertos sin discusión, que se recogen en un sistema de axiomas y postulados, y a partir de ellos se estudian las propiedades y construcciones a realizar en el espacio. Así, desde este punto de vista el espacio es un todo. La filosofía de las geometrías no euclídeas era similar, en este caso uno de los axiomas (concretamente el 5 axioma o postulado de las paralelas) es sustituido por otro diferente, el cual no se deduce ahora de las experiencias empíricas.

Para clarificar esta situación, Riemann en su artículo presenta un plan de trabajo que pretende realizar en tres pasos, primero introducir el concepto general de magnitud, en un segundo paso trata de buscar los hechos más simples a partir de los cuales puedan determinarse diferentes relaciones métricas en dicho concepto, y un tercer paso tratará de aplicar estos hechos al espacio. Así su obra la tiene dividida en tres secciones, cada una de ella con diferentes apartados. El contenido de cada sección se puede resumir como sigue.

I. Concepto de magnitud de n dimensiones

En este primer paso, Riemann introduce el objeto en donde se va a realizar la geometría. Así, lo primero que hay que definir es espacio. No solo lo define en dimensión tres sino en general de dimensión n. Tras profundas deliberaciones, Riemann introduce el concepto de magnitud n-dimensional, que comprende como caso particular las magnitudes espaciales, y también señala que podemos describir los elementos (puntos) de una magnitud n-dimensional a través de la utilización de n coordenadas $(x_1, ...x_n)$. Es decir, introduce el ente (u objeto), y la manera de enumerar sus elementos. En este objeto es en donde se va ha desarrollar la geometría, pero el objeto no influirá en las cuestiones y propiedades geométricas que tenga, sino que estas dependerán de la forma de como tomemos la medida, siguiente concepto que se introduce en el segundo paso.

II. Relaciones métricas de las que es susceptible una variedad de n dimensiones, en la hipótesis de que las líneas poseen una longitud independiente de su posición, y por tanto cada línea es medible por cualquier otra.

Una vez fijado el concepto de magnitud n-dimensional el siguiente paso es introducir el objeto que permite establecer las relaciones métricas. Para ello, Riemann introduce una expresión matemática para poder calcular las longitudes de las líneas, la cual es una generalización de la expresión en el caso euclídeo. Es una expresión diferencial de segundo grado. También introduce una "medida de curvatura", que generaliza la curvatura de Gauss para superficie en dimensión 2. Para ello, considera, a partir de un punto, las geodésicas a la variedad que son tangentes a una sección plana de la variedad. El conjunto de estas geodésicas generan una subvariedad bidimensional (una superficie) de la variedad n-dimensional, que pasa por el punto de partida. Entonces Riemann calcula la medida de curvatura (en el sentido de Gauss) de estas superficies, obteniéndose un número infinito de curvaturas en la variedad, pero de $n\frac{n-1}{2}$ de estas medidas de curvatura se deduce el resto. Para una variedad que es una superficie, la curvatura de Riemann es exactamente la curvatura de Gauss. Esta curvatura es una propiedad de la métrica impuesta sobre la magnitud n-dimensional. Antes de realizar las aplicaciones al estudio del espacio, también Riemann hace unas consideraciones sobre las variedades planas (n-dimensionales) y las que tienen medida de curvatura constante. Estas últimas se pueden caracterizar geométricamente por el hecho de que las figuras geométricas, o formas espaciales finitas, se puede mover libremente por la variedad, sin sufrir deformaciones De hecho encuentra una expresión sencilla del elemento de línea en una variedad n-dimensional de medida de curvatura constante, respecto de un sistema de coordenadas adecuado.

III. Aplicación al espacio.

La última parte de la lección de Riemann la dedica a las aplicaciones de sus consideraciones previas para determinar las relaciones métricas de nuestro espacio físico. Riemann supone que las líneas son independientes de la posición y que el elemento de línea es representado por una expresión diferencial de segundo grado, es decir que se supone el espacio al menos localmente euclídeo. Una primera pregunta que se plantea es saber si el espacio físico es euclídeo o no. Como bien dice Riemann, una forma de comprobarlo es ver que la suma de los ángulos de un triángulo es igual en todas parte a dos rectos.

Ahora, para ver la naturaleza del espacio físico Riemann hace consideraciones geométricas a gran escala (escala astronómica) y luego a escala infinitesimal (escala atómica).

Respecto a las consideraciones hacia lo sumamente grande, la independencia de los cuerpos respecto de la posición, su libre movilidad es una hipótesis que si se presupone se deduce que nuestro espacio es de medida de curvatura constante. Las consideraciones empírica acerca de la métrica se basan en el empleo de cuerpos sólidos y rayos de luz, conceptos que pierden su validez en lo infinitamente pequeño. Riemann en su obra señala que las relaciones métrica en lo infinitamente pequeño podría no ser conforme a los presupuestos de la geometría y su fundamento debería de buscarse fuera, en las fuerzas de enlace que actúen sobre espacio (supuesto como siempre el espacio continuo, no discreto), cuestión que nos llevaría al dominio de la física.

Como se puede apreciar, Riemann tenía en mente los problemas de la unificación, pensamientos que conducen a la teoría de la relatividad y posteriores desarrollos de la misma.

4 Los sucesores de Riemann. El Análisis Tensorial.

La obra de Riemann tiene un profundo contenido filosófico de como se debería de enfocar la geometría.

Después de su disertación empezó a trabajar en sus ideas y obtuvo algunas más aportaciones sobre la métrica, la curvatura, los espacios de curvatura constante,...

Los primeros desarrollos posteriores fueron debidos, entre otros, a E. Beltrami (1835-1900), E.B. Christoffell (1829-1900) y R. Lipschitz (1832-1903).

Una rama importante que se utilizará en relatividad es el cálculo tensorial.

Los orígenes del cálculo tensorial puede situarse en el contexto de la geometría de Riemann, cuando se inició el estudio de los invariantes diferenciales asociados primero a coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio euclídeo, para posteriormente pasar a estudiarse respecto de coordenadas sobre una superficies y sobre espacios n-dimensionales con una métrica de Riemann.

El gran impulso en el desarrollo del cálculo tensorial fue dado por G. Ricci-Curbastro (1853-1925). Ricci trató de interpretar y desarrollar las propiedades geométricas así como las expresiones de las leyes físicas en forma de invariantes bajo cambios de sistemas de coordenadas. En 1892 publicó una primera exposición de su método aplicándolo a algunos problemas de geometría diferencial y de física, y posteriormente en 1901, en colaboración con su discípulo T. Levi-Civita (1873-1941), publicó un artículo más general, *"Métodos de cálculo diferencial absoluto"*. Esta obra es un de las más importante e influyente en la historia de la geometría diferencial y la física matemática. El tema de trabajo se conoce hoy por *"análisis tensorial"*, término que fue dado por Einstein en 1916. De hecho, la obra anterior fue el documento básico que utilizó Einstein para aprender el análisis tensorial, que posteriormente usaría en su teoría general de la relatividad.

5 Algunas aplicaciones a la Física

5.1 La Geometría de la Relatividad de Einstein

En el siglo XIX los físicos pensaban que el espacio era absoluto y estaba lleno de una especie de sustancia fija e invisible que denominaban "éter", a través del cual se movían los cuerpos (en particular las ondas electromagnéticas también se propagaban a través del éter). Este éter servía también como referencia inmóvil universal. Es de observar que para describir las leyes del electromagnetismo de Maxwell se hacía necesario suponer la existencia de una referencia inmóvil. Las ecuaciones de Maxwell no eran invariantes por las transformaciones de Galileo, es decir no eran invariantes por cambios de sistemas de referencias inerciales y por lo tanto no cumplían el principio de relatividad de Newton para la mecánica.

Si el éter inmóvil existía, sería lógico idear experimentos para poner de manifiesto cualquier movimiento respecto de él. A lo largo del siglo XIX se realizaron una serie de experimentos para intentar calcular la velocidad de la tierra respecto de este éter, pero todos fracasaron. Generalmente en estos experimentos se involucraba a la luz. En 1887, los físicos A. Michelson y E. Morley intentaron detectar el viento de éter, que se suponía que debería de general el movimiento de la tierra a través de un mar de éter inmóvil. En sus experimentos no encontraron tal viento del éter, pero de estos se dedujo que la velocidad de la luz respecto de la tierra en cualquier dirección era siempre la misma, lo que iba en contra de la ley de adición de velocidades de Newton.

Así, no había forma de unificar la dinámica de Newton y el electromagnetismo.

Así las cosas, aparece el genio de A. Einstein (1879-1955). Einstein comprendió que el principio de relatividad podía hacerse compatible con las ecuaciones de Maxwell si se abandonaba el tiempo absoluto de Newton en favor de un nuevo absoluto: la velocidad de la luz, la misma en todos los sistemas inerciales. Como consecuencia las transformaciones de Galileo entre las coordenadas espaciales y temporales, que relacionan los diferentes sistemas inerciales de Newton, se tendrían que sustituir por las denominadas transformaciones de Lorentz. Surge así la *Teoría de la Relatividad especial*, en un artículo de Einstein titulado *"Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento"*, en 1905. En este trabajo Einstein enuncia sus dos principios:

El Principio de la relatividad: *Las leyes de la física (de la mecánica, la óptica y la electrodinámica) son las mismas para todos los observadores (sistemas inerciales) que se mueven con respecto al otro con movimiento relativo rectilíneo uniforme.*

El Principio de invarianza de la velocidad de la luz: *La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor constante en todos los sistemas inerciales.*

Tres años después aparece la visión geométrica de H. Minkowski (1864-1909), con su idea del espacio-tiempo.

Minkowski, introduce en $\mathbb{R}^4$ la métrica $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2$, y modeliza la relatividad especial en este contexto. Su gran aportación consiste en que ahora un sistema inercial no es otra cosa que la elección de una base ortonormal en $\mathbb{R}^4$, los sucesos son puntos en $\mathbb{R}^4$, que son representados por coordenadas (x_1, x_2, x_3, t) respecto de la base elegida y los problemas físicos planteados en el marco de la relatividad especial son interpretados como problemas geométricos en $\mathbb{R}^4$ con la métrica g (a $(\mathbb{R}^4, g)$ se le denomina *espacio de Minkowski*).

Es de observar que si bien la teoría especial unifica la dinámica de Newton y el electromagnetismo de Maxwell, los problemas gravitacionales quedan fuera de ella.

En 1907, Einstein redacta su famoso principio de equivalencia:

Principio de equivalencia: *Ningún experimento interno puede manifestar diferencia alguna entre un pequeño laboratorio acelerado en el espacio y el laboratorio equivalente situado en la tierra y por tanto sometido a la gravitación.*

Entre 1907 y 1911, trabaja duramente para intentar enunciar una ley de campo para la gravitación, y llega a la conclusión de que su principio de equivalencia implica que las ecuaciones de la Física deberían de expresarse de tal manera que todos los sistemas de coordenadas espacio-temporales estuvieran en las mismas condiciones de igualdad, lo que se denominó *Principio de covarianza general.* Ahora, para la aplicación de este principio, Einstein se encontró con graves problemas matemáticos y buscó la ayuda de un experto, su amigo M. Grossmann.

Einstein, con sus reflexiones y la aportación de Minkoswki, llega a la necesidad de utilizar la geometría de Riemann como soporte matemático de su teoría. Su intuición le hizo ver que el tensor métrico del espacio-tiempo debería ser la realidad que representase la gravitación. El tensor métrico g debería comportase en cada punto como la métrica de Minkowski, que tiene signatura $(3, 1)$. Sus componentes, g_{ij} , representarían los potenciales gravitatorios, que por la simetría de g se tendrían diez potenciales. En mecánica clásica el potencial V de un campo gravitatorio creado por un medio continuo, de densidad ρ , es obtenido a través de la ecuación de Poisson $\nabla V = 4\pi K\rho$. Así, Einstein se enfrentaba con la tarea de encontrar 10 ecuaciones correspondientes del campo gravitatorio g. Ellas fueron obtenidas por Einstein en su trabajo sobre relatividad general de 1916, como fruto del estudio, con Grossmann desde 1912 a 1914, de la geometría de Riemann y del cálculo diferencial absoluto de Ricci y Levi-Civita.

Después de mucho trabajo Einstein llega a la conclusión que estas ecuaciones debían ser:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} + \Lambda g_{ij} = kT_{ij},$$

donde R_{ij} son las componentes del tensor de Ricci, R la curvatura escalar, obtenidos ambos del tensor de curvatura, T_{ij} son las componentes del tensor de impulso-energía (el cual nos da la información sobre la materia, incluida su densidad) y k y Λ son constantes. La ecuación de Poisson resulta ser una aproximación de las ecuaciones de Einstein (en otras palabras, cuando estamos ante un campo gravitatorio débil, las ecuaciones de Einstein se reducen a la de Poisson).

En resumen, para Einstein en la relatividad general, en presencia de un campo gravitatorio, el espacio-tiempo es una variedad diferenciable de dimensión cuatro con un tensor métrico g de signatura $(3, 1)$, que es solución de las ecuaciones de Einstein.

La diferencia entre la teoría general y la especial es que en la teoría especial el tensor de curvatura de la variedad es nulo, mientras que en el caso general el tensor de curvatura es no nulo siempre que la materia esté presente. Esta curvatura es responsable del efecto gravitacional entre las masas.

Una variedad de Lorentz es un par (M, g), donde M es una variedad diferenciable de dimensión n y g un tensor métrico de signatura $(n-1, 1)$. Así, los espacios-tiempos de la relatividad general son variedades de Lorentz de dimensión 4.

El estudio de los problemas físicos que involucren campos gravitacionales se traducen en problemas geométricos sobre una variedad de Lorentz. A continuación damos un ejemplo.

Para describir el campo gravitatorio creado por una estrella, en el exterior, se considera como variedad de Lorentz $V \times \mathbb{R}$, donde V es $\mathbb{R}^3$ menos una bola cerrada centrada en el origen , g la métrica de Schwarzschild dada por

$$g = \frac{1}{(1-k/r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) - (1-k/r)dt^2,$$

donde $k = cte.$ y depende de la estrella, y (r, θ, φ) coordenadas esféricas sobre V. Así, el movimiento de un planeta alrededor del sol describe una geodésica en la métrica anterior. También la trayectoria de un rayo de luz es una geodésica de la misma métrica.

La métrica de Schwarzschild tiene una singularidad para $r = k$, lo cual ocurre cuando estudiamos el campo gravitatorio producido por una estrella de radio inferior que k. En realidad la singularidad es producida por una mala elección de coordenadas. Así, haciendo un cambio adecuado se obtiene el denominado espacio-tiempo de Kruskal, en donde la singularidad es evitada. En este espacio podemos hacer una descripción matemática de un agujero negro, que se produce en este caso en el zona entre la estrella y el espacio correspondiente a $r = k$, interpretado en el espacio-tiempo de Kruskal.

Las variedades de Lorentz, que nacen de las ideas de Minkowski y Einstein sobre los espacios-tiempos, han sido objeto de investigaciones desde el siglo pasado, resurgiendo su interés a partir de los años 70, gracias a los avances en teoría de causalidad, teoría de singularidades y agujeros negros en relatividad general, y en geometría de Lorentz global en general.

5.2 La Geometría del Universo. Modelos Cosmológicos

¿Cómo es el universo?, ¿Es finito, o es infinito?, ¿Ha existido siempre, o bien existe desde un instante inicial?, ¿existirá siempre?.

Estas cuestiones han sido objeto de estudio a lo largo de la historia.

En primer lugar hay que notar que las especulaciones sobre la forma del Universo se encuentran ante un hecho irremediable: es imposible definir la forma de un objeto que se percibe únicamente desde su interior. Por ello, desde siempre se ha recurrido a una idealización de la forma del Universo.

Los griegos fueron los primeros en dar una descripción del Universo, basado en la observación y en el carácter mitológico de los cuerpos celestes. Su "Universo" se dividía en ocho esferas, con la tierra como centro, la luna, el sol y los cinco planetas conocidos en aquella época constituían las esferas intermedias y las estrellas, inmóviles, la última. Para ellos el universo era infinito y llegaba hasta la esfera de las estrellas fijas (etapa aristotélica).

En la época medieval (Copérnico, Galileo, Kepler, Newton, Leibnitz,...), los modelos cosmológicos se basaron en el Principio de Copérnico según el cual la tierra no ocupaba ningún lugar privilegiado en el universo y la distribución de las estrellas era "homogénea, isotrópica y en eterno equilibrio". Esto implicaba que el universo se podía identificar con el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$, que es un espacio tridimensional, con geometría llana (euclídea), de extensión infinita y homogéneo e isotrópico. Este es el modelo cosmológico que I. Newton propuso sobre 1691. El modelo cosmológico que propuso G.W. Leibnitz también suponía al universo como un espacio Euclideo. En ambos modelos se suponían que el tiempo y el espacio eran absolutos.

Posteriormente, con la aparición de las geometrías no euclídeas, a finales del siglo XVIII y durante el siglo XIX, éstas también podían servir de modelo de nuestro universo, en el mismo rango que la geometría euclídea.

Entonces, ¿Qué modelo tomar? ¿Cuáles son las herramientas, o la teoría matemática que nos permiten dar solución a estas preguntas?

Desde el punto de vista de la Física sabemos que la dinámica de las galaxias, los cúmulos y los supercúmulos está regida por la interacción gravitatoria. Así, a gran escala, la estructura del Universo está regida por la gravitación. Ahora, la mejor teoría del campo gravitatorio que disponemos en la actualidad sigue siendo la relatividad general, que interpreta la gravitación como una deformación, ó curvatura, del tejido geométrico del Universo, creada por la materia que en él se encuentra.

Uno de los grandes atractivos de la teoría de la relatividad es el de constituir el marco adecuado para proponer modelos teóricos sobre nuestro Universo.

Einstein (1917) es el primero, que usando su teoría, propone un espacio en cuatro dimensiones cuya geometría depende de la distribución de masas que contiene. Posteriormente se han producido avances muy importante obtenidos tanto por los estudios de investigadores puramente teóricos, como por las observaciones experimentales de astrónomos y astrofísicos. Entre los primeros se encuentran W. de Sitter, A. Friedmann, G. Lemaitre, Robertson, Walker,...

A continuación damos, a grandes rasgos, una descripción de los modelos de universo de Robertson-Walker.

Imaginamos la materia del universo como un fluido donde cada "partícula" es una galaxia. Sobre estas partículas no actúa ninguna fuerza, salvo las que ejercen las unas sobre las otras por la gravedad. Este universo sería la parte espacial de nuestro espacio-tiempo.

De acuerdo con la teoría de la relatividad general no hay fuerzas de gravitación, sino que el movimiento de las partículas es representado por geodésicas del espacio-tiempo (M, g), siendo la métrica g la responsable de lo que a nosotros nos parecen fuerzas gravitacionales. Por supuesto, la métrica g ha de ser solución de la ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía en el Universo. Para resolverla se consideran las siguientes hipótesis: Las propiedades geométricas y físicas de nuestro universo son las mismas en todos los puntos en cada instante, así como en todas las direcciones alrededor de todo punto. Dicho de otra forma, el Universo es homogéneo e isótropo.

Usando estas hipótesis uno puede encontrar resultados locales sobre como debe ser la métrica, aunque no podamos deducir en absoluto la forma que tiene la variedad (M, g) globalmente.

El modelo global más sencillo de espacio-tiempo, compatible con las hipótesis de homogeneidad e isotropía, es de la forma $M = I \times S$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ (que puede ser todo $\mathbb{R}$), S una variedad de Riemann dotada de una métrica $\tilde{g}$ de curvatura constante, y M dotada con la métrica

$$g = -c^2 dt^2 + f^2(t)\tilde{g}.$$

Observar que aquí t, el tiempo, es la coordenada de I, y S es la parte espacial del espacio-tiempo M.

Los modelos de universo de esta forma se denominan *modelos de Robertson-Walker*. En estos modelos se supone que la materia (las diferentes galaxias) constituyen un fluido perfecto de densidad de masa-energía ρ y presión p que sólo dependen de t. La ecuación de Einstein relaciona f con ρ y p. En estos modelos existe un tiempo común t a todas las galaxias y en cada instante $t = t_0$ de este tiempo, un espacio común a todas las galaxias, $t_0 \times S$, como en la física de Newton.

Un modelo de Robertson-Walker con la función $f = f(t)$ no constante (hipótesis que siempre se cumplirá si se admite la ley de Hubbe con la constante de Hubble $H_0 > 0$) y con presión p idénticamente nula, se denomina *modelo de Friedmann*.

Finalizamos recordando los modelos cosmológicos cerrados y abiertos de Friemann.

En el *modelo cerrado*, el cosmo (la variedad espacial) consiste en la esfera tridimensional de radio r, donde el radio depende del tiempo, $r = t(t)$, el cual puede ser determinado por las ecuaciones de Einstein. Aquí, t es positivo, y $t = 0$ corresponde al instante del Big Bang. El espacio-tiempo es en este caso $M = S_r^3 \times \mathbb{R}^+$ y

$$g = r^2[d\psi^2 + sen^2\psi(sen^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)] - c^2 dt^2,$$

En el *modelo abierto*, se considera un cilindro $P_r^3 = S_r^2 \times \mathbb{R}^+$. El espacio tiempo es entonces $M = P_r^3 \times \mathbb{R}^+$ y

$$g = r^2[d\psi^2 + senh^2\psi(sen^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)] - c^2 dt^2,$$

Cualquiera de los dos modelos es válido. Sin embargo, las consecuencias posteriores son diferentes en un modelo u otro.

6 APÉNDICE: Algunos conceptos y resultados básicos de la Geometría de Gauss y Riemann, en el lenguaje actual

6.1 El espacio

Como ya escribimos, en su obra Gauss indica que existen tres métodos generales para definir una superficie:

1. Por medio de una ecuación $F(x, y, z) = 0$.
2. Expresando las coordenadas x,y,z de un punto de la superficie en función de dos variables: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.
3. Una de las coordenadas se expresa en función de las otras dos: $z = f(x, y)$.

En su trabajo no se especifica mucho sobre estas funciones, que por supuesto considera diferenciables.

Actualmente, y siempre que es necesario trabajar en coordenadas (ó localmente) las superficies se suelen expresar generalmente de la segunda de las formas. Una definición actualizada de superficie sería como sigue:

Definición de superficie: *Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie si para cada $p \in M$ existe un abierto U de $\mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en M y una aplicación $\vec{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciable tales que $\vec{\mathbf{x}}_{|U} : U \to V$ es un homeomorfismo y $(d\vec{\mathbf{x}})_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.*

A la aplicación $\vec{\mathbf{x}}$ se le denomina parametrización, o representación paramétrica de la superficie. Si (u, v) denota las coordenadas en el plano $\mathbb{R}^2$, entonces $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v)$ y a (u, v) se les denomina coordenadas paramétricas (ó locales) de la superficie M, respecto de la parametrización $\vec{\mathbf{x}}$.

La idea de variedad diferenciable ya estaba en el tratado de Mecánica Analítica de Lagrange, en 1788, al considerar el espacio de configuración de un sistema dinámico, aunque su definición, necesaria para la formalización de las ideas de Riemann, aparece por primera vez de forma explícita en 1913 en un trabajo de H. Weyl. La definición moderna surge en un trabajo de O. Veblen y H. Whitehead en 1932, y la definitiva, como aparece actualmente, se debe a H. Whitney en 1936.

A grandes rasgos, una *variedad diferenciable* M, de dimensión n, es un espacio topológico (Hausdorff, segundo contable) de tal forma que en cada uno de sus puntos podemos encontrar un entorno abierto que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$,y además la correspondiente transformación de coordenadas inducida por dos de estos entornos (con intersección no vacía) nos da un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}$. Utilizando los homeomorfismos coordenados, uno puede introducir de forma natural la noción de *curva sobre una variedad* y de *vector tangente*. Así, dado un punto, localmente, en un entorno de ese punto podemos utilizar coordenadas $(x_1, ..., x_n)$, y una curva se podrá expresar, en coordenadas, por una expresión de la forma $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, y el vector tangente a la curva, en este caso, será $\alpha'(t) = (x'_1(t), ..., x'_n(t))$.

6.2 La métrica

La métrica es la que determina la geometría del espacio.

Si (x, y, z) son las coordenadas en $\mathbb{R}^3$, el elemento de longitud canónico, es dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Este elemento viene asociado a la geometría euclídea, y con él podemos obtener las longitudes las curvas en $\mathbb{R}^3$.

Así, es bien conocido que si tenemos una curva en $\mathbb{R}^3$, dada por una representación paramétrica $\vec{\alpha} : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, con $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces, como $dx = \frac{dx}{dt}dt$, $dy = \frac{dy}{dt}dt$, $dz = \frac{dz}{dt}dt$, se sigue que $ds^2 = (\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2)dt^2$ y así se obtiene la conocida fórmula que nos da la longitud de la curva:

$$L(\alpha) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2 + \frac{dz}{dt}^2}\, dt$$

Si tenemos ahora una superficie dada por $= \vec{\mathbf{x}}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, como

$$d\vec{\mathbf{x}} = (dx, dy, dz) = (\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv),$$

se sigue que

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

donde

$$\begin{array}{lllll} E & = & (\frac{\partial x}{\partial u})^2 + (\frac{\partial y}{\partial u})^2 + (\frac{\partial z}{\partial u})^2 & = & \vec{\mathbf{x}}_1\vec{\mathbf{x}}_1 \\ F & = & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} & = & \vec{\mathbf{x}}_1\vec{\mathbf{x}}_2 \\ G & = & (\frac{\partial x}{\partial v})^2 + (\frac{\partial y}{\partial v})^2 + (\frac{\partial z}{\partial v})^2 & = & \vec{\mathbf{x}}_2\vec{\mathbf{x}}_2 \end{array}$$

Así obtiene Gauss la expresión del elemento de longitud de arco sobre una superficie, el cual es fundamental para estudiar las propiedades métricas. En realidad lo que se está haciendo es restringiendo a la superficie el elemento de línea de $\mathbb{R}^3$, o dicho de otra forma tomando como medida o métrica sobre la superficie, la que induce la medida o métrica euclídea de $\mathbb{R}^3$. En lenguaje vectorial la expresión $ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$ en realidad representa un producto escalar definido positivo sobre el plano tangente a la superficie en cada punto, que no es sino la restricción del producto escalar euclídeo de $\mathbb{R}^3$. Al elemento de longitud se le denomina más comúnmente primera forma fundamental y suele definirse en los siguientes términos.

Definición Se denomina **primera forma fundamental** sobre la superficie M en un punto p a la aplicación bilineal simétrica definida positiva $I_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por $I_p(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Si aplicamos I_p los vectores básicos del plano tangente T_pM obtenemos los coeficientes g_{ij} de la matriz asociada a la aplicación bilineal I_p. Observar que $g_{11} = E$, $g_{12} = F$ y $g_{22} = G$.

Las operaciones métricas se realizan ahora utilizando la primera forma fundamental. Así, uno puede obtener el módulo de un vector tangente, el ángulo entre dos vectores tangentes, longitudes de curvas, áreas de regiones,..., en función de la primera forma fundamental. Por ejemplo, la longitud de una curva $\alpha(t) = \vec{\mathbf{x}}(u_1(t), u_2(t))$ sobre una superficie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v)$ es ahora,

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}}\, dt$$

De igual forma, el área, $A(\mathcal{R})$, de un dominio o región $\mathcal{R}$ sobre una superficie viene dada por:

$$A(\mathcal{R}) = \int\int_R \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du_1 du_2$$

En lenguaje tensorial, una métrica de Riemann sobre una variedad diferenciable es un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo. Esto no es otra cosa que asignar en el espacio tangente en cada punto p de la variedad un producto escalar definido positivo, es decir una aplicación bilineal:

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

simétrica y definida positiva.

Si usamos coordenadas $(x_1, ..., x_n)$, g se expresará de la forma

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

siendo g_{ij} las componentes de la matriz asociada a la aplicación bilineal que define la métrica, respecto de la base canónica de campos de vectores asociados a las coordenadas $(x_1, ..., x_n)$.

Para una superficie, su primera forma fundamental es una métrica de Riemann (es la métrica que induce sobre ella el producto euclídeo de $\mathbb{R}^3$).

De forma similar que para el caso de superficies podemos definir sobre la variedad de Riemann la longitud de una curva, ángulo entre vectores tangentes y entre curvas, volumen de una región,... Así, la longitud de una curva $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ sobre una variedad de Riemann (M, g) es

$$L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt$$

De igual forma, el volumen, $vol(\mathcal{R})$, de un dominio o región $\mathcal{R}$ sobre M es dado por:

$$vol(\mathcal{R}) = \int_R \sqrt{det(g_{ij})}\, dx_1...dx_n$$

6.3 La Curvatura de Gauss

En su obra Gauss introduce la "medida de curvatura", denominada hoy curvatura de Gauss como sigue.

Primero introduce la aplicación esférica normal (denominada hoy aplicación esférica de Gauss, o simplemente aplicación de Gauss), que, para una superficie M de $\mathbb{R}^3$ es la aplicación $L : M \to \mathbb{S}^2$ que a cada punto de M le asocia su vector unitario normal (considerado como punto de la esfera unidad). Aquí hay que observar que esta aplicación no necesariamente es definida en toda la superficie, a menos que ella sea orientable. El concepto de superficie orientable no estaba lo suficientemente madurado en la época de Gauss, como tampoco lo estaba el concepto de superficie en el sentido de la definición que hemos dado. Como los cálculos eran locales, lo que se hacía en aquella época era considerar sólo la parte de la superficie que abarcaba la parametrización. En ese sentido es definida la aplicación esférica.

La *"medida de curvatura"* $K(p)$ en un punto p de una superficie M, la cual es conocida como curvatura de Gauss $K(p)$ de M en el punto p es entonces definida como sigue. Dado $p \in M$ se considera un trozo de superficie $\mathcal{R}$ con $p \in \mathcal{R}$. Entonces

$$K(p) = \lim_{R \to p} \frac{area(L(R))}{area(R)},$$

es decir, se considera un trozo de superficie suficientemente pequeño rodeando el punto p, y entonces Gauss define curvatura de M en p como el límite de la razón inversa del área de este trozo con el área de la región correspondiente a través de la aplicación de Gauss, cuando ambas áreas tienen a sus respectivos puntos.

Con la ayuda de la curvatura de Gauss, la curvatura total de un trozo compacto D de una superficie orientada M es definida entonces como *curvatura total*$(D) = \int_D K d\sigma$, donde $d\sigma$ es el elemento de área de M. Esta definición es muy elegante y aporta una interpretación geométrica de la curvatura de Gauss.

Como ya indicamos, Gauss en su obra, y tras laboriosos cálculos obtiene las expresiones de su curvatura para las distintas parametrizaciones.

En la actualidad la curvatura suele definirse como el determinante de la diferencial de la aplicación de Gauss. Observar que $dL_p : T_pM \to \mathbb{R}^3$, es dado por $dL_p(\vec{v}) = \vec{v}(\vec{N})$, entendiendo que $\vec{v}(\vec{N})$ es la derivada del vector normal $\vec{N}$ en la dirección de $\vec{v}$. Así $dL_p(\vec{x}_i) = \frac{\partial N}{\partial u_i}$, suponiendo (u_1, u_2) las coordenadas paramétricas en la superficie.

De esta definición, tomando como base de T_pM los vectores unitarios principales se obtiene que $K = k_1 k_2$, donde k_i, $i = 1, 2$ son las curvaturas principales.

Si para cada $p \in M$ se introduce la segunda forma fundamental $II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$,que se define a partir de la diferencial de la aplicación esférica como $II_p(\vec{v}, \vec{w}) =< dL_p(\vec{v}), \vec{w} >$. Así II_p es una forma bilineal simétrica sobre T_pM. Si L_{ij}, $i, j = 1, 2$, son las componentes de la matriz asociada a II_p respecto de la base $\{\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2\}$, entonces se obtiene la conocida expresión

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

Aunque Gauss no llegó a trabajar con ella en su obra, la segunda forma fundamental juega un papel importante en el estudio de la forma de la superficie vista dentro de $\mathbb{R}^3$, y de ella depende de cómo está inmersa la superficie en $\mathbb{R}^3$. Como ya hemos comentado la primera forma fundamental es la restricción de la métrica euclídea a la superficie, que no depende de como está la superficie en $\mathbb{R}^3$. La segunda forma fundamental nos aporta herramientas para estudiar la forma de la superficie en $\mathbb{R}^3$. Así, las curvaturas normales, que nos indica como se flexiona la superficie en las distintas direcciones, queda determinada por la segunda forma fundamental, hecho que fue observado por Meusnier (1754-1793). Se puede decir que la geometría de una superficie en $\mathbb{R}^3$ queda caracterizada por las dos formas fundamentales , lo cual constituye el Teorema Fundamental de la Teoría Local de Superficies (Teorema de O. Bonnet, 1867).

6.4 Las Geodésicas sobre una Superficie

Gran parte de la obra de Gauss está dedicada al estudio de las geodésicas sobre una superficie. Como ya comentamos, posiblemente fue J. Bernouilli, en 1697, el primero en estudiar su existencia y demostrar que las geodésicas son trayectorias de aceleración tangencial nula, y Euler, en 1732, el primero en escribir sus ecuaciones.

Sabemos que en el plano euclídeo, las rectas, además de ser las curvas más simples, juegan un papel fundamental, son la base para todo tipo de construcciones geométricas, y tienen importantes propiedades geométricas. Así por ejemplo:

1. Las rectas tienen curvatura cero.
2. El camino más corto entre dos puntos es a través de la recta que los une.
3. Dado dos puntos existe una única recta que los une.
4. Dado un punto y una dirección existe una única recta por el punto y en la dirección dada.
5. Los vectores tangentes a un recta son todos paralelos.

En una superficie arbitraria este papel privilegiado es desarrollado por las líneas geodésicas. Así las geodésicas satisfacen:

1. Las geodésicas son las curvas de menor curvatura sobre la superficie (lo que se interpreta como que tienen curvatura geodésica nula, como sucede con las rectas).
2. La distancia más corta entre dos puntos sobre una superficie es a través de una geodésica (así, por ejemplo, las geodésicas del plano son las rectas y las de una esfera son los círculos máximos).
3. Dado dos puntos de una superficie existe una geodésica que los une (aunque esta propiedad es sólo local, y en general no es cierta).
4. Por un punto y una dirección existe una única geodésica en la dirección dada que lo contiene.
5. El campo de vectores tangente unitario de una geodésica es paralelo.

Las geodésicas se pueden introducir de distintas maneras. Así si $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ es una curva sobre una superficie, que podemos suponer parametrizada por el parámetro arco, entonces se dice que es geodésica si su campo de vectores tangente es paralelo a lo largo de ella, o que su curvatura geodésica es nula, o que $\vec{\alpha}''$ está en la dirección normal a la superficie.

Usando coordenadas, si $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u_1, u_2)$ es una representación de la superficie M y $\vec{\alpha}(s) = \vec{\mathbf{x}}(u_1(s), u_2(s))$ entonces $\vec{\alpha}$ es geodésica si es solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2u_k}{ds^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} = 0, \qquad k = 1, 2$$

También, usando el cálculo variacional, como hizo Gauss, se puede obtener la caracterización de las geodésicas. Concretamente, si consideramos una curva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$, que une dos puntos p y q, por ejemplo $\vec{\alpha}(a) = p$ $\vec{\alpha}(b) = q$, una variación propia de $\vec{\alpha}$ viene dada por una aplicación diferenciable $f : [a, b] \times (-\delta, \delta) \times M$, con $f = f(s, t)$, $f(s, 0) = \vec{\alpha}(s)$ y $f(a, t) = \vec{\alpha}(a)$, $f(b, t) = \vec{\alpha}(b)$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Si se fija un valor t del intervalo $(-\delta, \delta)$ se obtiene una curva f_t diferenciable que une a con b, con $f_0 = \vec{\alpha}$. Por ello, tenemos una familia de curvas que unen los puntos a y b (se suelen denominar curvas longitudinales de la variación). Para comparar las longitudes de estas curvas se puede introducir la función

$$L : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}, \qquad L(t) = \int_a^b |\frac{\partial f}{\partial s}| ds,$$

es decir $L(t)$ es la longitud de la curva $f_t(s) = f(t, s)$. Entonces se tiene que $\vec{\alpha}$ es geodésica sí y sólo si $\frac{dL}{ds}(0) = 0$, para toda variación propia de $\vec{\alpha}$.

Así, las geodésicas quedan caracterizadas como puntos críticos de la función Longitud para toda variación propia. En este sentido, las geodésicas son soluciones de un problema variacional.

6.5 El Teorema de Gauss-Bonnet

Otro de los resultados que aparecen en la obra de Gauss es el teorema ó fórmula de Gauss-Bonnet, tratada en sentido local, que relaciona la curvatura integral sobre triángulos geodésicos con los ángulos de sus vértices. Probablemente este teorema es uno de los resultados más profundos de la geometría diferencial de superficie, teniendo implicaciones no sólo locales, pues en sus sucesivas extensiones se aprecia que es un puente que enlaza aspectos locales y globales de la superficie. A continuación recordamos la primera versión de Gauss, y comentaremos sus extensiones posteriores y algunas de las aplicaciones.

Un triángulo geodésico sobre una superficie no es más que una curva cerrada, simple y diferenciable a trozos, con tres vértices, de modo que cada uno de los tres arcos que constituyen la curva es un arco geodésico (así, los triángulos geodésicos del plano son los propios triángulos). El resultado que probó Gauss es el siguiente:

Teorema de Gauss-Bonnet *Si $\mathcal{C}$ es un triángulo geodésico (suficientemente pequeño) sobre una superficie M, con ángulos interiores α, β y γ y es borde de un dominio simplemente conexo $\mathcal{D}$ entonces:*

$$\int\int_D KdA = (\alpha+\beta+\gamma)-\pi.$$

Un primer hecho que se puede apreciar es que este resultado generaliza otro conocido teorema de Legendre sobre trigonometría esférica:

Teorema *El área de un triángulo esférico es igual al producto de su exceso esférico $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$ por el cuadrado de su radio.*

Una primera generalización del resultado de Gauss es debida a O. Bonnet, en 1848, quién lo obtuvo para regiones simplemente conexas cualesquiera sobre una superficie, dando lugar a la conocida fórmula de Gauss-Bonnet, todavía con naturaleza local.

Teorema local de Gauss-Bonnet *Si D es un dominio simplemente conexo sobre una superficie con borde una curva cerrada diferenciable a trozos C, formada por n arcos regulares cuyos ángulos exteriores en los vértices son θ_1,θ_2,...,θ_k entonces:*

$$\int\int_D KdA + \int_C \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i$$

donde κ_g es la curvatura geodésica de C.

Unas primeras aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet se obtiene al considerar algunos casos particulares.

1. Si C es una curva diferenciable, entonces no tiene vértices y por tanto la fórmula se reduce a :

$$\int\int_D KdA + \int_C \kappa_g ds = 2\pi$$

2. Si C es un polígono geodésico, entonces C está constituido por arcos geodésicos y así $\kappa_g = 0$. La fórmula en este caso se reduce a

$$\int\int_D KdA = 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i$$

En particular, si estamos en el plano ($K = 0$) deduce que la suma de los ángulos exteriores de un polígono de k-lados es 2π.

Si en vez de los ángulos exteriores, introducimos los interiores $\varphi_i = \pi-\theta_i$, $i = 1,..,k$ se sigue

$$\int\int_D KdA = \sum_{i=1}^{k}\varphi_i - \pi(k-2).$$

Así en el plano, si tenemos un polígono de k-lados se deduce que $\sum_{i=1}^{k}\varphi_i = \pi(k-2)$, es decir la suma de los ángulos interiores de un polígono de k-lados es igual a $\pi(k-2)$ (en un triángulo es π, para un rectángulo 2π,...).

La fórmula de Gauss-Bonnet admite extensiones a dominios que no son simplemente conexos, es decir, dominios con agujeros cuyos bordes está formado por un número finito de curvas cerradas.

Una versión quizás más interesante es cuando se globaliza. Así, si consideramos superficies conexas y compactas , mediante triangulaciones se puede definir un importante invariante topológico, la característica de Euler-Poincaré. Recordar que una triangulación sobre una superficie es una familia de triángulos no solapantes que recubren a M, de manera que dos de tales triángulos sólo se intersectan en un vértice o lo largo de un lado común. Entonces, dada una tal triangulación se introduce la característica de Euler-Poincaré de M, $\chi(M)$, por:

$$\chi(M) = v - a - d,$$

donde v representa el número de vértices, a el número de aristas y d el número total de triángulos. Es de observar que $\chi(M)$ no depende de la triangulación. El teorema global de Gauss-Bonnet nos dice que la curvatura integral de una superficie compacta M es igual a 2π veces su característica de Euler, es decir

$$\int\int_D K dA = 2\pi\chi(M),$$

Así por ejemplo, como la esfera $S^2(1)$, de radio 1, tiene curvatura de Gauss $K = 1$, y área 4π se tiene que $\chi(S^2(1)) = 2$. Para un toro, con un agujero, $\mathbb{T}^2$ se deduce que $\chi(T^2) = 0$, y así $\int\int_{T^2} K dA = 0$. En general se deduce que si M es una superficie compacta homeomorfa a un toro con n-agujeros, o a una esfera con n-asas, entonces su característica de euler es $2(1-n)$, y por tanto su curvatura integral es $4\pi(1-n)$. Otra consecuencia importante que se deduce es que toda superficie compacta de curvatura positiva es homeomorfa a una esfera. Esto es evidente puesto que, por el teorema de Gauss-Bonnet, dicha superficie ha de tener característica de Euler-Poincaré positiva y la esfera es la única superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ que satisface esta condición.

Este resultado es de lo más sorprendente, relaciona cuestiones locales, como la curvatura K de una superficie, con globales, como la característica, que es un invariante topológico. Así, podemos imaginar todas la formas posibles de una superficie homeomorfa a una esfera S^2, por ejemplo, y impresionarnos del hecho de que la función curvatura de Gauss se distribuye de forma tal que su curvatura total $\int\int_{S^2} K dA$ toma siempre el mismo valor.

La característica de Euler también aparece al sumar los índices de un campo de vectores tangentes sobre la superficie, que tenga sólo ceros aislados. Así, también se pueden obtener generalizaciones del teorema de Gauss-Bonnet que relaciona estos dos conceptos, la curvatura total de M con la suma de los índices de un campo tangente sobre M, que sólo tiene ceros aislados. Es de observar que también existen generalizaciones, así como aplicaciones, de este teorema a dimensiones superiores (ver por ejemplo, M. Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (1975), vol. V)

6.6 Superficies de Curvatura Constante

Antes de continuar hemos de observar que para Gauss, y los matemáticos de su época, una superficie venía dada por una parametrización, o dicho de otra forma, con una única parametrización cubríamos la superficie (o el trozo de superficie a investigar). También usaban el término de superficies "aplicables" o "desarrollables", identificando superficies con parametrizaciones, que en realidad se correspondería a lo que hoy día se entiende por isometrías locales, y por ello parece necesario dar una interpretación actualizada los términos anteriores, de acuerdo a nuestra definición de superficie.

Denominamos isometría local entre dos superficies M_1 y M_2 a un difeomorfismo de un abierto $U \subset M_1$ sobre un abierto $V \subset M_2$ que conserva la primera forma fundamental (U se supone que es el dominio de definición de un sistema de coordenadas curvilíneas, aunque en general no es necesario). Una superficie M_1 es "aplicable" o "desarrollable" sobre otra superficie M_2 si, para todo punto de M_1, existe una isometría local de un entorno abierto U de este punto sobre un abierto V de M_2(esto quiere decir que las dos superficies son localmente isométricas).

El Teorema Egregium de Gauss nos dice que la curvatura de Gauss es invariante frente a isometrías locales, es decir que en puntos correspondientes de U y V las superficies M_1 y M_2 tienen la misma curvatura de Gauss.

Como corolario del Teorema Egregium, se sigue que para llevar "o mover" una parte de superficie sobre otra parte (de forma isométrica, es decir conservando la distancia) es condición necesaria que la superficie tenga curvatura de Gauss constante. Así, por ejemplo, una parte de la esfera puede ser movida sin deformación en otra parte, pero esto no puede suceder por ejemplo con un elipsoide (la esfera tiene curvatura de Gauss constante, pero el elipsoide no).

Es de observar que la condición de tener misma curvatura es una condición necesaria para que dos superficies sean aplicable pero no es suficiente. Es decir, existen aplicaciones entre superficies que conservan la curvatura en puntos correspondiente y sin embargo no son aplicables (ó isométricas). Aunque, en 1839 F. Minding (1806-1885) probó que si dos superficies tienen curvatura constante e igual entonces pueden ser aplicadas isométricamente una sobre la otra (o de otra forma, son localmente isométricas).

Las superficies de curvatura nula ($K = 0$) fueron estudiadas por Monge. Estas superficies son las denominadas superficies desarrollables, o aplicables sobre el plano y como se sabe son los cilindros, conos o las superficies generadas por las tangentes a una curva regular en $\mathbb{R}^3$. Así el modelo canónico de superficie de curvatura de Gauss nula es el plano.

Para las superficies de curvatura constante, si $K > 0$, usando un sistema de coordenadas adecuado, su primera forma fundamental se puede escribir de la forma

$$ds^2 = du^2 + \frac{1}{K} sen^2(\sqrt{K}u)dv^2,$$

y estas superficies son aplicables sobre una esfera de radio $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Si se trata de superficies de curvatura constante negativa $K < 0$, entonces su primera forma fundamenta admite la expresión:

$$ds^2 = du^2 - \frac{1}{K} sen^2(\sqrt{-K}u)dv^2,$$

y, en este caso, estas superficies son aplicables sobre una una pseudoesfera, una superficie de revolución obtenida por la rotación de una tractriz alrededor de su asíntota.

Desde el punto de vista global, H.Liebmann (1874-1935) prueba en 1899 que la única superficie completa sobre $\mathbb{R}^3$ de curvatura constante $K > 0$ es la esfera (Hilbert, Jellett). Por otra parte, D. Hilbert (1862-1943) probó, en 1901, que no existen, en $\mathbb{R}^3$, superficies regulares (sin puntos singulares) completas con curvatura constante $K < 0$.

Las superficies de curvatura constante sirven de modelo de las denominadas geometrías no euclídeas.

En los Elementos de Euclides apareció un postulado, que dio origen a profundos estudios y planteamientos de multitud de cuestiones derivadas de su validez o no durante muchos siglos, teniendo incluso repercusiones sobre la configuración del universo. Nos referimos al tan discutido y controvertido 5 postulado, que recordemos se enunciaba:

5.- Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace que los ángulos internos del mismo lado sean menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Este postulado es conocido también como postulado de las paralelas al ser equivalente al siguiente:

(P) Por todo punto exterior a una recta existe una única recta que lo contiene y no corta a la mencionada recta.

Históricamente se profundizó en la cuestión de si el Postulado de las Paralelas es independiente o es una consecuencia de los otros axiomas de Euclides.

En el siglo XIX, Nicolai Ivanovich Lobachevski (1792-1856) en 1829 y János Bolyai (1802-1860) en 1832 se percataron de que el axioma de las paralelas no podía ser deducido de los otros nueve. De hecho concluyeron que el axioma era un hecho independiente y que se podía construir geometrías que verificaran todos lo demás postulados excepto el de las paralelas. De hecho, también Gauss obtuvo resultados similares en 1816 pero mantuvo su hallazgos en privado. Así aparecen la denominadas geometrías no euclídeas (la Elíptica, y la Hiperbólica) en donde el axioma P es sustituido por otro diferente.

En la *Geometría Elíptica* el axioma P se reemplaza por

($P_{elíptica}$) Por todo punto exterior a una recta no pasa ninguna recta paralela a la anterior.

En la *Geometría Hiperbólica* el axioma P es reemplazado por:

($P_{hiperbólica}$) Por todo punto exterior a una recta existen infinitas rectas que lo contiene y no cortan a la mencionada recta.

La geometría diferencial de Gauss unifica estas geometrías. Concretamente, los espacios de curvatura constante sirven de modelos para las geometrías elípticas e hiperbólicas. Así la geometría elíptica se puede realizar sobre una superficie de curvatura de Gauss positiva, por ejemplo sobre una semiesfera de radio R, ($K = \frac{1}{R^2} > 0$), y la geometría hiperbólica sobre la pseudoesfera, que es una superficie de curvatura de Gauss negativa como comentamos anteriormente.

Referencias

C.B. Boyer: *"Historia de la Matemática"*. Alianza Editorial, 1986.

F. Dombrowski: *"Differential Geometry-150 years after Carl Friedrich Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas.* Astérisque, 62 (1979).

G. Gamow: *"Biografía de la Física"*. Biblioteca Científica Salvat, 1986.

C.F. Gauss: *"Disquisitiones generales circa superficies curvas"* (1827). Traducción inglesa de Astérisque, 62 (1979).

Morris Kline: *"El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I,II y III.* Alianza Universidad, 1992.

B. Riemann: *"Riemanniana Selecta".* Edición y estudio introductorio a cargo de J. Ferreirós. Clásicos del Pensamiento, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 2000.