Análisis de Señales Neurofisiológicos

INTRODUCCIÓN

El objeto de este trabajo es el de acercar los conceptos de procesamiento de señales y sus aplicaciones a estudiantes de áreas diversas, no necesariamente de ingeniería, física o matemáticas. Por ello, se ha procurado huir de un excesivo formalismo matemático y centrar las explicaciones en los conceptos. Se ha dividido esta conferencia en tres partes.

La primera muestra los conceptos básicos de procesamiento de señales. Principalmente la definición de señal y sus tipos, la noción de espectro y transformada de Fourier, así como el muestreo y el concepto de sistema.

La segunda parte aborda un repaso de los distintos métodos matemáticas que se utilizan en esta disciplina desde un punto de vista descriptivo, para hacer llegar al alumno la necesidad de los mismos.

Por último, se hace un repaso a varios ejemplos donde se muestra la utilidad del procesamiento de señales, en particular en los campos de procesamiento de sonido, voz y señales neurofisiológicas.

CONCEPTOS BÁSICOS

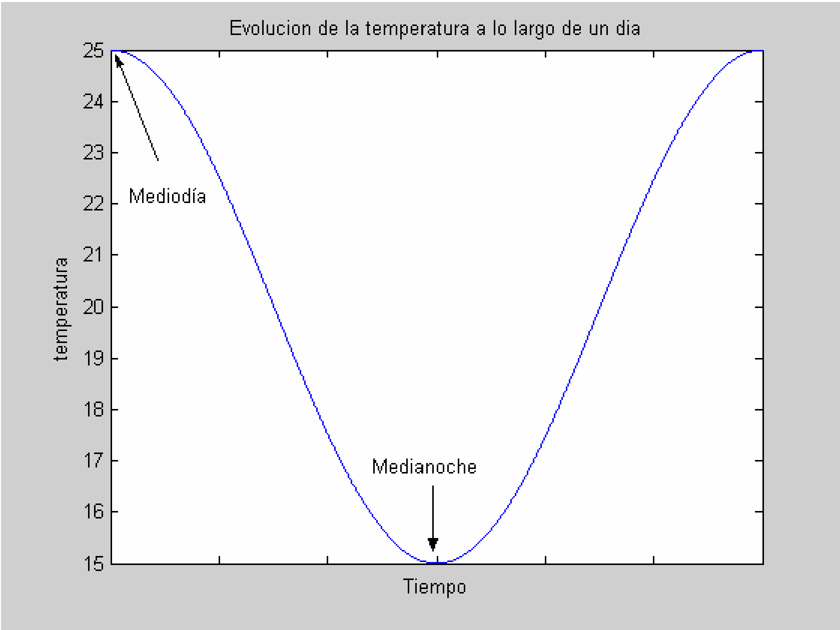
Señal

Dos definiciones de señal son:

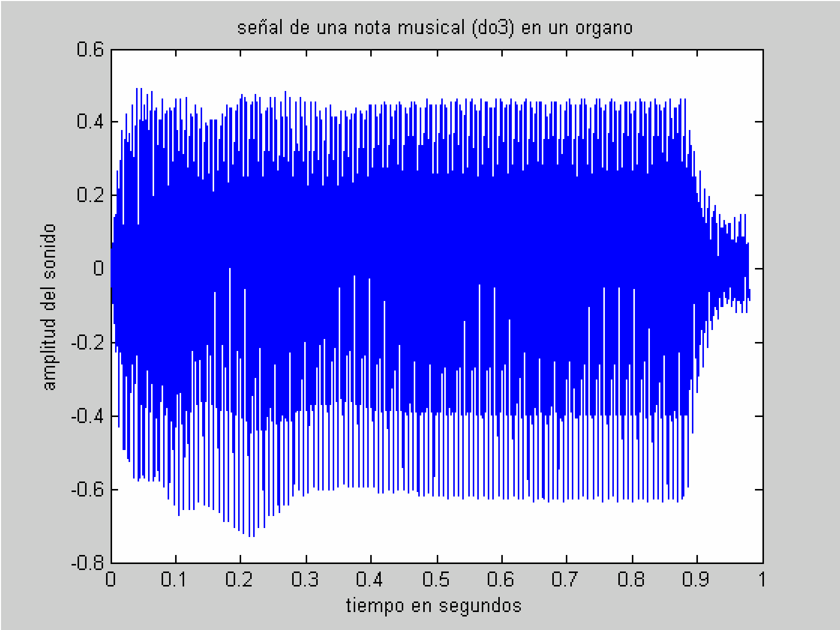
La variación en el tiempo o el espacio de una magnitud física.

Una función que lleva información, generalmente acerca del estado o comportamiento de un sistema físico.

Por ejemplo:



En este caso, la magnitud física es la temperatura y su variación, que expresa como cambia la temperatura a lo largo del día, es lo que entendemos por señal.



En este otro caso, la señal está representada por las variaciones en la presión del aire que son registradas por un micrófono al grabar el sonido de un instrumento musical. Lo que se representa, en realidad, son las variaciones de voltaje después de haber pasado por el micrófono.

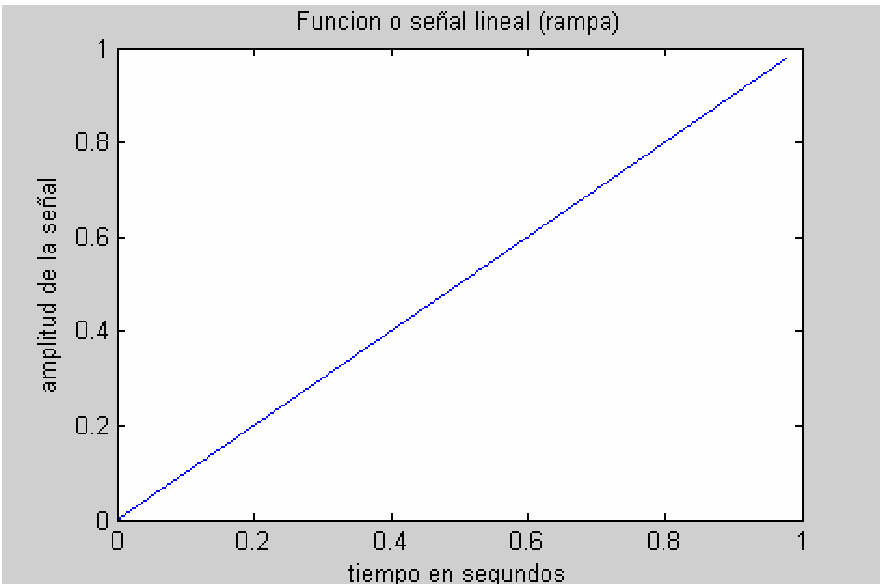
Hay que tener en cuenta la diferencia entre:

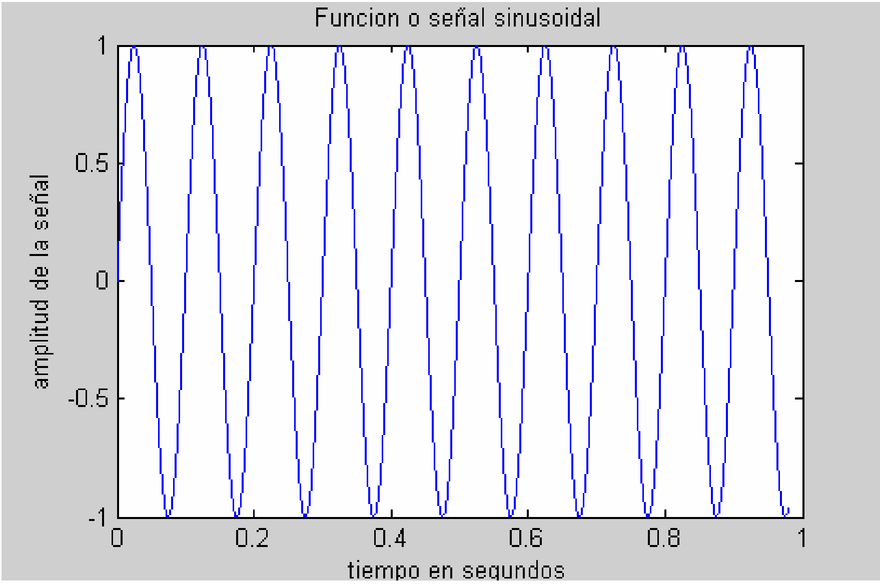
- **Señal**: Siempre está dada por una magnitud física
- **Modelo matemático de la señal**: Atendiendo a como varía la señal con el tiempo, en matemáticas se clasifican las señales en distintos grupos. Las señales se representan matemáticamente como funciones de una o más variables independientes.

No obstante, en general, se habla de señales aunque la magnitud que varía no sea una magnitud física. Por ejemplo, podemos hablar de señales refiriéndonos a la evolución de un índice de la bolsa (porcentaje) o de la evolución de la población con el tiempo.

Principales modelos matemáticos de las señales

El modelo matemático de una señal suele venir denominado por el tipo de función que la representa. Por ejemplo:





Como podemos observar, varían con el tiempo de forma muy diferente en un caso y en otro. Las funciones correspondientes son:

1. $y(t) = t$
2. $y(t) = \sin((2\pi ft))$

Como vemos, ambas señales están dibujadas frente al tiempo, es decir, indican la variación de una magnitud con el tiempo. Esto es lo que se denomina **representación en el dominio del tiempo**.

Es importante tener en cuenta que a la variable que representa nuestra magnitud se la denomina **variable dependiente**. Por otro lado, en este caso concreto, las señales dependen del tiempo, variable a la cual se la denomina **variable independiente**.

Otros tipos de señal son las exponenciales $y(t) = e^{a*t}$, exponenciales complejas $y(t) = e^{j\omega t}$

Parámetros de una señal

Los dos parámetros básicos que caracterizan a una señal en el dominio del tiempo son:

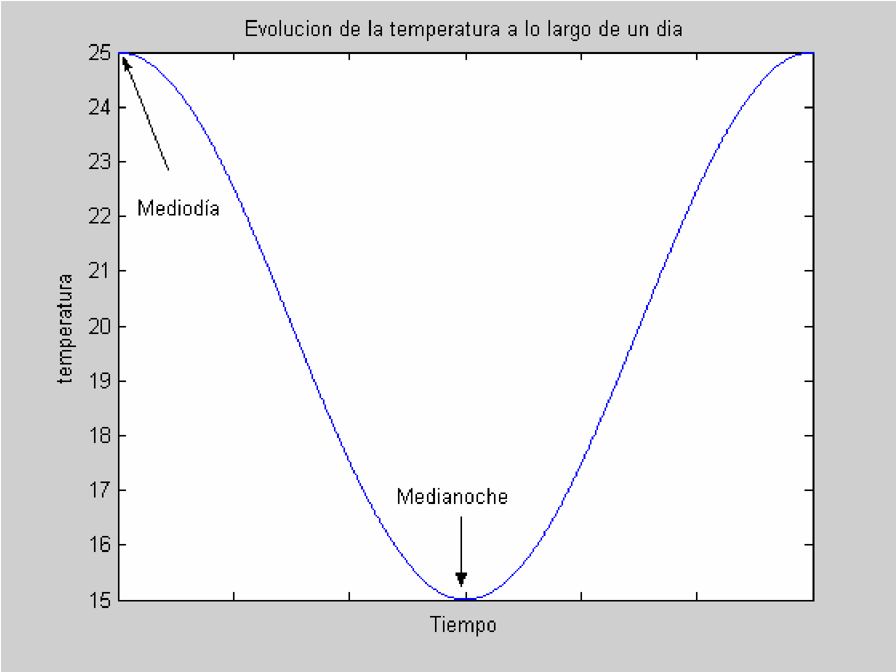
- **Amplitud**: Es el valor que toma la señal en cada instante de tiempo
- **Periodo**: Se dice que una señal es periódica si se repite cada cierto intervalo de tiempo. Se denomina periodo al tiempo T_0 tal que a partir de un tiempo dado, el valor de la señal se repite cada T_0 segundos. En términos matemáticos: Una señal es periódica si: $y(t) = y(t \pm mT_0) \quad \forall m \in N \quad y \quad -\infty < t < \infty$

Como podemos comprobar fácilmente, hablamos de que "la temperatura es muy alta" (tiene un valor grande de amplitud) o de que el primero de mes cobramos el sueldo (periodo de 30 días).

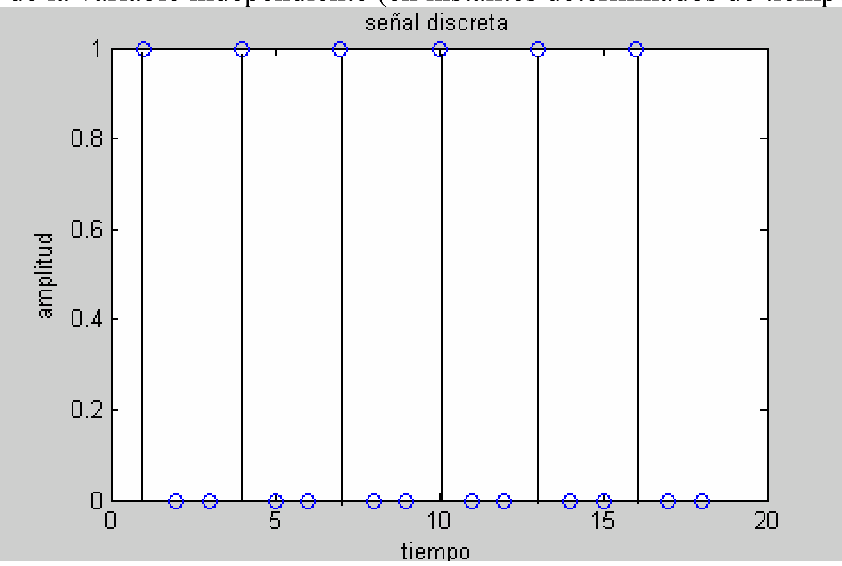
Tipos de señales

A partir de la variable independiente

1. Señales continuas: Se dice que una señal es continua si está definida en todo instante de tiempo. Por ejemplo, la temperatura. En cualquier instante del día la temperatura tiene un valor.



2. Señales discretas: Se dice que una señal es discreta si sólo está definida para valores determinados de la variable independiente (en instantes determinados de tiempo).

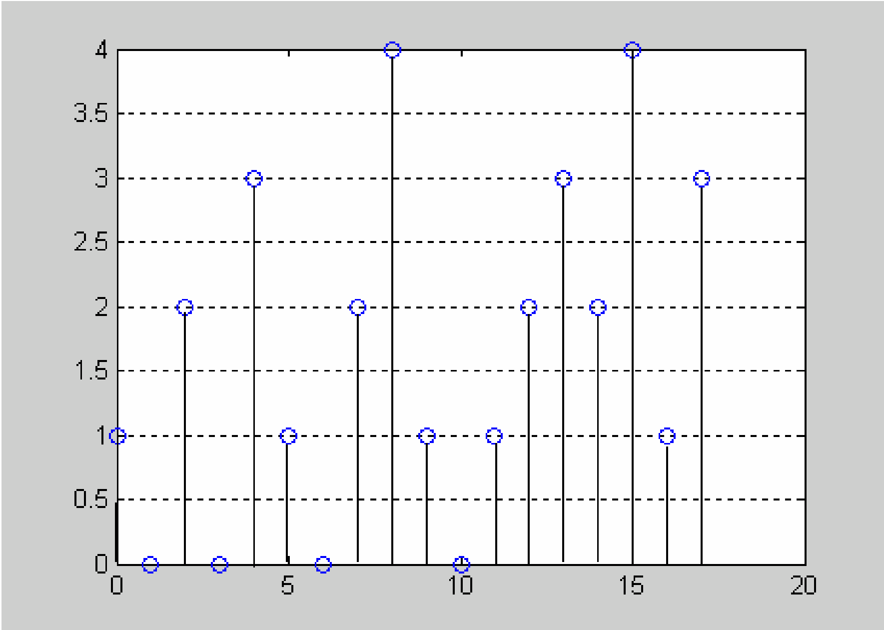


En este caso, la señal sólo está definida en aquellos instantes que hemos marcado con un círculo azul. Entre dos círculos azules no se sabe lo que pasa (la señal no está definida). Por ejemplo, conocemos el valor diario de las acciones de una determinada compañía en bolsa, pero a lo largo de un día determinado el valor de estas acciones puede haber cambiado mucho entre la apertura y el cierre de la sesión. Otro ejemplo sería la medida de la temperatura que se puede ver en los termómetros de las calles. La temperatura se mide cada minuto. Entre dos medidas podría ocurrir que la temperatura hubiera variado, pero no lo sabemos.

A partir de la variable dependiente

1) Se dice que una señal es **Analógica** si:
   a) La señal es continua.
   b) Su amplitud puede tomar cualquier valor.
2) Se dice que una señal es **Digital** si:
   a) La señal es discreta
   b) Su amplitud sólo puede tomar valores determinados.

Ejemplos del primer caso son todos los vistos hasta el momento. Veamos ahora un ejemplo de señal digital



Como podemos ver, la señal sólo toma valores de amplitud 0, 1, 2, 3 y 4. Sin embargo no toma ningún valor como 0,5 o 2,3. Por otro lado, esta señal sólo está definida para instantes determinados de tiempo.

Espectro

El concepto de espectro puede parecer muy alejado de la realidad. Sin embargo, veremos que forma parte de nuestra experiencia diaria.

Cuando miramos un objeto, identificamos rápidamente su color. Tenemos claro que existen diferentes colores y que todos se deben, según creemos, o bien al color que posee un objeto intrínsecamente[1] o bien al color de la luz que lo ilumina. Por otro lado parece cotidiano hablar de ondas de radio, televisión, Ultravioleta, infrarrojos, rayos X, etc. Todos aparentemente son fenómenos distintos. Hablamos de Ultravioleta cuando tomamos el sol y de rayos X cuando tenemos que pasar una radiografía. Sin embargo, el fenómeno subyacente es el mismo. Ondas electromagnéticas que oscilan con una determinada frecuencia:

- Los rayos X oscilan entre $3 \cdot 10^{20}$ y $3 \cdot 10^{16}$ Hz (ciclos por segundo)
- Los rayos UV entre $3 \cdot 10^{16}$ y $3 \cdot 10^{14}$ Hz
- El espectro visible (con todos sus colores) ocupa una región muy estrecha alrededor de $3 \cdot 10^{14}$ Hz
- El infrarrojo varía en frecuencias desde el visible hasta $3 \cdot 10^{11}$ Hz
- Entre $3 \cdot 10^{11}$ Hz y $3 \cdot 10^{4}$ Hz se encuentra la región de ondas de radio, incluyendo ondas milimétricas, centimétricas, decimétricas, ultracortas, ondas cortas, medias y largas.

Como podemos observar, fenómenos aparentemente distintos tienen una explicación única.

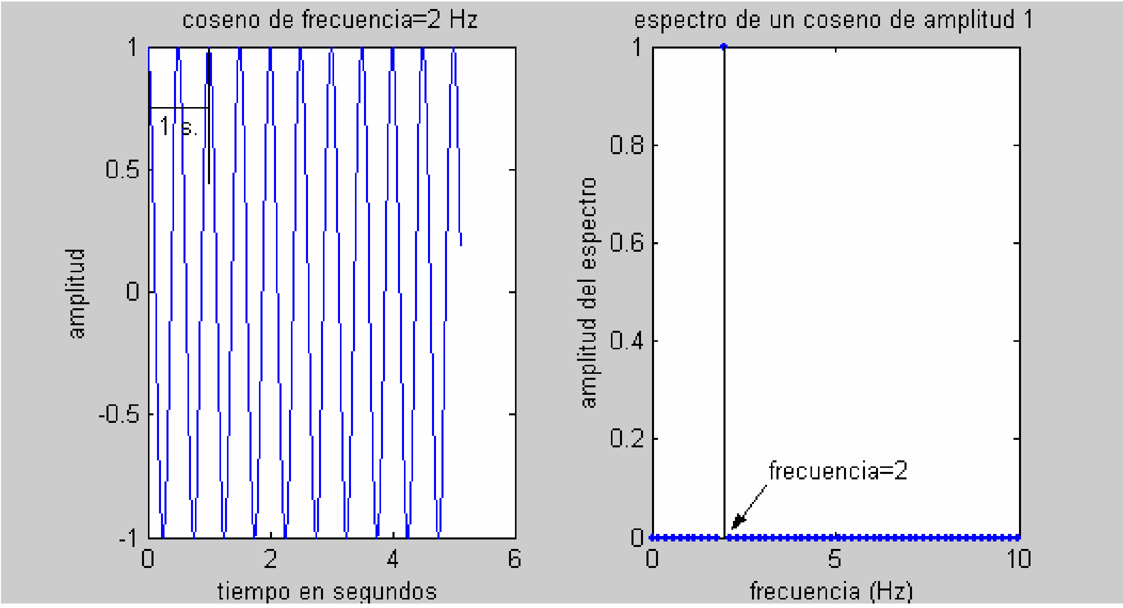
Las bases matemáticas para la estimación espectral moderna tienen sus orígenes en el siglo XVII con el trabajo de Newton. El observó que la luz del sol al pasar a través de un prisma era descompuesta en una banda de muchos colores. Descubrió que cada color representaba una frecuencia particular de la luz y que la luz blanca contenía todas las frecuencias. Newton (1671) introdujo la palabra **espectro** para describir a esta banda de colores.

Espectro en base de cosenos

¿Cuál es el concepto que se esconde detrás de la noción de espectro?. Veámoslo con un ejemplo.

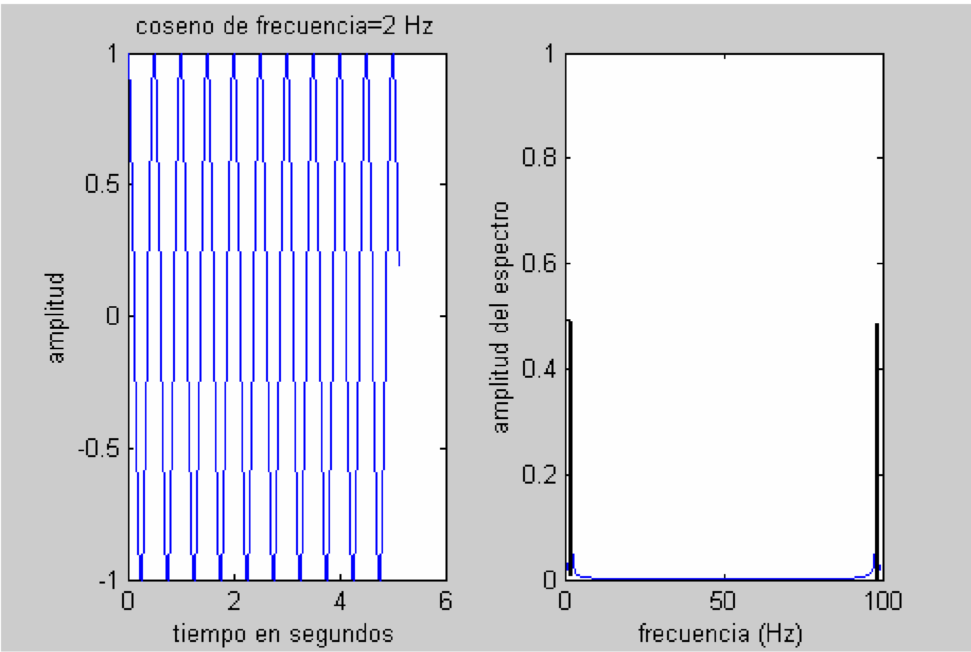
---

[1] En realidad, los objetos no poseen color intrínsecamente y siempre se debe a la luz que los ilumina, ya que el color de un objeto no es más que la luz que refleja.



Podemos observar en la figura de la derecha, que indica un coseno de amplitud 1 y frecuencia 2 Hz. Evidentemente, esta información es la misma que podemos apreciar en la figura de la izquierda, porque el coseno tiene amplitud 1 (oscila entre +1 y -1) y frecuencia de 2 Hz (cada segundo hay dos oscilaciones).

Espectro en base de exponenciales



Como podemos apreciar, el espectro tiene dos líneas. Una en 2 Hz y otra en 98 (equivalente a -2 Hz). Para comprender porqué es necesario recurrir a la conocida fórmula de Euler:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t}$$

Se puede ver que un coseno se descompone en dos exponenciales complejas, una positiva y otra negativa. Por tanto, el espectro tendrá ahora dos líneas por cada coseno. En realidad, sólo hace falta tener en cuenta la mitad del espectro (debido a su simetría), siempre que no olvidemos que la amplitud de una línea es necesario multiplicarla por dos para obtener la amplitud del coseno que representa.

Series y transformadas de Fourier

El ingeniero Francés Jean Baptiste Joseph Fourier aseguró que una función periódica x(t) puede ser representada como una suma de términos en seno y coseno.

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \cos(n2\pi f_0 t) - C_k \cdot \sin(2\pi n f_0 t)$$

$$A_k = B_k + jC_k$$

$$x(t) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n2\pi f_0 t + \theta_k)$$

Además obtuvo una representación para señales aperiódicas, no como una suma ponderada de sinusoides relacionadas armónicamente, sino como integrales ponderadas de sinusoides que no estaban relacionadas armónicamente. Cuatro matemáticos y científicos distinguidos fueron los encargados de examinar el artículo de Fourier en 1807. Tres de ellos, S. F. Lacroix, G. Monge y P. S. Laplace, estaban a favor de la publicación, pero el cuarto, J.L. Lagrange rechazó el uso de series trigonométricas debido a su creencia de que era imposible representar señales con esquinas (pendientes discontinuas) usando las mismas. En su Tesis Teoría Analítica del Calor (1822) extendió los resultados de la ecuación de ondas asegurando que una función arbitraria x(t) puede ser representada como una suma infinita de términos en seno y coseno. Por simplicidad, la escribiremos en términos de exponenciales complejas.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Los argumentos matemáticos de Fourier eran todavía imprecisos y fue P. L. Dirichlet en 1829 quien especificó las condiciones precisas bajo las cuales una señal periódica puede ser representada por una serie de Fourier. La formulación matemática de tomar una función x(t), o sus muestras, y determinar sus coeficientes Ak y Bk se conoce como análisis armónico, debido a la relación armónica entre los términos sinusoidales. A partir de la mitad del siglo XIX, empezaron a aparecer aplicaciones científicas prácticas que usaban el análisis armónico para estudiar datos fenomenológicos como:

- sonido
- clima
- flujo de los ríos
- manchas solares
- desviaciones magnéticas

Hasta el momento hemos hablado únicamente de series o transformadas referidas a funciones definidas de forma continua con la variable independiente. Sin embargo, también existen para funciones discretas. Es necesario tener en cuenta la siguiente tabla para saber la relación que hay que aplicar:

		Variable independiente	
Tipo de operación	**Periodicidad**	**Dominio tiempo**	**Dominio frecuencia**
Serie continua de Fourier	Periódica	Continua	Discreta
Transformada continua de Fourier	No periódica	Continua	Continua
Serie discreta de Fourier	Periódica	Discreta	Continua
Transformada discreta de Fourier	No periódica	Discreta	Discreta

Muestreo

Es posible que trabajemos con señales inherentemente discretas. Sin embargo, lo habitual es que tengamos una señal continua en el tiempo que queremos analizar y debamos obtener una representación discreta de la misma. La forma más normal de obtener una representación discreta de una señal continua se denomina **muestreo periódico**.

$$x[n] = x_c(nT_s) \qquad -\infty < n < \infty$$

Es decir, se toman valores de la señal en instantes de tiempo regularmente espaciados. T_s es el **periodo de muestreo** (tiempo entre dos muestras) y su inversa $f_s = 1/T_s$ se denomina **frecuencia de muestreo** (número de muestras por segundo).

A un sistema que realice esta operación se le denomina **Conversor Analógico Digital**.

La operación de muestreo no es generalmente reversible, ya que existen muchas señales continuas que pueden producir la misma salida de muestras discretas. Esta ambigüedad inherente en el proceso de muestreo es de capital importancia en el procesamiento de señales.

Es conveniente representar matemáticamente el muestreo en dos etapas.

1. Modulador de un tren de impulsos
2. Conversión del tren de impulsos a una serie

La señal moduladora es un tren de impulsos periódicos

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Donde $\delta(t)$ es la función impulso o delta de Dirac. Consecuentemente:

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

Si tomamos la transformada de Fourier de esta expresión se obtiene:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s)$$

* denota convolución.

Se puede ver a partir de la última ecuación que la transformada de Fourier de $X_s(t)$ consiste en copias repetidas periódicamente de la transformada de Fourier de $X_c(t)$. Es necesario que se cumpla la relación:

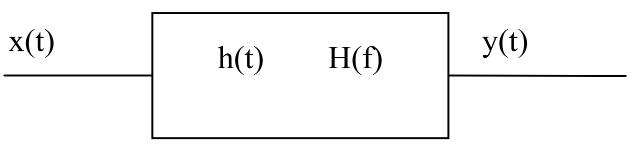
$$\Omega_s > 2\Omega_N$$

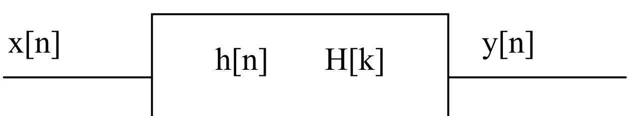
De esta manera, las réplicas no se solapan, al sumarse. Consecuentemente $X_c(t)$ se puede recuperar a partir de $X_s(t)$ con un filtro paso bajo ideal. Si la relación anterior no se cumple, entonces no es posible recuperar $X_c(t)$ a partir de. $X_s(t)$

Sistemas

Se puede definir un **sistema** como *cualquier operación que resulte en la transformación de señales*. Esto es, cuando una señal determinada pasa a través de un sistema, la señal que produce el sistema es una modificación de la señal de entrada. Como podemos observar no hemos asociado el concepto de sistema a ningún tipo de dispositivo físico, máquina, etc. El concepto es absolutamente general y nos permite hablar de: sistemas físicos, químicos, biológicos, económicos, etc.…

Por tanto, desde un punto de vista conceptual, podemos considerar a un sistema como una caja negra (no nos interesa como está compuesto) *que transforma una señal de entrada en una señal de salida*.





En la figura superior podemos ver un sistema continuo. Esto es, sus señales de entrada y salida son continuas. En la figura inferior podemos ver un sistema discreto, donde tanto las señales de entrada como de salida son continuas.

Los sistemas quedan descritos por una ecuación diferencial que relaciona la variable de la señal de entrada con la variable de la señal de salida. En el caso de sistemas discretos, quedan caracterizados por una ecuación en diferencias.

Propiedades de los sistemas

A continuación expondremos las principales propiedades de los sistemas.

Memoria

Se dice que un **sistema no tiene memoria** si la salida sólo depende del valor de la entrada en ese mismo instante de tiempo. Es decir:

$$y(t) = f(x(t))$$

Por ejemplo, en el caso de un sistema eléctrico $V(t) = RI(t)$

Por otro lado, un **sistema tiene memoria** si la salida depende del valor de la entrada hasta ese momento. Por ejemplo, en un sistema eléctrico $V(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(\lambda)d\lambda$

Linealidad

Un sistema es lineal si cumple el principio de superposición. Es decir, si conocemos la salida para dos señales de entrada determinadas y al sistema se le presenta una entrada que es combinación lineal de las entradas conocidas, su salida será la misma combinación lineal de las salidas para las entradas conocidas:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \rightarrow a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Desde un punto de vista práctico, nos ahorra tener que calcular la salida nuevamente cuando conocemos las salidas previas.

Un sistema es lineal cuando los coeficientes de la ecuación diferencial que lo representa son constantes o sólo dependen de la variable independiente.

Invarianza en el tiempo

Se dice que un sistema es invariante en el tiempo si un retardo en la señal de entrada produce el mismo retardo en la señal de salida. ***La consecuencia importante es que las propiedades del sistema no han cambiado durante ese retardo***, y por tanto, la señal de salida no depende de en qué instante se haya producido.

Desde un punto de vista matemático, un sistema es invariante en el tiempo si los coeficientes de su ecuación diferencial no dependen de la variable independiente.

Como ejemplos de sistemas claramente variables en el tiempo podemos citar el comportamiento de un automóvil de fórmula 1 (a medida que pasa el tiempo pesa menos por el combustible usado y los neumáticos están más gastados, por lo que una maniobra hecha un tiempo antes puede dar resultados distintos a la misma maniobra hecha un tiempo más tarde). También podemos hablar de una nave espacial en el despegue.

Estabilidad

Se dice que un sistema es estable si ante una entrada pequeña responde con una salida pequeña. La mayoría de los sistemas diseñados por el hombre son estables (en su región de trabajo). Por ejemplo, si el volumen del amplificador es poco, los altavoces sonarán muy bajo. Por otro lado, un sistema es inestable si ante una entrada pequeña responde con una salida muy grande. Por ejemplo, si una planta nuclear se desvía ligeramente de su temperatura de trabajo es muy posible que el reactor siga calentándose sin control, como ocurrió en el célebre caso de Chernobyl.

Sistemas Lineales e Invariantes en el tiempo

Una clase especialmente importante de los sistemas es la de aquellos que son lineales e invariantes en el tiempo. La combinación de estas dos propiedades nos lleva a una representación especialmente conveniente de estos sistemas. La única manera de compatibilizar ambas propiedades es que ***la ecuación diferencial que define el sistema sea de coeficientes constantes***. Desde un punto de vista matemático, la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales está ampliamente estudiada y existen múltiples métodos para resolverlas. Si el sistema es variable en el tiempo, la solución se complica, pero existen métodos relativamente estándar. Sin embargo, si el sistema es no lineal, no existe un método estándar para resolver estas ecuaciones, sino que cada problema se soluciona de forma diferente.

Caracterización de sistemas LTI

Recordemos que un sistema se definía a partir de las señales de entrada y salida. Pero, ¿Cuál es la relación entre ellas?. A continuación mostraremos las tres formas más habituales de caracterizar los sistemas a partir de dicha relación entre la señal de entrada y la de salida. Básicamente podemos decir que un sistema queda caracterizado por la operación de convolución:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

Donde $h[m]$ es la respuesta a $\delta[m]$.Veámoslo en más detalle.

.Función respuesta al impulso

Una serie x[n] se puede expresar como una superposición de impulsos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Sea $h_k[n]$ la respuesta del sistema a $\delta[n-k]$, (un impulso en n=k). Si definimos a nuestro sistema por el operador $T\{\ \}$, entonces la salida será la aplicación del operador sobre la entrada:

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

Utilizando el principio de superposición, esta expresión se transforma en:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Lo cual significa que la respuesta del sistema a cualquier entrada se puede expresar en términos de la respuesta del sistema a $\delta[n-k]$. Este sería el resultado si solo se impusiera la condición de linealidad, y $h_k[n]$ dependería de n y de k. La propiedad de invarianza en el tiempo implica que si $\delta[n]\xrightarrow{T}h[n]$, entonces $\delta[n-k]\xrightarrow{T}h[n-k]$. Con esta restricción adicional, la ecuación se transforma en:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

Como consecuencia, la respuesta de un sistema LTI queda caracterizada completamente por su respuesta al impulso, en el sentido de que dada $h[n]$, es posible calcular la salida $y[n]$ debida a cualquier entrada $x[n]$.

Función de Transferencia

Hasta ahora hemos hablado de la caracterización de sistemas LTI en el dominio del tiempo. Teniendo en cuenta a Fourier, cualquier señal puede ser expresada como una suma (o integral) de exponenciales complejas. Veamos lo que ocurre cuando analizamos la respuesta del sistema a una exponencial compleja.

Sea la señal de entrada $x[n]=e^{j\omega n} \qquad -\infty < n < \infty$

A partir de la ecuación que define la suma de convolución se obtiene:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{j\omega(n-k)}=e^{j\omega n}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right)$$

Si definimos:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}$$

Obtenemos

$$y[n]=H\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega n}$$

Por tanto, $e^{j\omega n}$ es una *autofunción del sistema y el autovalor* asociado es $H\left(e^{j\omega}\right)$. Éste describe el cambio en la amplitud compleja de una exponencial compleja en función de la frecuencia ω y se denomina **respuesta en frecuencia del sistema o función de transferencia**.

MÉTODOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS EN EL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

A continuación haremos un repaso a las diferentes herramientas matemáticas que se utilizan en procesamiento de señales. No se discutirá cada uno de los métodos en detalle, ya que ello precisaría una extensión mucho mayor tanto en tiempo como en tamaño de este documento.

HERRAMIENTAS GENERALES

En este epígrafe se comentarán aquellos conceptos de carácter general que son necesarios para posteriormente poder realizar cualquier operación.

Cálculo complejo. Integrales en el campo complejo. Integración por fracciones parciales

Es importante tener en cuenta que, aunque las señales que queremos analizar son generalmente reales (siempre, en el caso de la ingeniería) la transformada de Fourier de las mismas es compleja. Por tanto, es necesario dominar el cálculo en el dominio complejo. Las operaciones básicas desde el punto de vista del procesamiento de señales son la multiplicación y la convolución. Por otro lado, para pasar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo es necesario antitransformar la señal, lo cual requiere resolver la integral de un producto en el campo complejo. Esta integral suele ser relativamente complicada de resolver. De manera que se ha aprovechado el método de las fracciones simples para resolver esta integral con carácter general. Es decir, los pasos que seguiría un ingeniero son:

1. Obtención de las señales a analizar
2. Transformación al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier
3. Operación en el dominio de la frecuencia (multiplicación o convolución).
4. Transformación al dominio del tiempo antitransformando las señales resultante

mediante el método de las fracciones simples.

Series. Convergencia de series. Series temporales.

Toda señal discreta se puede considerar como una serie. Por tanto, los métodos de cálculo relativos a las series son de aplicación al estudio de las señales discretas. En particular, en procesamiento de señales se suele utilizar como base las señales sinusoidales o las exponenciales complejas. Esto nos lleva al desarrollo en serie de Fourier. Los criterios de convergencia, tanto de las series como de las transformadas fueron establecidos por Paul Dirichlet y son:

1. La señal debe ser absolutamente sumable
2. Debe tener un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito
3. Debe tener un número finito de discontinuidades, que a su vez deben ser finitas, en cualquier intervalo finito.

No obstante, desde el punto de vista ingenieril, se hace el siguiente razonamiento:

- ***Todas las señales que existen físicamente, cumplen las tres condiciones de Dirichlet.***

Como en ingeniería se suele trabajar con señales reales, registradas o generadas por algún dispositivo determinado, no es necesario comprobar que cumplen los criterios de convergencia. Analicemos este razonamiento. Cualquier dispositivo físico que produzca una señal consume energía y por tanto producirá una señal con una energía finita (incluso la energía de un terremoto es finita), luego cumplirá el primer criterio. Ningún aparato es capaz de producir una señal con un número infinito de máximos o mínimos o de discontinuidades. Por tanto se cumplirán las otras dos propiedades. Señales como el arco tangente no tendrán transformada de Fourier, pero tampoco son generadas en ninguna situación real.

Ecuaciones diferenciales y en diferencia. Aplicación a sistemas. Función de transferencia.

La principal relación de las ecuaciones diferenciales consiste en el hecho de que todo sistema físico viene representado por una ecuación diferencial. Como un sistema viene dado por la relación entre la señal de entrada y la de salida, esta descripción es muy adecuada. A partir de este concepto se llega al de función de transferencia o respuesta en frecuencia del sistema.

Es decir, todos los sistemas quedan caracterizados por una ecuación diferencial o en diferencia que hay que resolver. En lugar de abordarlas por métodos clásicos de matemáticas, la solución preferida es la de aplicar alguna transformación integral que simplifique los operadores involucrados (una derivada se transforma en un producto). Las más habituales son la Transformada de Laplace, la Transformada Z y la Transformada de Fourier. Una vez resuelta la ecuación en el dominio transformado, es necesario antitransformar dicha solución para obtener el resultado en el dominio del tiempo.

MÉTODOS NUMÉRICOS.

Integración numérica.

Es evidente que si trabajamos con sistemas discretos las integrales deben ser calculadas de forma numérica. Por tanto, una parte muy importante de los programas que realicen estos cálculos consiste en tener implementadas rutinas de integración numéricas.

Interpolación

En primer lugar, ¿Qué se entiende por interpolación?. Cuando muestreamos una señal analógica producimos una señal discreta con una determinada frecuencia de muestreo. Puede ocurrir en algunos casos que deseáramos haber muestreado con una frecuencia de muestreo superior. Es decir, disponer de más muestras por unidad de tiempo. Esto se puede conseguir insertando muestras nuevas entre las muestras ya tomadas. Pero, ¿Qué valor deben tener estas muestras?. El valor que deben tomar debe obtenerse a partir de un polinomio que involucre las muestras más cercanas. El caso más simple consiste en suponer una línea recta entre las dos muestras antiguas y obtener el valor que corresponda a la nueva muestra intermedia.

Un uso muy común de la interpolación se da en imágenes. Habitualmente tenemos una serie de medidas sobre una superficie con un espaciado relativamente grande entre ellas y deseamos generar un dibujo de dicha superficie con una resolución mucho más fina. Por tanto, deben añadirse muestras entre los puntos que tenían los valores medidos inicialmente.

Es necesario tener en cuenta que la interpolación polinomial no es el único método para llevar a cabo dicha tarea. Los métodos más actuales tienen en cuenta no sólo el valor de los puntos sobre la curva, sino también el de sus derivadas y así se obtiene la interpolación por splines (que vienen a representar trozos de superficie).

Búsqueda de raices (polos de función de transferencia).

Una vez que se ha obtenido la función de transferencia o respuesta en frecuencia de un sistema es necesario calcular las raíces del denominador, ya que su posición dará información sobre las características del sistema (rapidez en la respuesta, estabilidad, etc.). Por otro lado, es imprescindible para poder realizar la transformación inversa por fracciones simples. Por tanto, las rutinas para obtener las raíces de un polinomio de cualquier grado son muy apreciadas.

Algoritmos óptimos para el cálculo de la dft (fft, split radix,...)

Hemos hablado anteriormente sobre la transformada de Fourier. Ahora bien, la transformada discreta de Fourier tiene una complejidad algorítmica proporcional a N^2. Es decir, a medida que aumenta el número de puntos, aumenta mucho más deprisa la cantidad de operaciones a realizar. Para ello se han diseñado una serie de algoritmos numéricos tendentes a mejorar esta relación.

El más conocido es el de la FFT (Fast Fourier Transform) o Transformada rápida de Fourier. Éste tiene una complejidad algorítmica proporcional a $\frac{N}{2}\log_2(N)$. Haciendo una comparación muy simple podemos observar que para una transformada de 8 puntos, el algoritmo de la DFT requiere 64 operaciones, mientras que el de la FFT sólo 12.

El algoritmo split radix complica un poco el algoritmo de la FFT a costa de una mayor reducción en el número de operaciones. De hecho es el algoritmo óptimo (demostrado matemáticamente hasta 16 puntos).

Existen otros algoritmos para dicho cálculo pero no vamos a detallarlos en la presente exposición.

ÁLGEBRA LINEAL

Son muchas las técnicas procedentes del álgebra lineal que se utilizan en el procesamiento de señales. Particularmente, hay que decir que el problema siempre se presenta de forma matricial. Una señal con un número determinado de puntos se representa por un vector y la relación entre el vector de entrada y el de salida utiliza cálculos matriciales. Casi todos los programas importantes en el procesamiento de señales tienen implementada algún tipo de librerías para la resolución de problemas matriciales.

TRANSFORMADAS INTEGRALES y DISTRIBUCIONES.

Hemos hablado anteriormente acerca de la Transformada y Series de Fourier. Éstas constituyen una transformación que nos permite pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Sin embargo, no son las únicas.

Transformada De Laplace

Desde el punto de vista de la Automática y del Control de Sistemas Analógicos la transformación integral más importante es la Transformada de Laplace, cuya fórmula es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Donde s es una variable compleja con la forma $s = \sigma + j\omega$. La parte real (σ), representa el amortiguamiento de la señal. Es decir, si la señal crece o decrece con el tiempo (valores mayor que cero significan que la señal aumenta, menor que cero que la señal se amortigua e iguales a cero que la amplitud de la señal se mantiene en el tiempo). Por otro lado, la parte imaginaria representa el eje de Frecuencias. Es decir, si la señal oscila más o menos.

Por tanto, nos da una información bastante completa sobre el comportamiento de un sistema

Transformada Z

Cuando se trabaja en sistemas discretos, la transformada a utilizar es la transformada Z, que viene dada por la expresión:

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = X(z)$$

La variable z se suele expresar en coordenadas polares como $z = r \cdot e^{j\omega}$

Existe una relación entre la transformada de Laplace y la transformada Z. El módulo de la transformada representa el amortiguamiento de la señal. Valores del módulo menores que la unidad indican que la señal se amortigua con el tiempo, si son mayores que la unidad la señal se amplifica y si el valor es la unidad significa que la amplitud de la señal se mantiene en el tiempo. Por otro lado, la fase de la transformada Z indica la frecuencia de oscilación de la señal.

Transformada de Fourier.

Recordemos que la expresión de la transformada de Fourier es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Si la comparamos con la ecuación que define la transformada de Laplace, podemos ver que son casi idénticas. De hecho, la transformada de Fourier corresponde a la evaluación de la transformada de Laplace sobre el eje imaginario.

Por otro lado, la transformada de Fourier de una serie es:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Como podemos comprobar es prácticamente idéntica a la de la transformada Z. De hecho, la transformada de Fourier corresponde a muestras uniformemente espaciadas de la transformada Z sobre el círculo unitario.

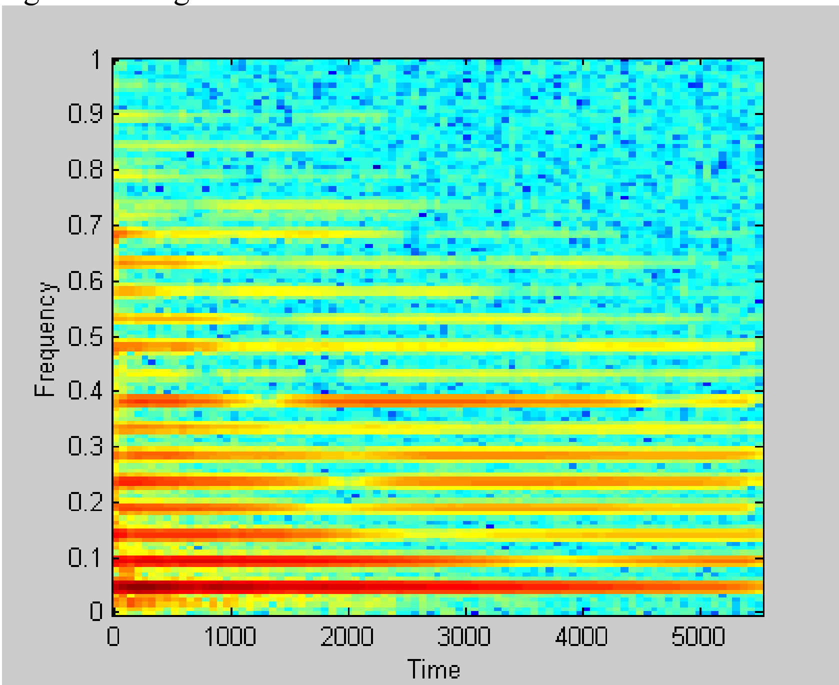
Análisis Tiempo-Frecuencia

Si representamos una señal en el dominio del tiempo podemos tener una información muy detallada de cómo cambia con el tiempo. Si llevamos a cabo una representación en el dominio de la frecuencia podemos averiguar que frecuencias están presentes en la misma. Sin embargo, no podemos indicar en que momento apareció o desapareció la contribución de una determinada componente en frecuencia. Para ello se utiliza lo que se conoce como representaciones tiempo frecuencia. Es decir, queremos conseguir información simultánea de lo que ocurre en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Para ello debemos introducir la noción de **ventana**. Una ventana no es más que una función que aplicada sobre otra restringe su tamaño, de igual forma que una ventana sólo nos deja ver una parte del mundo que existe al otro lado de la pared.

Mediante la apliación de ventanas podemos dividir nuestra señal original en múltiples pedazos. Si aplicamos alguna transformación integral a cada uno de estos pedazos obtendremos su representación en el otro dominio. Al unirlos todos tendremos una imagen que nos da, para cada segmento de tiempo la representación espectral de la señal.

Transformada Corta de Fourier

Si aplicamos la transformada de Fourier a cada uno de los segmentos resultantes de aplicar la ventana obtenemos la siguiente imagen.



En esta figura podemos observar las diferentes componentes de frecuencia de una nota musical (un do de piano) y como las de mayor frecuencia se extinguen antes que las de frecuencias más bajas.

Transformada Wavelet

Otra posibilidad consiste en aplicar la siguiente transformación

$$TWC_x^{\gamma}(t,f)=\int_{t'} x(t')\sqrt{\frac{f}{f_0}}\gamma\left[\frac{f}{f_0}(t-t')\right]dt'$$

donde $\gamma(t)$ es la wavelet. Se trata de una función real o compleja, siendo la respuesta al impulso de un filtro pasabanda. Esta función está centrada entorno a t=0. El parámetro f_0 es la frecuencia central del filtro pasabanda. Esta transformada es, en origen, una representación tiempo escala (un punto de la representación es un coeficiente de un desarrollo (continuo o en serie) de una familia de funciones de soporte compacto), donde el parámetro escala viene dado por el cociente $\frac{f_0}{f}$. Para la representación tiempo-frecuencia debemos asumir que la TF de $\gamma(t)$ está concentrada entorno a f_0.

La representación tiempo frecuencia con la TF tiene dos problemas:

1. No se puede incrementar la resolución frecuencial y temporal de manera simultánea. Si tomamos más puntos en cada ventana, para tener una mejor resolución frecuencial, disminuye la resolución temporal. Por tanto, la elección del tamaño de la ventana es siempre una cuestión de compromiso.
2. El tamaño de la ventana es el mismo para cualquier frecuencia, por lo que se tiene la misma resolución temporal a frecuencias altas que bajas.

La utilización de la representación tiempo-frecuencia con la TW no puede evitar el problema número 1, pero mejora a la TF en cuanto que a altas frecuencias tiene mejor resolución temporal y a bajas frecuencias mejor resolución frecuencial.

APLICACIONES DEL PROCESAMIENTO DE SEÑALES

Sonido

En sonido podemos encontrar las siguientes aplicaciones:

Síntesis

La palabra **sintetizador** viene de síntesis (Composición de un todo por reunión de unas partes). De hecho la ecuación que devuelve la señal original en función de los coeficientes transformados se denomina **Ecuación de síntesis**. Podemos analizar una nota musical aplicandole la **ecuación de análisis** de la transformada de Fourier y obtener las amplitudes y frecuencias de los cosenos que la componen. Una vez hecho esto, podemos sumar dichos cosenos mediante la ecuación de síntesis y obtener la señal original o una representación muy parecida de la misma.

Existen varios métodos de síntesis:

1. Síntesis aditiva de Fourier: Consiste en sumar señales sinusoidales para generar una señal aproximadamente igual a la nota musical o sonido que se quiere representar. El resultado puede ser bastante exacto, pero para ello se requieren un gran número de componentes y por lo tanto precisa una gran cantidad de memoria, lo que la hace difícil para implementar en dispositivos.
2. Síntesis substractiva: En este caso la aproximación es algo diferente. En primer lugar se genera un ruido que cubra un gran ancho de banda. A continuación se aplica un filtro (que se ha tenido que diseñar previamente) y que elimine las componentes de frecuencias que no deben estar en la señal. El resultado suele ser bastante más realista que el de la síntesis aditiva, ya que generalmente las componentes individuales del sonido rara vez suelen ser sinusoides puros y sí un grupo de sinusoides muy cercanas en frecuencia.
3. Síntesis FM: Aplicando la modulación en frecuencia se puede generar un espectro muy complejo a partir de únicamente dos o tres sinusoides. El problema está en encontrar qué parámetros deben tener éstas (y los parámetros de conexión entre ellas) para que se generen los armónicos desados. Éste es un método muy bueno para generar sonidos de efectos especiales e imitar el sonido de instrumentos "de metal". Sin embargo, su calidad empeora notablemente para imitar otros tipos de instrumentos.

Voz

Una técnica que ha avanzado muchísimo es la del reconocimiento de voz. Hoy en día ya es posible realizar consultas bancarias, siendo atendido por un programa que reconoce lo que hablamos y actúa en consecuencia. El proceso de reconocimiento de voz es bastante complejo y tiene múltiples etapas. Por ello nos quedaremos sólo con su primera fase: La separación de partes habladas (voiced) y silencios (unvoiced), ya que los algoritmos deben aplicarse sólo a aquellas partes que contengan algún mensaje.

Básicamente la idea es, aplicando la TCF, estudiar la evolución de la energía de la señal. En primer lugar se selecciona un umbral muy alto, tanto que cualquier señal que lo sobrepase sea con toda seguridad voz (y no ruido). El corte con la curva de energía nos da dos puntos iniciales de inicio y fin de palabra. Sin embargo, no son definitivos. Se selecciona un segundo umbral mucho más cercano al nivel de ruido, de forma que el tamaño de la palabra se extiende hacia la derecha y hacia la izquierda desde el primer umbral hasta el segundo. A veces es necesario tener en cuenta la influencia del ZCR (frecuencia) para poder detectar correctamente sonidos como las fricativas.

Utilizando esta técnica se ha podido desarrollar un programa que determina el inicio y fin de cada sílaba, así como la duración de cada palabra para su aplicación a la ayuda de estudiantes disléxicos. Éste trabajo ha sido publicado en congresos internacionales como [7] y [8].

También se ha llevado a cabo un pequeño reconocedor del habla para un diccionario pequeño sin identificación del hablante [PFC-1].

Señales biomédicas

El procesamiento de señales tiene una gran importancia en medicina. Está presente en las más modernas técnicas (TAC, escaner, etc..) para construir imágenes tridimensionales a partir de imágenes bidimensionales.

También se utiliza el procesamiento de imágenes para su aplicación al estudio de imágenes de microscopio electrónico (estudio de células, etc).

Una de las primeras áreas en las que se comenzó a utilizar el procesamiento de señales fue en su aplicación al estudio de señales biomédicas (EEG, ECG, etc.). Veremos a continuación algunos aspectos del estudio del EEG.

EEG

En primer lugar, es necesario registrar la señal digitalmente. Por tanto no son válidos los viejos registros en papel. En su lugar, hoy en día, los electroencefalógrafos digitales han desplazado completamente a los analógicos.

El primer aspecto a tener en cuenta es que permiten representar la señal en diferentes escalas y diferentes regiones a voluntad. La aplicación de algunos métodos matemáticos como la TCF permiten ver las frecuencias activas en cada instante de tiempo. Por otro lado, se puede estudiar la evolución de bandas de frecuencia (regiones de varios Hz de ancho). Algunas publicaciones del autor sobre este tema se pueden ver en [1], [2], [3], [4], [5], [6].

En esta universidad se han desarrollado algunos programas para el análisis y visualización del EEG, tutorizados por el autor como [PFD-1]

Por otro lado, aplicando métodos de interpolación se puede obtener muy facilmente una imagen de la distribución de un determinado parámetro sobre todo el cuero cabelludo a partir de los valores registrados en cada uno de los electrodos. Esto se ha implementado a través de un proyecto fin de carrerra [PFC-2].

Estos estudios han dado lugar

Los programas de estos proyectos (y algunos otros no citados en el presente trabajo) se han implementado en el Departamento de Neurofisiología del Hospital Universitario Nuestra Señora de la Candelaria. Por último se han añadido algunas referencias bibliográficas sobre las bases del procesamiento de señales y audio digital y enlaces a algunas páginas sobre EEG.

REFERENCIAS

[1] Mañas, J. L. Sánchez, L. Moreno, J.D. Piñeiro, R. M. Aguilar, J.J. Merino, J. Sigut and A. Hamilton ,“Discriminación de niveles de Maduración Cerebral mediante la cuantificación del Electroencefalograma”, Archivos de Pediatría, Vol. 47, N. 6,páginas: 316-324, 1996

[2] S. Mañas, J.L. Sánchez, L. Moreno, J.D. Piñeiro, R. Aguilar, J.J. Merino, J. Sigut, ”La aplicación conjunta del potencial evocado y el electroencefalograma mejora la discriminación de la maduración cerebral”, Revista de Neurología, Vol. 25, N. 144, pps: 1181-1186, 1997

[3] J.L. Sánchez, S. Mañas, L. Moreno, J.D. Piñeiro, R. Aguilar, J.J. Merino, J. Sigut, A. Hamilton, L. Acosta, ”Estudio de la Maduración Cerebral mediante el análisis cuantitativo del electroencefalograma”, Revista de Neurología, Vol. 25, N. 146, pps: 1529-1534, 1997

[4] L. Moreno, J.L. Sánchez, L. Acosta and G. Vera, “A software package for Signal Processing: application to EEG Signals”, MICRO-90. International Society for Mini and Microcomputers, Proceedings of the ISMM International Conference, MICRO’90, ACTA PRESS, 1990, ISBN 0-88986-148-X, Montreal, Canadá, 1990

[5] L.Moreno, J. L. Sánchez, S. Mañas, J.D. Piñeiro, L. Acosta, J.L. Ichaso, “Análisis multivariante del EEG en el estudio de la Maduración Cerebral”, IV Reunión de la Sociedad Canaria de Neurociencias, Tenerife, 1991

[6] L. Moreno, J.L. Sánchez, L. Acosta, J.D. Piñeiro, J.L. Ichaso and S. Mañas, " Multichannel Digital Processing for EEG Analysis", Chairman de la sesión nº 4 y ponente, Circuits and Systems 91. IASTED, Proceedings of the IASTED International Symposium CS'91, ACTA PRESS, 1991, ISBN 0-88986-149-8, Kongresshauss Zurich, Suiza, 1991

[7] Sánchez, J., Estévez, J., Moreno, L., Sigut, J., Muñoz, V., Aguilar, R., Merino, C., "Using speech processing in a tutorial system for dyslexic readers", 4th WSEAS International Conference on AUTOMATION & INFORMATION (ICAI'03), WSEAS Transactions on computers, April 2004, ISSN: 1109-2750, Tenerife, Diciembre 2003

[8] Autores: Moreno, L. González, C., Sánchez, J., Muñoz, V., Estévez, I., Aguilar, R., Sigut, J., "Intelligent system to asses and treat developmental dyslexia in spanish language", Fourth International ICSC Symposium onENGINEERING OF INTELLIGENT SYSTEMS (EIS 2004), Madeira, Portugal, Marzo 2004.

PROYECTOS FIN DE DIPLOMATURA

[PFD-1] Desarrollo e implementación de un programa para la caracterización de señales por métodos paramétricos y no paramétricos, Pedro Miguel González Rodríguez y Jose Carlos Rodríguez Palmero, Tutor: José Luis Sánchez de la Rosa, 1993

PROYECTOS FIN DE CARRERA

[PFC-1] Reconocimiento automático del habla, Jorge Pedro Quesada González y Emilio Valencia Rodríguez, Tutor: José Luis Sánchez de la Rosa, 1998

[PFC-2] Desarrollo de una aplicación para la representación del mapa topográfico cerebral tridimensional en tiempo real., Daniel McNamara y Jorge Pestano, 2004.

TESIS DOCTORALES

[TD-1] Métodos para el Procesamiento y Análisis Estadístico Multivariante de Señales Multicanal: Aplicación al Estudio del EEG, José Luis Sánchez de la Rosa, 1993.

[TD-2] Diagnóstico de la maduración cerebral mediante técnicas de análisis computerizado y estadístico del EEG y Potenciales Evocados. 1994

BIBLIOGRAFÍA

[1] *Señales y Sistemas* ; A.V. Oppenheim, A. Willsky; Prentice-Hall, 970-17-0116-X, 1995.

[2] Tratamiento de señales en tiempo discreto, A. V. Oppenheim, Prentice may, 2ª ed., 84-205-2987-7

[3] Principios de Audio digital, Pohlman, McGraw Hill, 84-481-3625-X

ENLACES

[1] http://www.digital-eeg.com/

[2] http://www.selectorweb.com/emg_eeg.html

[3] http://www.eegspectrum.com/