

CURSOS UNIVERSITARIOS INTERDISCIPLINARES

Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas (4 de noviembre de 2004)

“La Matemática en la Heliosismología”

Clara Régulo Rodríguez, crr@iac.es

En esta charla, siguiendo con la aplicación de las matemáticas a distintas disciplinas, vamos a hablar de algunas técnicas matemáticas utilizadas en Astrofísica y, más concretamente, en Heliosismología.

Las técnicas utilizadas de las que vamos a hablar en esta charla son:

- La Transformada de Fourier con ventanas y filtros
- Transformadas Wavelets
- Transformación Homomórfica o Deconvolución Homomórfica

Veremos cómo todas estas técnicas matemáticas nos van a permitir, a través del análisis de nuestra señal (que definiremos más adelante), dar un paso más en el conocimiento de las estrellas y, con ello, dar un paso más en el conocimiento del Universo.

Comenzaremos situándonos en el marco adecuado para entender, no sólo estas técnicas matemáticas sino, especialmente, el por qué de estas técnicas y el por qué de la necesidad de llegar al grado de detalle y precisión que dichas técnicas nos proporcionan.

Empezaremos por lo más general, definiendo qué es la Astrofísica y, dentro de ella, qué se entiende por Heliosismología.

La Astrofísica estudia, como su nombre indica, la física de los objetos celestes, de los astros. Y este estudio se realiza a partir del análisis de la luz que nos llega de estos objetos, básicamente la luz que nos llega de las estrellas. Pero esta luz llega sólo de la superficie de nuestras estrellas; para estudiar el interior tenemos que recurrir a modelos físico-matemáticos o bien a la Heliosismología. Y ¿qué es la heliosismología?, la heliosismología se basa en la observación y análisis de las ondas que se propagan en el interior del Sol para obtener información de su estructura interna. En la figura 1 vemos un dibujo de distintos tipos de ondas acústicas atrapadas en el interior del Sol y que son observables en su superficie a partir de los pequeños movimientos que producen en la superficie del Sol.

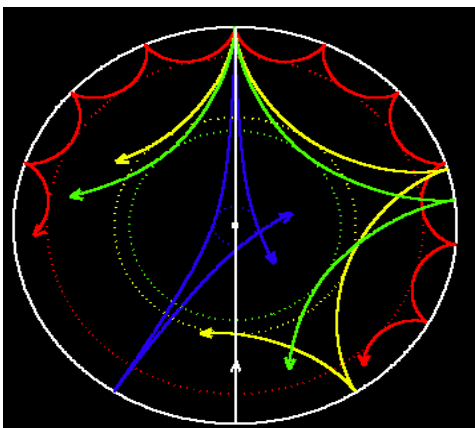


Figura 1

Dibujo de distintas ondas acústicas en el interior del Sol.

Con la heliosismología estudiamos una única estrella, el Sol. El Sol es una estrella típica, con la enorme ventaja de estar muy cerca de nosotros, por lo que podemos estudiarla en detalle. En la mayor parte de esta charla nos centraremos en el análisis de datos solares que, al final, generalizaremos para otras estrellas.

En el interior del Sol se generan ondas de sonido en su zona externa convectiva, donde existen movimientos de materia. El tipo de ondas que se generan, así como las características de las ondas que son capaces de propagarse en el interior de un objeto, dependen de las características físicas de ese objeto, de su forma, composición química, densidad, etc, por eso, su estudio nos permite obtener conocimiento de muchos parámetros físicos del objeto en el que se propagan.

Las ondas que se propagan en el interior del Sol producen pequeñísimos movimientos en la atmósfera solar que son medibles, observables, desde la Tierra. La superficie del Sol, para una de estas ondas, se vería tal y como aparece en la figura 2, donde las zonas azules serían zonas que se acercan a nosotros y las rojas zonas que se alejan. En el Sol existen miles de estas ondas a partir de cuyas frecuencias podremos extraer información de muchos parámetros físicos de su interior.

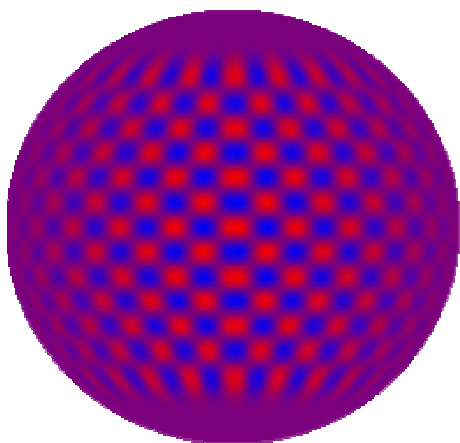


Figura 2

Aspecto que presentaría la superficie solar como consecuencia de la existencia de ondas estacionarias en su interior.

Nuestro objetivo va a ser medir esta señal: las pequeñas variaciones de la atmósfera solar producidas por ondas atrapadas en su interior. Queremos extraer de ella la mayor cantidad de información posible, que en nuestro caso se concreta en extraer la mayor cantidad posible de frecuencias (las frecuencias de las ondas que configuran nuestra señal) y obtenerlas con gran precisión. Esta información nos va a permitir contrastar los modelos físicos que existen para el Sol y profundizar en su conocimiento. Es la única forma que se tiene de observar, aunque sea de forma indirecta, el interior del Sol y, por extensión de otras estrellas.

Ya sabemos lo que estamos buscando, pero antes de entrar a describir las técnicas matemáticas que nos van a permitir extraer esta información buscada, vamos a comentar cómo se ha obtenido la señal que vamos a analizar.

Los datos que vamos a analizar se han tomado con el satélite espacial SOHO (The Solar and Heliospheric Observatory) que se lanzó en diciembre de 1995 y está operativo desde abril de 1996. El Sol se observa como si fuera una estrella, es decir, se observa su luz integral y lo que se tiene es una señal temporal que nos da cuenta de las pequeñas deformaciones de la superficie solar frente al tiempo, en intensidad o

en velocidad (efecto Doppler). Esta señal temporal tiene el aspecto de la figura 3 y está formada por la suma de cientos de ondas de diferente frecuencia.

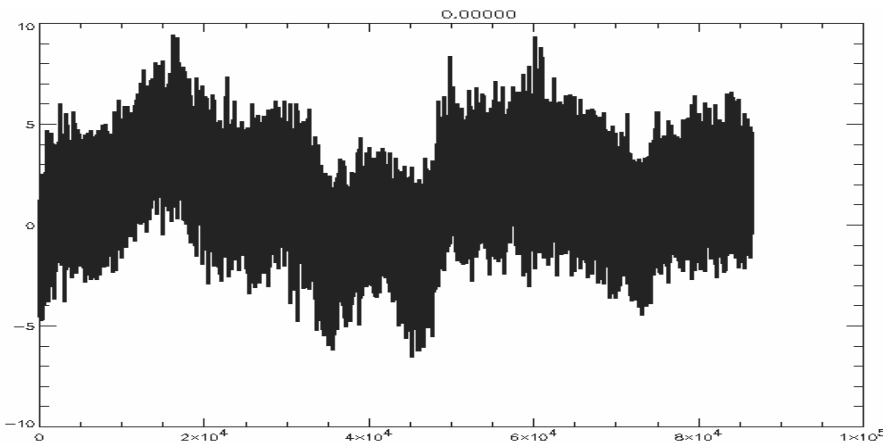


Figura 3

20 días de datos del instrumento GOLF en el satélite SOHO. Se tiene un punto cada 20 segundos. En el eje de abscisas tenemos número de puntos y en el de ordenadas velocidad en m/s.

Cuando uno tiene una señal temporal y quiere buscar las posibles señales estables que la configuran, la forma más inmediata de hacerlo es mediante una **Transformada de Fourier**.

La Transformada de Fourier $F(\nu)$ de una señal $f(t)$ viene dada por:

$$F(\nu) = \int f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

La Transformada de Fourier (T.F.) de una señal es una descomposición de dicha señal en senos y cosenos, con lo cual obtenemos cuáles son las frecuencias y amplitudes de las funciones sinusoidales que configuran la señal analizada. Lo que obtenemos, gráficamente, es una representación de frecuencias frente a amplitud o potencia (amplitud al cuadrado) como la de la figura 4.

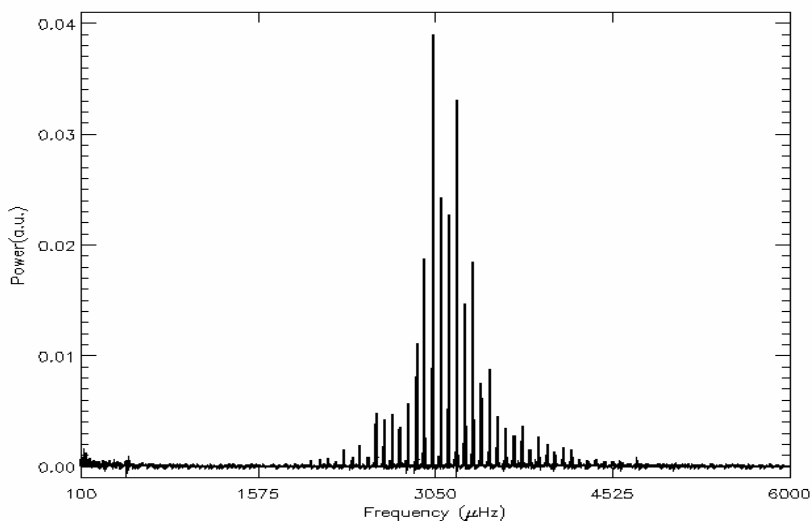


Figura 4

Transformada de Fourier de la señal mostrada en la figura anterior pero con 60 días de datos y con un punto cada 80 segundos.

Las ondas acústicas solares cuyas frecuencias tratamos de obtener a partir del espectro de potencias de la señal, responden físicamente a oscilaciones amortiguadas y el perfil matemático en el dominio transformado es una función lorentziana, en general asimétrica, debido a la interacción de la señal con el ruido. Así, una vez que tenemos la T.F. de nuestra señal, obtenemos las frecuencias buscadas por medio de ajustes no lineales a perfiles lorentzianos asimétricos.

Para poder realizar estos ajustes, resulta conveniente filtrar el espectro para suavizar los perfiles de los modos y llegar a ajustes robustos y poco dependientes de los valores iniciales. La manera en la que filtramos los espectros es a partir de una descomposición wavelet de los mismos. Para entender cómo funciona este tipo de filtrado, vamos a introducir el concepto de **Transformada Wavelet** (T.W.).

Como hemos visto, la T. F. es la manera más directa de analizar una señal en cuanto a sus componentes espectrales, pero no es, necesariamente, la más adecuada. La T.F. se basa en el supuesto de que las señales sinusoidales son infinitas y de amplitud constante, lo cual no tiene por qué ser cierto y no lo es en nuestro caso. Una transformación más adecuada para analizar nuestra señal es la Transformada Wavelet que, además, presenta una gran flexibilidad a la hora de ser utilizada para eliminar ruido.

La Transformada Wavelet es una descomposición de la señal que queremos analizar utilizando como base funciones localizadas espacialmente que se van desplazando y re-escalando o dilatando y, cuyos coeficientes, describen un punto en un plano escala-desplazamiento, por lo que nos dan información temporal del comportamiento de la señal, además de la información espectral.

Matemáticamente, la Transformada Wavelet de una función $f(u)$ viene dada por:

$$TW(\lambda, t) = \int f(u) \Psi_{\lambda, t}(u) du$$

$$\text{Con } \Psi_{\lambda, t}(u) = (1/\sqrt{\lambda}) \Psi((u-t)/\lambda) \quad \lambda > 0$$

Siendo $\Psi_{\lambda, t}(u)$ la función wavelet, λ la escala y t el tiempo.

Una representación gráfica de la T.W. de una zona espectral pequeña de nuestra señal se puede ver en la figura 5, en donde la escala se ha traducido a frecuencias. La señal (roja) está formada por dos modos de frecuencias distintas, pero muy cercanas, que evolucionan de diferente manera a lo largo del tiempo.

La T. W. se puede utilizar también como filtro. En nuestro caso, se parte del espectro de la señal y se elige, como wavelet madre, la derivada de una spline cúbica. Se utilizan 10 escalas. Las escalas altas están dominadas por ruido, por lo que se ponen a cero, así como los coeficientes próximos a cero del resto de las escalas. Al reconstruir la señal a partir de las escalas filtradas, la señal aparece tal y como se ve en la figura 6 en rojo; en negro esta la señal original sin filtrar. Hacer el ajuste a la señal filtrada es mucho más fiable que ajustar la original no filtrada.

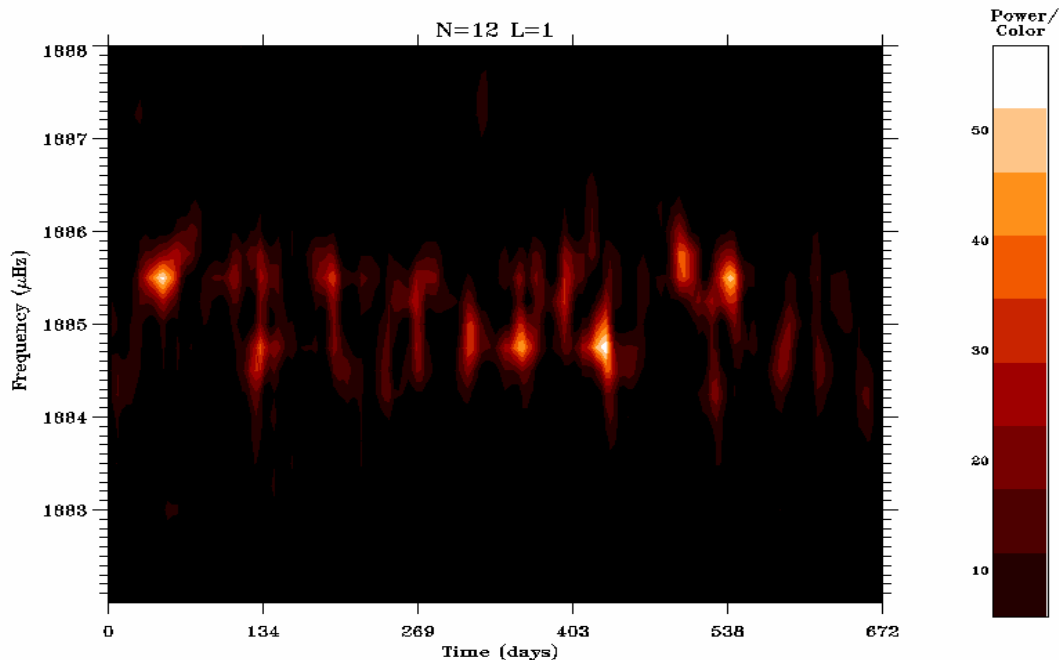


Figura 5: Transformada Wavelet de una señal débil formada por dos modos de distintas frecuencias, pero muy cercanas, que evolucionan de forma diferente a lo largo del tiempo.

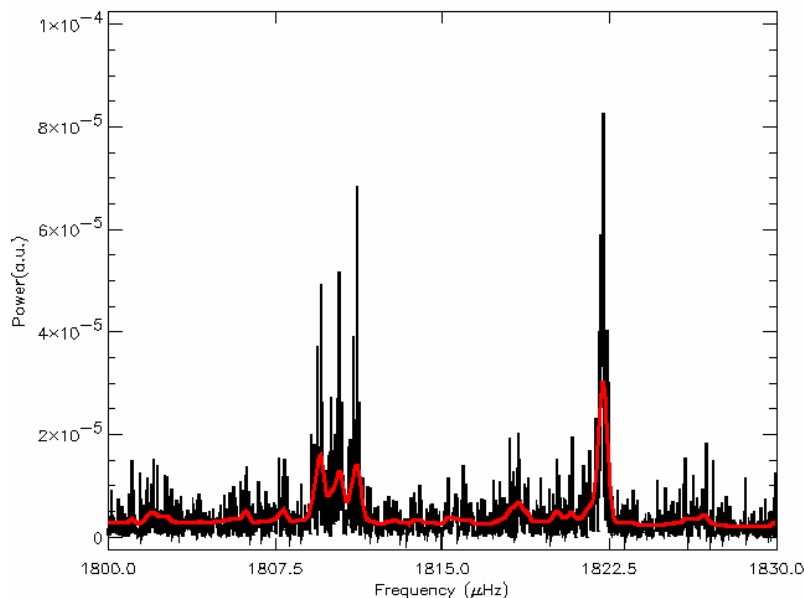


Figura 6

En negro tenemos un trozo ampliado del espectro de potencias de la figura 4. En rojo la misma señal filtrada mediante una transformación wavelet.

Vamos ahora a pasar a analizar, dentro del mismo espectro que hemos estado estudiando, figura 4, la zona de bajas frecuencias, por debajo de 1.3 mHz, donde la

señal está, prácticamente, sepultada por el ruido. Esta zona es muy importante para el estudio del Sol porque proporciona información de zonas muy profundas del mismo.

Para intentar separar la señal del ruido, vamos a utilizar una **Deconvolución Homomórfica** (D.H.) o **Cepstrum**. Esta técnica se utiliza en áreas distintas de la Astrofísica para eliminar ecos en la señal y nosotros la utilizaremos para eliminar re- excitaciones de los modos y ruido en general. La idea que subyace al método es que, al hacer el Cepstrum de una señal con ruido, las componentes de señal y ruido ocupan distintas zonas de la transformada, por lo que se pueden aislar. Se parte de la señal temporal y se calcula su T.F.; a esta T.F. se le calcula su logaritmo y a continuación se hace la T.F. de este logaritmo, con lo cual nos quedamos en un dominio "pseudo-temporal" t' . Es a esta doble transformada a lo que se denomina Cepstrum. El Cepstrum de una función sinusoidal amortiguada, que es nuestra señal, queda concentrado en la zona baja del dominio t' , mientras que el ruido está esparcido por casi todo el dominio. Filtrando con un filtro paso bajo se deja pasar casi toda la señal y muy poco ruido. Después de filtrar damos marcha atrás y recuperamos la señal filtrada. En la figura 7 aparece una muestra de la aplicación de este filtrado en una zona del espectro de potencias donde existe un único modo centrado en torno a 972.5 μHz . La señal negra es la original y la roja la filtrada. Vemos que un modo que estaba completamente inmerso en ruido aparece mucho más definido en la señal filtrada, donde el modo casi no ha variado de amplitud mientras el ruido a su alrededor es bastante más bajo.

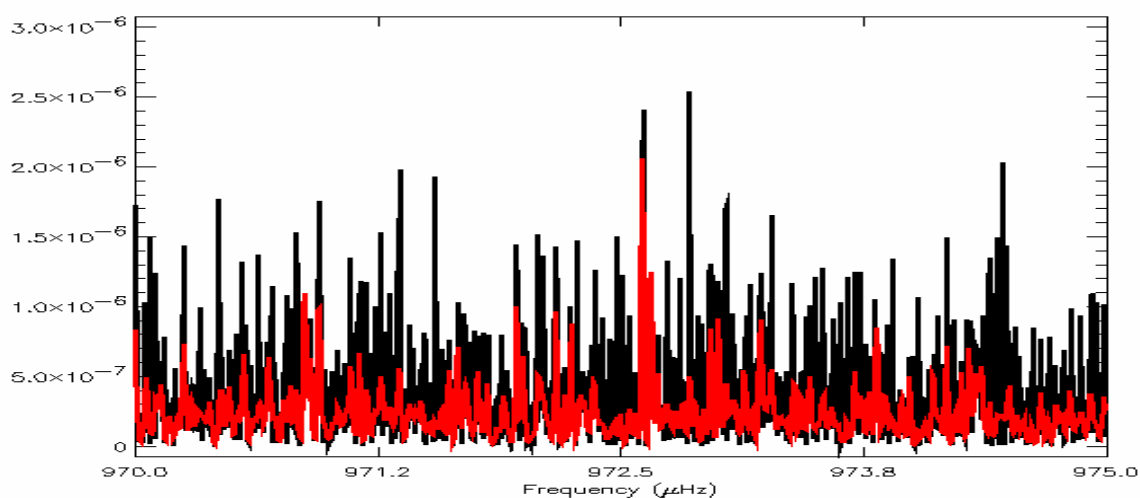


Figura 7: Zona del espectro de la figura 4 donde tenemos un único modo en $\approx 972.5 \mu\text{Hz}$. En negro está el espectro original y en rojo el mismo espectro filtrado con una D.H.

Con esto estamos ya, prácticamente, llegando al final. Todas estas técnicas que hemos comentado para el Sol se pueden aplicar a estrellas, y en este caso hablaríamos de astrosismología en lugar de heliosismología. El problema es que, en general, las señales que se necesitan medir son muy pequeñas y no es posible detectarlas desde Tierra para objetos tan lejanos como estrellas distintas del Sol. La única solución para poder llegar a medirlas es utilizar satélites, lo que nos permite

eliminar la atmósfera terrestre. En estos momentos existe un proyecto, básicamente francés, pero con participación científica de toda Europa (COROT), ya en su fase final, que será lanzado en junio de 2006 y que estará dedicado a la observación de las oscilaciones estelares y la búsqueda de planetas extrasolares. Existe también un proyecto de la Agencia Espacial Europea (Eddington) que debería ser lanzado en el 2007 pero que está bloqueado en estos momentos por recortes presupuestarios.

Resumiendo: El objetivo que se persigue es el obtener la máxima información posible de los datos de los que disponemos por medio de las técnicas matemáticas que tenemos a nuestro alcance.

Los datos de los que disponemos son series temporales de las oscilaciones (solares en este momento y estelares en un futuro próximo) y buscamos, básicamente, las frecuencias de las señales estables que configuran nuestros datos y las necesitamos con una alta precisión y en zonas donde la relación señal a ruido es muy pobre.

Hemos visto como la aplicación de T.F con ventanas y filtros, de T.W y D.H. puede ayudarnos a conseguir estos objetivos y lo hemos aplicado a los datos que tenemos del Sol, nuestra estrella más cercana. El paso siguiente es el salto a estrellas distintas del Sol.

BIBLIORAFÍA BÁSICA

- **Goswami, J. C.; Chan, A. K.: Fundamentals of Wavelets Theory Algorithms and Applications. John Wiley & Sons, Inc**
- **Hamming, R.W.: Digital Filters. Prentice Hall**
- **Lynn, P.A.: An Introduction to the Analysis and Processing of Signals. Mc Millan Press Ltd**
- **Mertins, A.: Signal Analysis (Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications). John Wiley & Sons**
- **Oran Brigham, E.: The Fast Fourier Transform and its Applications. Prentice Hall**

ALGUNAS PÁGINAS “WEBS” DE INTERÉS

- **Instituto de Astrofísica de Canarias: <http://www.iac.es>**
- **Noticias del Cosmos: <http://www.uv.es/obsast/es/divul/noticias/>**
- **SOHO (The Solar and Heliospheric Observatory): <http://sohowww.nascom.nasa.gov/>**
- **COROT (Space Experiment in Astrophysics): <http://www.astrsp-mrs.fr/projets/corot/>**
- **EAS (European Astronomical Society): <http://www2.iap.fr/eas/>**
- **ESTEC (European Space Research & Technology Centre): <http://www.estec.esa.nl/>**