Construyendo modelos en economía

Concepción González Concepción
Catedrática de Economía Aplicada
Departamento de Economía Aplicada, Universidad de La Laguna

Introducción

> Construir un modelo económico o social es una actividad compleja que implica muchos ingredientes. Si uno quiere modelizar el mundo real se debe disponer, ante todo, de *datos* [...]. En segundo lugar, tenemos que tener *teorías*, esto es, hipótesis acerca de en qué sentido se relacionan unas variables con otras. Como tercer componente, debemos tener *métodos de estimación*... En cuarta posición habrá de disponerse de *métodos de solución* para resolver el conjunto de ecuaciones que constituyen el modelo [...] y, finalmente, de *métodos de control* que aseguren que nuestra solución satisface ciertas condiciones o restricciones.
>
> R. Stone (1913-1991)

No hay más que buscar la palabra *economía*, que no ciencia económica, en cualquier enciclopedia para darse cuenta de la dificultad que entraña su propia definición. Han sido muchos los que han intentado delimitar su contenido sin que ninguno de ellos haya logrado una aceptación general. Por citar uno que lo enfocó como ciencia, recordamos que L.C. Robbins (1898-1984), economista liberal inglés, dijo que la economía es la ciencia que estudia la conducta humana como una relación entre fines y medios limitados que tienen diversas aplicaciones. Realmente es reciente en la historia esta visión de la *economía como ciencia*, si bien su importancia es indiscutiblemente creciente.

La principal característica que distingue a la economía como ciencia, sin olvidar sus aspectos históricos, filosóficos y sociales, emana de la posibilidad de construir modelos, *abiertos y dinámicos*, capaces de explicar ciertos fenómenos económicos concretos, si no en su totalidad, al menos en lo más destacado de ellos. La abstracción presente en cualquier modelo establece diferencias evidentes entre teoría y realidad.

Construyendo modelos en economía quiere distinguir entre modelos teóricos y modelos empíricos con la finalidad de observar que, a diferencia de lo que ocurre en las ciencias naturales, en las ciencias económicas es necesario un equilibrio entre rigor científico y realismo a la hora de plantear hipótesis y de interpretar las predicciones que de los modelos se puedan inferir.

En economía, los modelos para datos cronológicos ocupan un lugar destacado. Lo ilustramos, desde el punto de vista computacional y experimental, construyendo modelos racionales para un caso específico de nuestro entorno económico –datos agrosociales (producción, precios, costes) del sector platanero de Canarias–. Asimismo, mostramos la importancia que en estos modelos tienen no sólo los datos pasados conocidos y acumulados a

lo largo del tiempo en las bases de datos, sino las expectativas que los agentes implicados tienen sobre este proceso económico concreto.

1. Ejemplos aislados y aspectos históricos

Ejemplos aislados como la llegada del euro o el uso básico de programas numéricos como las hojas de cálculo nos sirven para ilustrar el interés de las Matemáticas en la toma de decisiones en Economía y en Ciencias Sociales en general [6].

En el primer caso, por ejemplo, la propia normativa europea CE 1103/97 [11] reconoce la importancia del concepto de *cifra significativa* y establece que los tipos de conversión y los precios unitarios deben fijarse con 6 cifras significativas, realizando el redondeo a 2 decimales sólo en los saldos finales de las facturas. Este hecho de importancia no es observado directamente por el consumidor en el mercado, que en su realidad cotidiana se encuentra con precios en moneda real, esto es, con 2 decimales. Sin embargo, podría observarse, al menos parcialmente, en las facturas de bienes de servicios (combustible, electricidad, agua, teléfono...). Es interesante también desde un punto de vista matemático el informe *Análisis aritmético del redondeo en el proceso de moneda única*, elaborado por el Comité de Tecnología de Moneda Única, respecto a los problemas que produce el propio proceso de redondeo, los cuales plantean nuevas necesidades informáticas y matemáticas para afrontar con éxito las actualizaciones precisas en las bases de datos monetarios.

Otro ejemplo se refiere al uso de las hojas de cálculo (Excel de Microsoft o similar) para generar y simular series de datos, por ejemplo, relacionados con el control, en función de ciertos umbrales establecidos, que oscilan ya que es necesario evitar el efecto de los errores de máquina y controlar las características de la aritmética finita con la que trabajan numerosos programas de ordenador utilizados por los usuarios informáticos para el proceso sea fiable.

Podrían citarse numerosos ejemplos aislados como estos. Sin embargo, el uso de las Matemáticas en Economía va mucho más lejos ya que, como en cualquier ciencia, el verdadero interés subyace en la construcción de modelos lo más amplios posible que permitan comprender las regularidades en el comportamiento económico y elaborar decisiones. Es vital el uso de todo tipo de números en la construcción de modelos en economía. Así, especialmente interesantes son e, π o incluso los números áureos $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, que aparecen en economía de forma natural. El número e aparece, por ejemplo, ligado a modelos de crecimiento de poblaciones y a modelos financieros. Así, si imponemos un capital C a una tasa r de interés compuesto y continuo durante t periodos recibiremos $C\mathrm{e}^{rt}$. Esta simple aplicación nos permite observar la construcción del número e a través de límites de sucesiones en una aplicación práctica. El número π aparece como esencia en modelos dinámicos oscilantes, por ejemplo, $P_{t+4}-aP_t=b$, $a,b>0$, que será estable y convergente si $|a|<1$. Los números áureos y las series de Fibonacci figuran en modelos dinámicos, por ejemplo, de evolución poblacional [5]. Y un sin fin de casos distintos.

No obstante, antes de entrar en la construcción de modelos es interesante tomar conciencia de que la Economía como Ciencia es algo bastante reciente en comparación con

otras ciencias, tanto que hubo que esperar al siglo XIX para vislumbrar resultados esperanzadores [1, 2, 7, 9]. He aquí una pincelada histórica.

Los orígenes comunes de la Economía y la Matemática en cuanto a las necesidades de contar y medir no fueron suficientes para impulsar desde un principio a la Economía como Ciencia. De hecho, suele establecerse como fecha de introducción sistemática de las Matemáticas en la Economía el año 1838, cuando Cournot publicó su libro *Investigación acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas*. Hasta ese momento aritmética básica, aplicaciones aisladas de la teoría de la probabilidad y tendencias es lo que encontramos en los escritos económicos. A partir del siglo XIX casi todas las áreas de Matemáticas (álgebra, teoría de conjuntos, análisis de funciones, optimización, convexidad, topología, programación matemática, teoría de juegos, no linealidad, aleatoriedad, incertidumbre, dinamicidad, asimetría, experimentación, análisis numérico, simulación, análisis cualitativo…) han ayudado a resolver diferentes problemas económicos y muchas han sido las personas que han contribuido a ello, normalmente con formación interdisciplinar en Economía y otras ciencias. Un repaso de las biografías de los Premios Nobel en Economía, por ejemplo, así lo manifiesta [10].

Además, una perspectiva histórica nos permite analizar de una forma más realista los verdaderos avances de la Economía como Ciencia. En efecto, como sabemos una teoría científica puede partir de ideas o de observaciones: lo mismo ocurre en Economía. Además, como en cualquier ciencia, la realización de experimentos es de vital importancia. No obstante, en cualquier ciencia los experimentos, especialmente los de laboratorio, deben poder repetirse bajo las mismas hipótesis, garantizando así que los resultados deben ser prácticamente los mismos. Esto no ocurre de manera formal en muchos ámbitos de la Economía, donde cualquier experimento es irrepetible ya que las hipótesis incluyen comportamiento humano y, por tanto, varían inevitablemente con el tiempo. Esto puede ser cubierto, en parte, con estudios bajo incertidumbre, pero ni siquiera los avances tecnológicos pueden evitar este inconveniente. De la misma manera que en Medicina no existen las enfermedades sino los enfermos, en Economía el mercado es la abstracción de un conjunto de comportamientos económicos individuales. Pero no por eso dejan de tener valor los avances que la tecnología pueda imprimir en esas áreas, sino todo lo contrario. Incluso Newton dudó de las posibilidades que tendría la aplicación de la Teoría de la Probabilidad a los problemas sociales; por suerte, el pesimismo de Newton fue precisamente la clave que animó a Daniel Bernoulli a estudiar ciertas aplicaciones al mundo real de tal teoría, ya desarrollada en ese momento para los juegos de azar. Fueron momentos decisivos, puesto que los descubrimientos de este matemático y de otros miembros de su familia permitieron posteriormente a De Moivre descubrir y a Gauss formalizar la curva de campana que permite distribuir los errores al tomar medidas. Si bien ellos no lo aplicaron a datos sociales, sí lo hizo posteriormente Quetelec, siendo Kolmogorov, dos siglos más tarde, el que tuvo la capacidad de abstracción suficiente para ver la relación entre la teoría de la probabilidad y la teoría de la medida, que junto con el cálculo de Newton y Leibniz permite desde hace algunos años construir modelos dinámicos estocásticos de vital importancia para la toma de decisiones en muchas áreas de la Economía, y que volveremos a retomar en la segunda sección de este trabajo. En concreto, el Premio Nobel en Economía en 1997 se concedió por una única fórmula, una ecuación diferencial estocástica debida a Black y Sholes y desarrollada más tarde por Merton, que permite calcular valores de opciones financieras. Esta fórmula fue publicada en 1973, después de algunos años de intentos infructuosos en varias revistas científicas, pero puesta en práctica por Wall Street apenas unos meses después de su

publicación. Era una de esas ocasiones en la que una fórmula matemática tuvo más interés práctico que teórico.

A modo de resumen, podríamos decir que la Economía se convierte por el uso de las Matemáticas en el nexo de unión entre la cultura humanística (representada por la propia sociedad) y la cultura científica (representada por la Ciencia, la Tecnología y las Matemáticas): definitivamente, la Matemática es la herramienta que le permite a los economistas construir sus propios modelos para comprender mejor, planificar y tomar decisiones. Como dijo Dorfman, matemático y estadístico, impulsor de la programación lineal e investigador en temas de medio ambiente y uso de recursos naturales: *Si quieres realismo mira al mundo que te rodea, si quieres comprender mira a las teorías*. También Allais, físico y economista, siempre dispuesto a investigar lo que podía haber de falso en las ideas recibidas y Premio Nobel en Economía en 1988 por sus estudios de mercado y asignación eficiente de recursos, aporta reflexiones interesantes sobre su visión de la Economía como Ciencia [9]...

2. Construcción de modelos en Economía

Hay que partir de la base de que un modelo en Economía, como en cualquier ciencia, supone una abstracción o simplificación de la realidad y puede construirse partiendo de ideas teóricas o de experimentos, bajo unas hipótesis bien especificadas. Diremos, respectivamente, que construimos un modelo teórico o un modelo experimental. Esquemáticamente, los pasos que seguimos podrían ser, en general:

- Planteamiento del problema económico y concreción de hipótesis.
- Traducción al lenguaje matemático: hipótesis matemáticas.
- Estudio del problema.
- Elección de la técnica de resolución.
- Resolución matemática.
- Obtención de las conclusiones matemáticas.
- Interpretación económica y contrastación con el problema real.
- Si fuera necesario, corrección de hipótesis tanto matemáticas como económicas
- Planteamiento y resolución de modelos más realistas.

Modelos teóricos

Estos parten de ideas abstractas que el investigador concibe normalmente a partir de su visión de la realidad económica o sugeridas por otras teorías anteriores. Por tanto, no se construyen utilizando las bases de datos, que se reservan para el momento de la contrastación del modelo. Vamos a ilustrar este tipo de modelos a través de un modelo básico en la teoría de la elección que intenta explicar de forma simbólica la conducta económica de los individuos.

Pensemos que disponemos de 4 euros para merendar, pudiendo comprar algo para comer (una cantidad c que cuesta 2 euros por unidad) y algo para beber (una cantidad b que cuesta 1 euro por unidad). Nuestras posibilidades de elección estarían en el triángulo limitado por $c=0$, $b=0$ y $2c+b=4$ del plano euclídeo.

Supongamos que observamos que muchas personas eligen una unidad de comida y dos de bebida frente a otras elecciones posibles. ¿Es esa la "mejor" elección? Para intentar

responder de alguna forma a esta cuestión construimos un modelo siguiendo los pasos indicados anteriormente:

Fenómeno económico: La conducta económica de los individuos.

Hipótesis: Los individuos se comportan como si utilizaran su poder adquisitivo para obtener la máxima *satisfacción* posible.

Traducción al lenguaje matemático: Los individuos adquieren un número limitado de bienes, cada uno a un precio dado. La *satisfacción* se mide usando una función matemática que llamamos Utilidad y que simbolizamos por U.

Elección de la técnica de resolución: Optimización matemática con restricción.

Resolución matemática: Mostramos un caso sencillo en el que el individuo adquiere sólo dos bienes en cantidades x e y a precios respectivos p y q y U es continuamente diferenciable, de manera que se trata de resolver

$$\begin{aligned} &MAX\ \ U = U(x,y) \\ &s.a.\ \ px + qy \leq R. \end{aligned}$$

Conclusiones matemáticas:

- La solución del problema está en la frontera de la región factible $px + qy = R$.
- Derivando respecto a x la restricción obtenemos $p+qy' = 0$ y, por tanto, $y' = -\frac{p}{q}$.
- Utilizando el método de Lagrange, al derivar $L(x,y)=U(x,y)-\lambda(px+qy-R)$ obtenemos $L_x(x,y)=U_x(x,y)-\lambda p;\ L_y(x,y)=U_y(x,y)-\lambda q$.
- En el óptimo se verifica: $\lambda = \frac{U_x}{p} = \frac{U_y}{q}$ y $\frac{U_x}{U_y} = \frac{p}{q}$.
- Si la función de utilidad fuera convexa, obtendríamos solución única en el punto de tangencia.

Interpretación económica:

- El individuo debe invertir toda su renta para maximizar la satisfacción.
- Si la satisfacción es convexa, el individuo debe aumentar el consumo de uno de los bienes al disminuir el del otro si quiere conservar su satisfacción.
- La relación marginal de sustitución entre los bienes coincide con la que existe entre los precios respectivos en el mercado.
- Si el individuo maximiza su satisfacción, el valor de λ mide aproximadamente la satisfacción adicional que podría obtener por cada unidad monetaria adicional que gane.
- La relación entre las tasas de cambio de la satisfacción al modificar el consumo de cada bien es la misma que entre los precios respectivos en el mercado.

Contrastación del modelo: Se contrasta que este modelo tiene capacidad para representar de forma simbólica y abstracta el comportamiento de una mayoría amplia de consumidores (ver el ejemplo citado anteriormente).

Hacia modelos más realistas: Se observa que el modelo estudiado ha permitido conclusiones interesantes, pero algunas de ellas son muy restrictivas; lo que nos invita a plantear una serie de cuestiones -¿qué ocurre si añadimos más de dos bienes?, ¿y si U no es diferenciable?, ¿y si U no es convexa?, ¿y si cambia el comportamiento de los individuos en otras direcciones?…- encaminadas a considerar nuevos modelos más realistas.

Modelos experimentales

Una posibilidad de ampliación se encuentra en la construcción de modelos experimentales, que completa los modelos teóricos y abre nuevas cuestiones relacionadas con la elaboración y el tratamiento de las bases de datos y con el uso de tecnología científica e informática.

Respecto a la elaboración, consulta y uso de las bases de datos, es necesario tener en cuenta que:

- Los datos en Economía son de tipo histórico-sociológico, en general, fuera del control del investigador.
- Es habitual obtener mediciones sustancialmente diferentes para una misma variable dependiendo de la fuente consultada.
- Los datos socio-económicos están sujetos a "errores de medición y escasa precisión", por lo que requieren un tratamiento estadístico adecuado.
- Los datos económicos exigen, en general, modelos con cierto grado de complejidad (no lineales, dinámicos, multivariantes, estocásticos...).
- Se generan necesidades informáticas propias del área y usuarios cualificados.

El uso de la computación y del análisis numérico parte del reconocimiento de que lo exacto no existe y que, por tanto, la aproximación es una necesidad. De modo que los modelos experimentales descansan en métodos estadísticos y numéricos evaluados a través de algoritmos programados por el propio investigador, o a través de programas comerciales ya elaborados. Este tipo de modelos tiene la ventaja de lograr mayor eficiencia y mayor acercamiento al mundo real, de permitir contrastación, experimentación y simulación de casos complejos, así como de servir de complemento sustancial a los estudios cualitativos y de base para elaborar predicciones. No obstante, por un lado, hay que pensar que este proceso de computación se lleva a cabo en muchas ocasiones por usuarios no especializados para los cuales el programa de ordenador que utilizan es una especie de "caja negra" y, por tanto, los resultados computacionales que obtienen les resultan poco intuitivos e incomprensibles; por otro, muchos modelos se construyen con programas que no son lo suficientemente sofisticados para los fines que se persiguen, porque algunas empresas consideran los "grandes" programas como herramientas infrautilizadas y, por ende, un derroche de recursos.

Vamos a ilustrar este apartado a través de modelos racionales en el campo de la Economía agrícola en Canarias [3, 4].

Intentamos esquematizar los pasos, de manera similar a como lo hicimos en el modelo de la elección:

Fenómeno económico: La evolución del sector platanero en las islas y sus repercusiones económicas y paisajísticas.

Hipótesis:

- El pasado predice el futuro.
- La producción se planifica en función del ingreso percibido y del coste asumido por el agricultor en años anteriores.
- El año 1993 es una fecha clave para el sector platanero. Se liberaliza el mercado y los efectos negativos se intentan compensar con el establecimiento de una ayuda compensatoria por parte de la Unión Europea.

Características de los datos disponibles:

- Datos anuales históricos oficiales y de fincas particulares sobre producción y precios de mercado a partir de 1938.
- Datos anuales oficiales de ayuda compensatoria a partir de 1993.
- Datos de costes de fincas particulares sobre agua y abonos.

Traducción al lenguaje matemático:

- Llamamos P_t a la producción (en millones de toneladas), I_t al ingreso percibido por el agricultor en el año t y C_t al coste medio de agua y abonos de por kilo producido en el año t (en pesetas indexadas respecto al año 1996).
- Contrastamos estadísticamente las relaciones entre las tres variables, pudiendo asumir que $I_t \to P_t$; $P_t \to C_t$; $I_t, C_t \to P_t$.

Elección de la técnica de resolución:

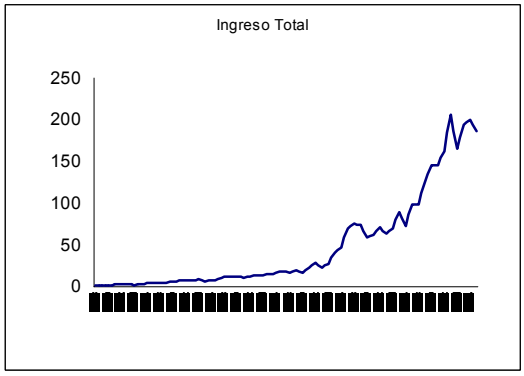
- Preparación de los datos y de las variables: adecuación del tamaño y naturaleza de las series usando interpolación numérica, función logaritmo (ln) y operador diferencia *B*.
- Definición de las nuevas variables $z_t = (1-B)\ln P_t$; $X_t \equiv (x_t, y_t)' = (1-B)(\ln I_t, \ln C_t)'$.
- Elección de modelos dinámicos causales de aproximación racional basados en aproximantes de Padé y teoría Box-Jenkins para series temporales [8], esquematizados como sigue:

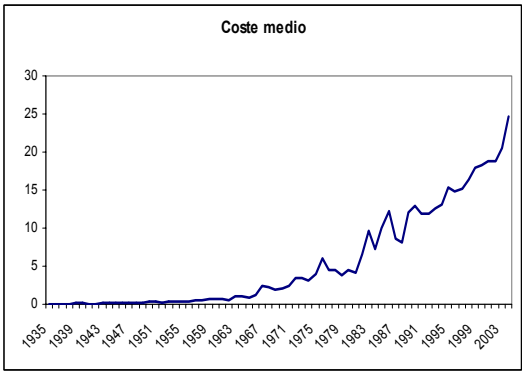
$$z_t = \underbrace{v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + \ldots}_{\text{Input actual y pasado}} + N_t = \sum_0^{\infty} v_i B^i X_t + N_t \cong \frac{P(B)}{Q(B)} X_t + \frac{\theta_q(B)\vartheta_Q(B^s)}{\Theta_p(B)\Phi_P(B^s)} a_t$$

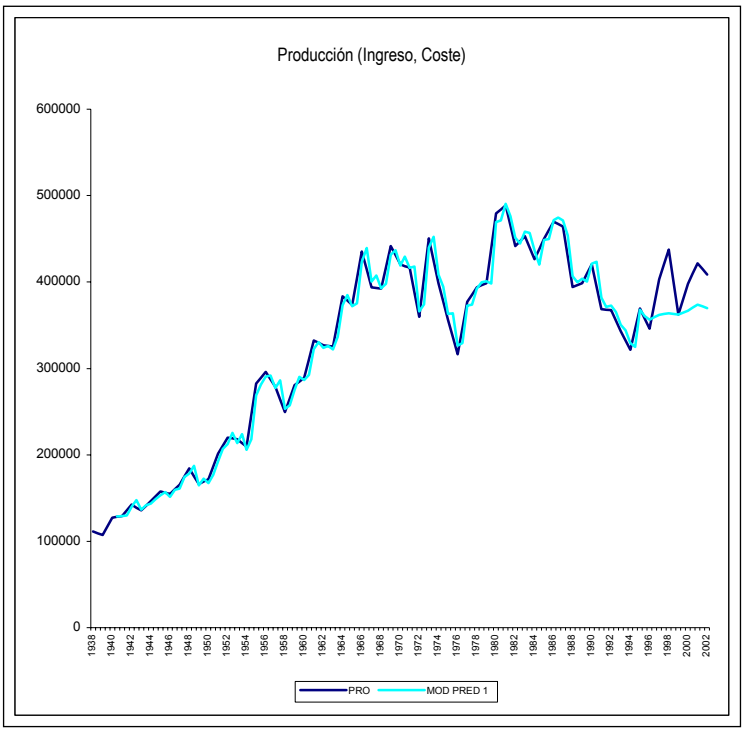
Output actual — Parte Determinista — Parte Estocástica — Modelos Racionales — Proceso Ruido Blanco

Resolución matemática: Construcción del modelo para el periodo 1938-1993 usando programas informáticos científicos (MATHEMATICA y SCA) con técnicas basadas en aproximación racional de Padé, optimización por mínimos cuadrados y mínimo-máximo.

$$z_t = 0.1091_{(2.81)}\, B^4 x_t + 0.0460_{(1.58)}\, B^2 y_t + (1 + 0.6798_{(-13.15)}\mathrm{B} - 0.3526_{(5.74)}\mathrm{B}^2)\, a_t\,.$$





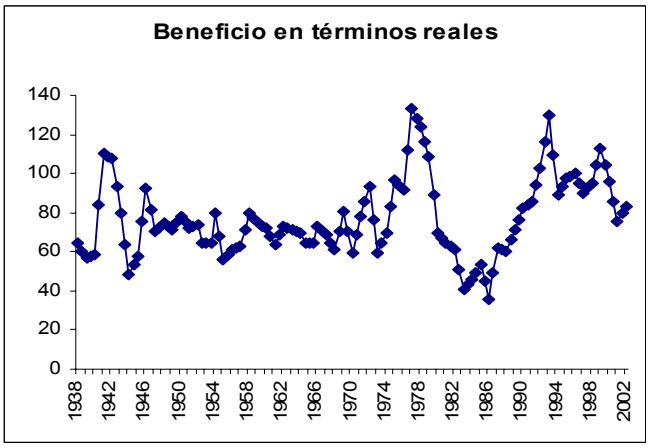


Conclusiones matemáticas:

- Hemos separado la estructura determinista de la estocástica en los datos.
- El término en x_{t-4} es el más significativo de la serie. Los ingresos son estadísticamente más significativos que los costes.
- El modelo se ajusta bien a los datos y ofrece una predicción que luego se contrasta empíricamente.

Interpretación económica y contrastación del modelo:

- Los ingresos son inputs para la producción. Sin embargo, los costes, aunque por sí solos no lo son, sí lo son conjuntamente con los ingresos en términos de beneficios.



- El ingreso percibido influye en la planificación de la producción básicamente a 2 años vista.
- El coste influye en la producción a 1 año vista, pero no de manera significativa.
- El ajuste a los datos es "bueno", pero no tanto las predicciones, contrastadas con los datos a partir de 1993.

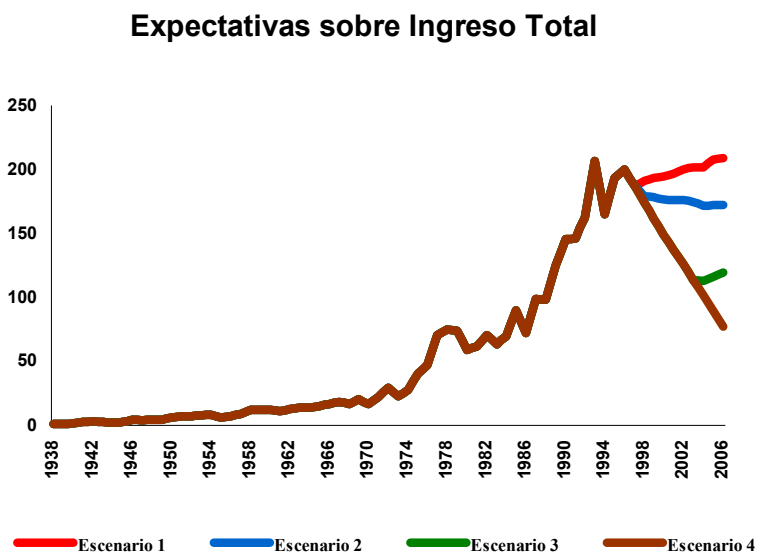
Hacia modelos más realistas: A continuación intentamos dar una respuesta parcial a esta cuestión construyendo un modelo que incluya sólo ingreso y producción, pero que tome en cuenta de alguna forma las expectativas que sobre su ingreso futuro tienen los propios agricultores.

Hipótesis:

- La producción se planifica en función de los ingresos percibidos en años anteriores y de las expectativas del ingreso que se espera percibir en años venideros.
- Respecto a las expectativas hacemos 4 hipótesis diferentes:
    - ESCENARIO 1: El agricultor supone que sus ingresos se mantendrán la próxima década.

- ESCENARIO 2: El agricultor supone que la ayuda compensatoria no va a considerar la subida anual del IPC para reducir los gastos por parte de la Unión Europea, por lo que sus ingresos van a descender paulatinamente.
- ESCENARIO 3: El agricultor supone que se avecina una época de crisis, pero que los ingresos se recuperan más tarde volviendo a niveles aceptables.
- ESCENARIO 4: El agricultor supone que se avecina una crisis en la que los ingresos se sitúan por debajo de un umbral permitido y no vislumbra el final de dicha crisis.

Traducción al lenguaje matemático: Se generaliza el modelo anterior, introduciendo una modificación para incluir las expectativas de la variable I_t.



Elección de la técnica de resolución:

- Preparación de los datos completando las series con las expectativas, generadas de acuerdo a las hipótesis supuestas con respecto al comportamiento del agricultor.
- Modelo semejante al anterior pero sustituyendo los aproximantes de Padé por aproximantes de Padé-Laurent y generalizando la teoría Box-Jenkins para series temporales que incluyan expectativas del input.

$$z_t = \ldots + v_{-1}x_{t+1} + v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + \ldots + N_t \cong \frac{P_{-p_1,p_2}(B)}{Q_{-q_1,q_2}(B)} x_t + \frac{\theta_q(B)\vartheta_Q(B^s)}{\Theta_p(B)\Phi_P(B^s)} a_t$$

Output actual — Expectativas Input — Input actual y pasado — Parte Estocástica — Modelos Racionales — Proceso Ruido Blanco

Parte determinista

Resolución matemática:

ESCENARIO 1:

$$z_t = (0.2001_{(4.07)} + 0.1296_{(2.69)} B)B^{-7} x_t + (1 + 0.8776_{(11.32)} B - 0.1153_{(1.48)} B^2) a_t .$$

ESCENARIO 2:

$$z_t = \frac{0.1661_{(3.00)}}{1 - 0.5417_{(3.62)} B^2} B^{-7} x_t + (1 + 0.7589_{(8.81)} B - 0.2469_{(2.89)} B^2) a_t .$$

ESCENARIO 3:

$$z_t = \frac{0.1645_{(3.06)}}{1 - 0.5543_{(3.86)} B^2} B^{-7} x_t + (1 + 0.7342_{(8.94)} B - 0.2770_{(3.41)} B^2) a_t .$$

ESCENARIO 4:

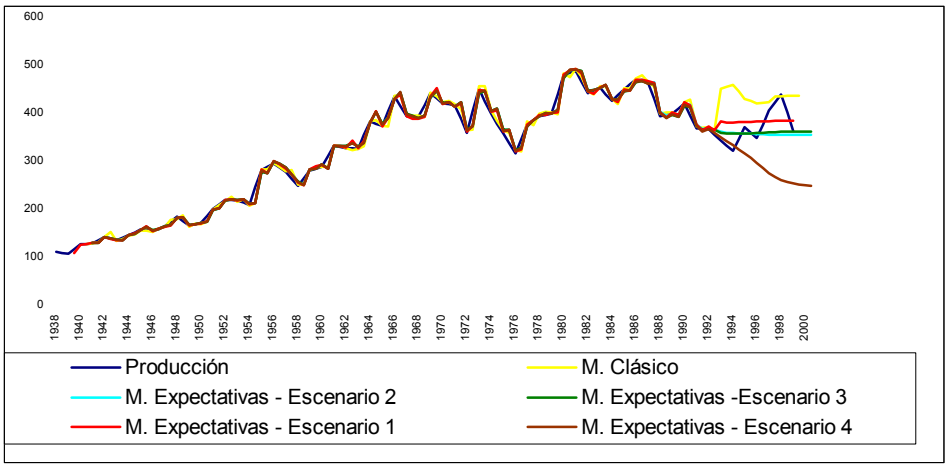
$$z_t = \frac{0.1649_{(3.03)}}{1 - 0.5480_{(3.60)} B^2} B^{-7} x_t + (1 + 0.7959_{(10.29)} B - 0.2129_{(2.82)} B^2) a_t .$$

Conclusiones matemáticas:

- Aparece la dependencia racional de forma explícita.
- Se ve la influencia de x_{t+7} y z_{t-2} sobre z_t, aspecto que no podía observarse con el modelo anterior.
- Todos los modelos se ajustan bien a los datos y se obtiene una predicción mejor que la ofrecida por el modelo clásico.

Interpretación económica:

- La vemos sobre la gráfica.
- Las expectativas sobre el ingreso influyen en la planificación de la producción a 3 ó 4 años vista.
- También influye la producción del año anterior, ya que en algunos periodos, básicamente por razones meteorológicas, se producen adelantos o retrasos en la recogida del producto.
- Se recoge la importancia de la ayuda compensatoria.
- El Escenario 1 es el más deseable. Compensa la sobreproducción.
- Los Escenarios 2 y 3 confirman el optimismo vigente en el año 97 por parte del agricultor de recuperación posterior.
- El Escenario 4 manifiesta la importancia de la ayuda compensatoria o vías alternativas de compensación por pérdida de renta para conservar la producción platanera y el paisaje.



Hacia modelos más realistas:

- Consideración del modelo producción-beneficios: se obtiene un modelo similar al de producción-ingreso.
- Consideración de otros factores dentro de los costes de producción: salarios...
- Consideración de otras variables, por ejemplo, costes de comercialización.
  a) Modelos multivariantes.
  b) Modelos estacionales.
  c) …
- Búsqueda de alternativas para conservar expectativas positivas por parte del agricultor.
  a) Vía precios. Competencia en un mercado globalizado.
  b) Vía costes. Competencia con otros países donde la producción es más barata.
  c) Explotación de cambios tecnológicos apropiados.
  d) Vía potenciación de variedades diferenciadas.
  e) Vía nuevos mercados, nuevos consumos.
  f) Vía compensación por conservar paisaje.
  g) Vía influencia indirecta en el sector turístico.
  h) ...
- Sustitución del plátano por otros cultivos.

3. Conclusiones

La modelización en Economía, como en otras ciencias, es una actividad cíclica e interdisciplinaria en la que siempre quedan muchos aspectos que mejorar, hipótesis que estudiar y una infinidad de posibilidades para investigar. Los modelos racionales dinámicos que hemos estudiado, como sustitutos de modelos polinómicos, constituyen un ejemplo que ilustra esta idea.

4. Referencias

[1] **K.J. Arrow, M.D. Intriligator, W. Hildebrand (eds.):** *Handbook of mathematical economics*. North-Holland, Amsterdam, 1984-1991.
[2] **K. Devlin:** *El lenguaje de las matemáticas*. Ediciones Robinbook, Barcelona, 2002.
[3] **M.C. Gil-Fariña, C. González-Concepción:** La producción del plátano de Canarias y las expectativas del agricultor sobre la ayuda compensatoria. *Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros* (Ministerio de Agricultura Pesca y Alimentación) **194** (2002), 127-146.
[4] **M.C. Gil-Fariña, C. González-Concepción:** A multivariate model for the banana production in the Canary Islands including production, costs and income. *WSEAS Transactions on Business and Economics* **1**, no. 4 (2004), 290-295.
[5] **C. González-Concepción:** Número áureo, diseño empresarial y economía dinámica. En *Economía y Finanzas (Libro Homenaje al Profesor D. F. Pérez Calatayud)*, Editorial Arte, La Laguna, 2001, pp. 365-372.
[6] **C. González-Concepción:** Modelos de aproximación racional en economía. En *Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas* (I. Marrero, R. Trujillo, coords.), pp. 51-65. Documentos Congresuales 9, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Laguna, 2004.
[7] **C. González-Concepción, M.C. Gil-Fariña:** *El lenguaje de la ciencia económica: ¿por qué la economía no prescinde de las matemáticas?* Ediciones Ra-Ma, Madrid, 2000.
[8] **C. González-Concepción, M.C. Gil-Fariña:** Padé approximation in economics. *Numerical Algorithms* **33** (2003), 277-292.
[9] **M. Szenberg (ed.):** *Grandes economistas de hoy*. Editorial Debate, Madrid, 1994.
[10] *The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in memory of Alfred Nobel*, http://nobelprize.org/economics.
[11] *EuroWeb*, http://www.euro.mineco.es.