Teoría de juegos: análisis matemático de conflictos

Fernando Fernández Rodríguez
Catedrático de Economía Aplicada
Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión,
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Introducción

La Teoría de Juegos estudia de manera formal y abstracta las decisiones óptimas que deben tomar diversos adversarios en conflicto, pudiendo definirse como el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto y la cooperación entre entes inteligentes que toman decisiones. Tales decisiones se consideran estratégicas, es decir, que los entes que participan en el juego actúan teniendo en cuanta las acciones que tomarían los demás.

La teoría de juegos es capaz de ofrecer cuestiones de interés para estudiantes de todas las ramas de las Ciencias Sociales y la Biología, así como técnicas para tomar decisiones prácticas.

Aunque la palabra "juego" tiene connotaciones lúdicas y relativas al azar, la teoría de juegos no tiene como principal objetivo el estudio de los juegos de salón, aunque sí entran dentro de su dominio. Una terminología alternativa que ilustra más claramente el objeto de la Teoría de Juegos es el "análisis matemático de conflictos" y la "toma interactiva de decisiones".

Los jugadores son entes decidores que se consideran *racionales*, no necesariamente humanos, porque las nuevas tendencias de la Biología explican la formación de los instintos o de numerosos mecanismos de cooperación animal por medio de la Teoría de Juegos.

Como ejemplos característicos de juegos podrían citarse no sólo los juegos de mesa, sino también conflictos militares, modelos de evolución biológica, campañas políticas, de publicidad o de comercialización y una innumerable lista de situaciones de competencia entre empresas.

El principio fundamental para hallar la solución de un juego de decisiones simultáneas, donde los jugadores poseen información completa, es el *equilibrio de Nash*. También es posible tratar juegos dinámicos donde los jugadores toman sus decisiones de forma consecutiva, empleando el principio de *inducción hacia atrás*.

Juegos no cooperativos: representación en forma normal

Un juego en **forma normal o estratégica**, que se denotará por $G=\{S_1,.....,S_n;u_1,.....,u_n\}$ ó $G[S,U]$, consta de tres elementos esenciales:

- Los n **jugadores** que participan en el juego.
- Las **estrategias disponibles** para cada jugador, que son $S=\{S_1,.....,S_n\}$.

  $S_i=\left\{s_{i_1},s_{i_2},.....,s_{i_q}\right\}$ es el conjunto de estrategias con que cuenta el jugador i. La notación suele simplificarse designando por s_i a un elemento arbitrario de S_i, donde $s_i \in S_i$. De este modo $(s_1,.....,s_n)$ representa una combinación de estrategias, una para cada jugador, que también se conoce como un **perfil estratégico.**

- El conjunto de **funciones de pago** $U=\{u_1,.....,u_n\}$, donde la función de pagos de cada jugador $u_i=u_i(s_1,.....,s_n)$, $s_i \in S_i$ representa la utilidad o pagos obtenidos por el i-ésimo jugador, que es función de las estrategias elegidas por él y sus rivales en el juego.

En un juego en forma normal los jugadores **eligen sus estrategias de forma simultánea**, es decir, que cada jugador elige su jugada sin conocer las decisiones de los demás. Cada jugador recibe un pago $u_i=u_i(s_1,.....,s_n)$, dependiendo de las estrategias elegidas por los demás.

Como ejemplo prototipo de juegos en forma normal o estratégica destacan los juegos con dos jugadores donde cada uno de ellos tiene un número finito de estrategias, por lo que las funciones de pago pueden representarse en una doble matriz. Tales **juegos** suelen denominarse también **bimatriciales**.

Ejemplo.: Dilema del prisionero.

	Callar (cooperar)	Confesar (no cooperar)
Callar (cooperar)	4,4	0,5
Confesar (no cooperar)	5,0	1,1

Este juego esta presente en muy diversas situaciones de la vida real, donde se presentan fuertes incentivos para la no cooperación mientras que la situación socialmente eficiente es la de la cooperación. Por ejemplo:

- Cooperar: pagar impuestos, reducir cuotas de producción, practicar el libre comercio.
- No cooperar: No pagar impuestos, no limitar la producción, establecer barreras arancelarias.

Equilibrio de Nash en estrategias puras

El concepto de equilibrio de Nash es un concepto muy amplio, de solución aplicable en numerosos juegos. Dado un juego $G=\{S_1,.....,S_n;u_1,.....,u_n\}$, las estrategias $(s_1^*,.....,s_n^*)$ forman un **equilibrio de Nash en estrategias puras** si, para cualquier i, $s_i^* \in S_i$ es la mejor respuesta (o al menos una de las mejores) a las estrategias $(s_1^*,...,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,...s_n^*)$ de los otros n-1 jugadores, es decir:

$$u_i(s_1^*,....,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,....,s_n^*) \geq u_i(s_1^*,....,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,....,s_n^*)$$

para cualquier jugador i y para cualquier $s_i \in S_i$.

Esto implica que todos y cada uno de los jugadores resuelven individualmente el problema

$$\underset{s_i \in S_i}{Max}\, u_i(s_1^*,....,s_{i-1}^*,s_i,s_{i+1}^*,....,s_n^*) \ ,$$

alcanzándose el equilibrio de Nash cuando todos, simultáneamente, obtienen el máximo.

Es decir, que la estrategia predicha de cada jugador debe ser **la mejor respuesta de cada jugador a las estrategias predichas por los otros jugadores.** Tal predicción se denomina estratégicamente estable o “self-enforcing”. Todos elegirán las estrategias de equilibrio y a ninguno le conviene desviarse de ella. De existir una desviación rentable para (al menos) un jugador, la situación anterior dejaría de ser un equilibrio de Nash.

En otras palabras, si las estrategias $(s_1',.....,s_n')$ no constituyen un equilibrio de Nash, al menos un jugador tendrá un incentivo para desviarse y cambiar su estrategia.

El equilibrio de Nash $(s_1^*,.....,s_n^*)$ goza entonces de la importante propiedad de que **si el jugador i elige la estrategia $s_i^* \in S_i$ del equilibrio, los otros jugadores no pueden hacer otra cosa mejor que elegir también las estrategias del equilibrio** $(s_1^*,...,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,...s_n^*)$.

Para el juego $G=\{S_1,S_2;u_1,u_2\}$, la pareja de estrategias (s_1^*,s_2^*) forman un equilibrio de Nash si:

a) s_1^* es la mejor respuesta a la estrategia s_2^* de II.
b) s_2^* es la mejor respuesta a la estrategia s_1^* de I.

Es decir, que

a) $u_1(s_1^*,s_2^*) \geq u_1(s_1,s_2^*) \ \ \forall s_1 \in S_1$.
b) $u_2(s_1^*,s_2^*) \geq u_2(s_1^*,s_2) \ \ \forall s_2 \in S_2$.

Por tanto, cada estrategia s_i^* $i=1,2$ debe ser solución al problema de optimización

a) $\underset{s_1 \in S_1}{Max}\, u_1(s_1, s_2^*)$, buscando la mejor respuesta de I ante la estrategia s_2^* de II.

b) $\underset{s_2 \in S_2}{Max}\, u_1(s_1^*, s_2)$, buscando la mejor respuesta de II ante la estrategia s_1^* de I.

Otra forma de interpretar el equilibrio de Nash es por medio de las **curvas de reacción**.

a) Para cada estrategia s_2 de II el jugador I resuelve el problema $\underset{s_1 \in S_1}{Max}\, u_1(s_1, s_2)$, obteniendo una respuesta óptima $s_1 = R_1(s_2)$ llamada curva de reacción del jugador I.

b) Para cada estrategia s_1 de I el jugador II resuelve el problema $\underset{s_2 \in S_2}{Max}\, u_2(s_1, s_2)$, obteniendo una respuesta óptima $s_2 = R_2(s_1)$ llamada curva de reacción del jugador II.

El **equilibrio de Nash** es aquel o aquellos puntos de **intersección de las dos curvas de reacción** de ambos jugadores, el decir, un par de estrategias s_1^* y s_2^* que verifican:

$$s_1^* = R_1(s_2^*) \text{ y } s_2^* = R_2(s_1^*) .$$

Ejemplo. Consideremos el juego de dos jugadores

	t_1	t_2	t_3
s_1	0,**4**	**4**,0	5,3
s_2	**4**,0	0,**4**	5,3
s_3	3,5	3,5	**6**,**6**

El equilibrio de Nash puede hallarse sin más que considerar la respuesta óptima de cada jugador ante cada estrategia del contrario, es decir estudiando las curvas de reacción y considerando su punto de intersección.

Las curvas de reacción de I son las siguientes:

$$s_2 = R_1(t_1)\,,\; s_1 = R_1(t_2)\,, s_3 = R_1(t_3)\,.$$

Las curvas de reacción de II son las siguientes:

$$t_1 = R_2(s_1)\,,\; t_2 = R_2(s_2)\,, t_3 = R_2(s_3)\,.$$

El equilibrio de Nash se produce entre las estrategias (s_3, t_3) porque se cortan sus curvas de reacción:

$$s_3 = R_1(t_3) \text{ y } t_3 = R_2(s_3)\,,$$

por lo tanto s_3 es la respuesta óptima ante t_3 y t_3 es la respuesta óptima ante s_3.

Si en un juego bimatricial subrayamos la respuesta óptima de cada jugador ante cada estrategia del contrario el equilibrio de Nash se identifica fácilmente, pues estará situado en aquella casilla o casillas donde ambos elementos estén subrayados. A continuación se muestran algunos ejemplos muy conocidos en la teoría de juegos que se describen mediante determinadas alegorías y estereotipos culturales que no deben tomarse demasiado en serio:

Dilema del prisionero. El siguiente juego describe la conducta de dos prisioneros que tienen la oportunidad de callar o confesar un determinado crimen.

	confesar	callar
confesar	1,1	5,0
callar	0,5	4,4

Comprobar que existe un equilibrio de Nash que se produce en el par de estrategias (confesar, confesar).

Batalla de los sexos. El siguiente juego describe el estereotipo cultural de una pareja que dispone de dos espectáculos alternativos donde pasar una velada, la ópera y el fútbol. Aunque ambos prefieren pasar juntos la velada, la mujer, que actúa como jugador I, prefiere la ópera; mientras que el hombre, que actúa como jugador II, prefiere ir al fútbol.

	opera	fútbol
opera	2,1	-1,-1
fútbol	-1,-1	1,2

Comprobar que este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras que son (ópera, ópera) y (fútbol, fútbol).

Gallina. Dos automóviles se acercan frontalmente en una calle demasiado estrecha. Si uno se espanta y reduce su velocidad actúa como un gallina y pierde autoestima, mientras que el otro actúa como un tipo duro y gana autoestima.

	gallina	duro
gallina	1,1	0,2
duro	2,0	-1,-1

Comprobar que este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras que son (gallina, duro) y (duro, gallina).

Juego de las monedas. Dos jugadores lanzan simultáneamente una moneda cada uno. Si ambos obtienen el mismo resultado, el jugador I paga al II una unidad; si obtienen distinto resultado, es II quien paga a I una unidad.

	cara	cruz
cara	-1,1	1,-1
cruz	1,-1	-1,1

Comprobar que no hay equilibrio de Nash en estrategias puras.

Juegos de dos jugadores con infinitas estrategias

Cuando algún jugador dispone de un número infinito de estrategias, se dice que el **juego** es **infinito**. Esta posibilidad, lejos de complicar la búsqueda del juego, puede simplificarla.

Sea el juego $G=\{S_1,S_2;u_1,u_2\}$, y supongamos que la estrategia de cada jugador consiste en la elección de un número real dentro de cierto subconjunto (una cantidad a producir por una empresa, un presupuesto de publicidad, etc.) y que las funciones de pago $u_i(s_1,s_2)$ son diferenciables respecto a las estrategias. En tal caso podemos encontrar las curvas de reacción de ambos jugadores empleando las condiciones de primer orden del cálculo diferencial. Los **equilibrios de Nash** se hallan como puntos de **intersección de las curvas de reacción**. Si hubiese más de una solución puede apelarse a las condiciones de segundo orden para dar con las verdaderas del juego.

Para cada s_2 el jugador I elige s_1 de modo que maximice su utilidad, es decir, resuelve el problema:

$$\underset{s_1}{Max}\, u_1(s_1,s_2)\,,$$

con la condición de primer orden

$$\frac{\partial u_1(s_1,s_2)}{\partial s_1}=0\,,$$

obteniendo la curva de reacción del jugador I : $s_1=R_1(s_2)$.

Para cada s_1 el jugador II elige s_2 de modo que maximice su utilidad, es decir, resuelve el problema:

$$\underset{s_2}{Max}\, u_2(s_1,s_2)\,,$$

con la condición de primer orden

$$\frac{\partial u_2(s_1,s_2)}{\partial s_2}=0\,,$$

obteniendo la curva de reacción del jugador II: $s_2=R_2(s_1)$.

El equilibrio de Nash se obtiene encontrando el punto de intersección de las curvas de reacción $s_1=R_1(s_2)$ y $s_2=R_2(s_1)$, que son, en este caso, $\frac{\partial u_1}{\partial s_1}=0$ y $\frac{\partial u_2}{\partial s_2}=0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtendremos una solución (o soluciones) (s_1^*, s_2^*) verificando $s_1^* = R_1(s_2^*)$ y $s_2^* = R_2(s_1^*)$.

En general, para un juego con n jugadores $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ donde las estrategias de cada jugador consisten en la elección de un número real y las funciones de pago $u_i(s_1, s_2, ..., s_n)$ son diferenciables, una condición necesaria para que un conjunto de estrategias $(s_1^*, ..., s_n^*)$ formen un equilibrio de Nash es que se verifiquen simultáneamente las igualdades:

$$\frac{\partial u_1(s_1^*, ..., s_n^*)}{\partial s_1} = 0,$$
$$\frac{\partial u_1(s_1^*, ..., s_n^*)}{\partial s_2} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial u_1(s_1^*, ..., s_n^*)}{\partial s_n} = 0.$$

Ejemplo [Gardner, p. 61]**.** Sean x_1, x_2 los presupuestos para publicidad de las empresas I y II. Los beneficios de tales empresas vienen representadas por las funciones:

$$u_1(x_1, x_2) = 1000x_1 - x_1^2 - x_2^2, \quad u_2(x_1, x_2) = 1000x_2 - x_1 x_2 - x_2^2.$$

Obsérvese que los beneficios de la empresa I son crecientes respecto a x_1 hasta $x_1 = 500$, a partir de lo cual son decrecientes. También son crecientes respecto a x_2.

Maximizando los beneficios de la empresa I respecto a su propio presupuesto publicitario x_i, y considerando el presupuesto de publicidad de la otra empresa constante, cosa que sólo es verdad en el equilibrio, obtenemos

$$\frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 1000 - 2x_1 = 0,$$
$$\frac{\partial u_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1000 - x_1 - 2x_2 = 0.$$

El sistema tiene por solución $x_1^* = 500$, $x_2^* = 250$, que es aquella pareja de estrategias (gastos publicitarios) correspondiente al equilibrio de Nash.

Los beneficios de cada jugador que corresponden al equilibrio de Nash son

$$u_1(x_1^*, x_2^*) = 187{,}5\,, \qquad u_2(x_1^*, x_2^*) = 62{,}5\,.$$

Observación. La solución proporcionada por el equilibrio de Nash es una forma de dura competencia entre ambas empresas que les obliga a realizar cuantiosos gastos en publicidad. No obstante, ambas empresas podrían recurrir a una solución cooperativa que podría reducir considerablemente los gastos de publicidad, consistente en maximizar

$$u_1 + u_2 = 1000x_1 + 1000x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_1x_2\,,$$
$$\frac{\partial\, u_1 + u_2}{\partial x_1} = 1000 - 2x_1 - x_2 = 0$$
$$\frac{\partial\, u_1 + u_2}{\partial x_2} = 1000 - x_1 - 4x_2 = 0\,.$$

La solución del sistema es $x_1 = 428{,}6$, $x_2 = 142{,}9$. Los beneficios obtenidos por las empresas son en este caso $u_1 = 224{,}482$ y $u_2 = 81{,}423$.

Oligopolio y competencia imperfecta. El modelo de Cournot.

La teoría de juegos ayuda a analizar algunos modelos de competencia imperfecta. De hecho, el concepto de equilibrio de Nash ya había sido anticipado por otro autor llamado Cournot en un trabajo sobre el duopolio en 1838.

Consideremos un producto cuya ecuación de demanda es $q = M - p$, que no tiene costes fijos y que se produce con un coste marginal unitario constante $c << M$. Vamos a considerar varias estructuras empresariales en las empresas que constituyen la oferta.

Duopolio de Cournot (1838). La competencia entre dos empresas puede describirse por medio del equilibrio de Nash. Supongamos que dos empresas producen un bien idéntico en cantidades q_1 y q_2. Cada una de ellas utilizará como estrategia la cantidad q_i que produce. La oferta del mercado será $q = q_1 + q_2$, mientras que la función de demanda inversa será $p = M - q_1 - q_2$.

Las funciones de beneficios de cada empresa serán

$$B_1(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1 = (p - c)q_1 = (M - c - q_1 - q_2)q_1\,,$$
$$B_2(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2 = (p - c)q_2 = (M - c - q_1 - q_2)q_2\,,$$

donde hemos supuesto que no hay costes fijos y que los costes marginales son constantes e iguales a $c << M$.

La respuesta óptima de la empresa I ante la elección de una cantidad q_2 por parte de la empresa II será maximizar $B_1(q_1,q_2)$ respecto a q_1:

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_1} = M - c - 2q_1 - q_2 ,$$

luego la curva de reacción de I será $q_1 = R_1(q_2) = \dfrac{M-c-q_2}{2}$.

La respuesta óptima de la empresa II ante la elección de una cantidad q_1 por parte de la empresa I será maximizar $B_2(q_1,q_2)$ respecto a q_2:

$$\frac{\partial B_2}{\partial q_1} = M - c - 2q_2 - q_1 ,$$

luego la curva de reacción de II será $q_2 = R_2(q_1) = \dfrac{M-c-q_1}{2}$.

El equilibrio de Nash se da donde se cortan las curvas de reacción $q_1 = R_1(q_2)$ y $q_2 = R_2(q_1)$. Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2q_1 + q_2 &= M - c \\ q_1 + 2q_2 &= M - c, \end{aligned}$$

el equilibrio de Nash será $q_1^* = q_2^* = \dfrac{M-c}{3}$.

El precio de equilibrio del mercado será $p^*_{Cournot} = M - \dfrac{2}{3}(M-c)$.

El beneficio de cada empresa es $B_1(q_1^*,q_2^*) = B_2(q_1^*,q_2^*) = \left(\dfrac{M-c}{3}\right)^2$.

Obsérvese que el precio en el duopolio de Cournot es superior al de la competencia perfecta, que es igual al coste marginal c, pero es inferior al del monopolio $p_m^* = \dfrac{M+c}{2}$.

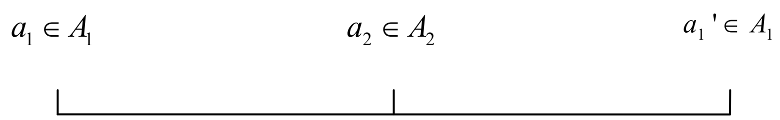
Juegos dinámicos de información completa y perfecta

Se dice que un juego es dinámico cuando los jugadores actúan en determinado orden y las decisiones se toman de forma consecutiva.

La **información** de un juego es **completa** cuando las funciones de pago de los jugadores son del dominio público. En el contexto de los juegos dinámicos se habla también de **información perfecta**, lo que indica que en cada etapa del juego **el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones** tomadas hasta ese momento.

Como prototipo de un juego dinámico de información completa y perfecta de tres etapas, consideremos un juego definido por las siguientes reglas:

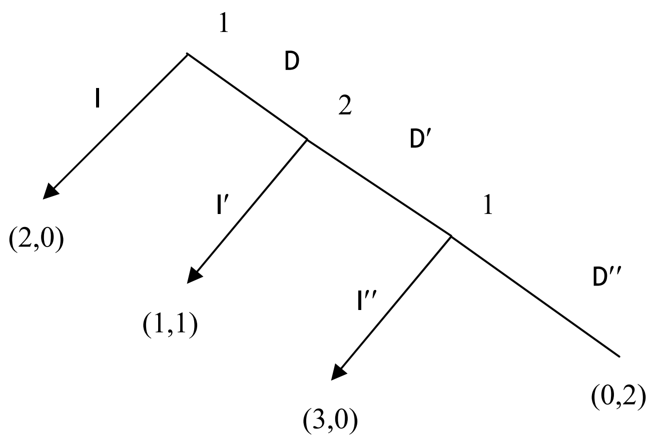
1. El jugador I escoge una acción $a_1 \in A_1$ de un determinado conjunto de acciones A_1.
2. El jugador II observa la decisión a_1 de I y escoge una acción $a_2 \in A_2$ de un determinado conjunto de acciones A_2.
3. El jugador I observa lo ocurrido en la etapa anterior y escoge, de nuevo una acción $a_1^{'} \in A_1$.



Las ganancias de ambos jugadores $u_1(a_1, a_2, a_1^{'})$ y $u_2(a_1, a_2, a_1^{'})$ son conocidas por ambos.

Nótese que no se emplea la palabra "estrategia" sino "acción". En los juegos dinámicos la palabra "estrategia" se reserva para designar todo un plan completo de acciones de respuesta de un jugador frente a las acciones del otro.

Como ejemplo sencillo de un juego de este tipo vamos a considerar el siguiente en forma de **árbol de decisión,** donde el jugador I decide dos veces:



En los juegos dinámicos el concepto de **estrategia pura** es más complicado. Se trata de un **plan completo de acción** de cada jugador donde debe especificar qué acciones decidirá en cada una de las situaciones en que pudiera tocarle jugar.

Por ejemplo, en el juego anterior las estrategias puras del jugador J_1 son: I – I″ (jugar I la primera vez y I″ la segunda), I – D″, D – I″ y D – D″.

Las estrategias puras del jugador J_2 son I′ y D′.

Obsérvese que, a primera vista, especificar dentro de las estrategias de J_1 las I – I″ o las I – D″ pudiera parecer superfluo, puesto que si J_1 realiza el movimiento I en su primera jugada el juego ya termina. No obstante, como veremos en la inducción retroactiva, la estrategia I – I″ sí debe ser considerada por el jugador J_2, que le obliga a elegir I′ en la etapa 2, lo que a su vez obliga a J_1 a elegir I en la etapa 1.

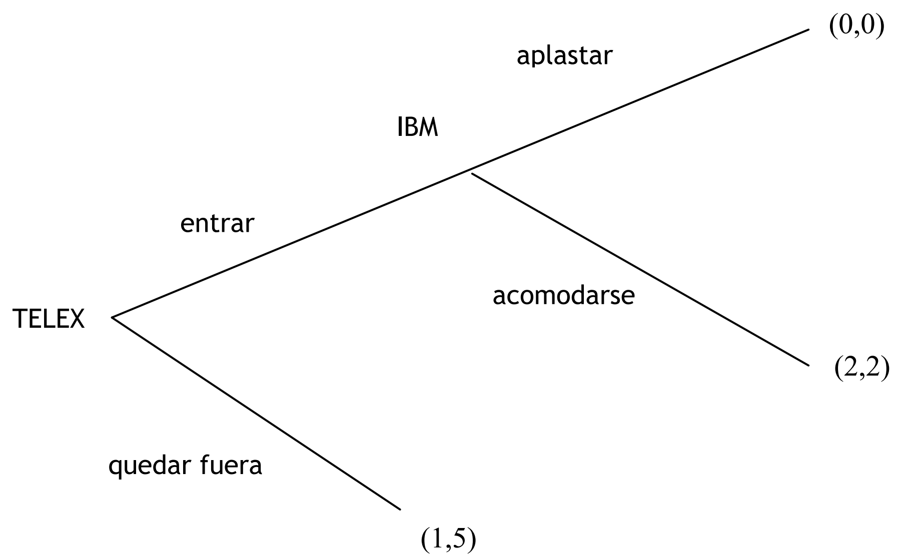
Consideremos un segundo ejemplo que pone de manifiesto la importancia de los juegos dinámicos en numerosas situaciones de conflicto que se presentan en la economía: el denominado “TELEX contra IBM”.

Se trata de dos empresas informáticas a finales de los años 70. IBM era un gigante, mientras que TELEX era una pequeña empresa deseosa de introducirse en el mercado. En el juego TELEX actúa en primer lugar decidiendo entre **entrar** o **quedarse fuera** del mercado.

IBM actúa en segundo lugar y ha lanzado una amenaza de aplastar a TELEX hundiendo los precios. Como puede o no cumplir su amenaza sus estrategias son **aplastar** o **acomodarse**.

Tras cualquiera de los movimientos que realice IBM el juego termina. El tema central de cualquier juego dinámico como este es el de la credibilidad de una amenaza o de una promesa.

La representación del juego en forma extensiva es la siguiente:



En este caso las estrategias puras de TELEX son “entrar” y “quedar fuera” y las de IBM “aplastar” y “acomodarse”.

¿Cómo resolver un juego dinámico, o en forma extensiva? Una primera alternativa consiste en escribirlo en forma normal o estratégica y aplicar el concepto de equilibrio de Nash que conocemos para juegos en forma normal.

Por ejemplo, el juego de TELEX contra IBM puede escribirse en forma normal como:

		IBM	
		aplastar	acomodarse
TELEX	entrar	0,0	2,2
	quedar fuera	1,5	1,5

Que presenta dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (quedar fuera, aplastar) y (entrar, acomodarse).

De forma análoga, el primer árbol de decisión puede representarse en forma normal como

		Jugador 2	
		I′	D′
Jugador 1	D - I″	1,1	3,0
	D - D″	1,1	0,2
	I - I″	2,0	2,0
	I - D″	2,0	2,0

Que presenta dos equilibrios de Nash relacionados con que J_1 comienza jugando I y el juego termina en la primera etapa.

No obstante, al representar en forma normal un juego que estaba originariamente en forma extensiva, puede perderse parte de la información original.

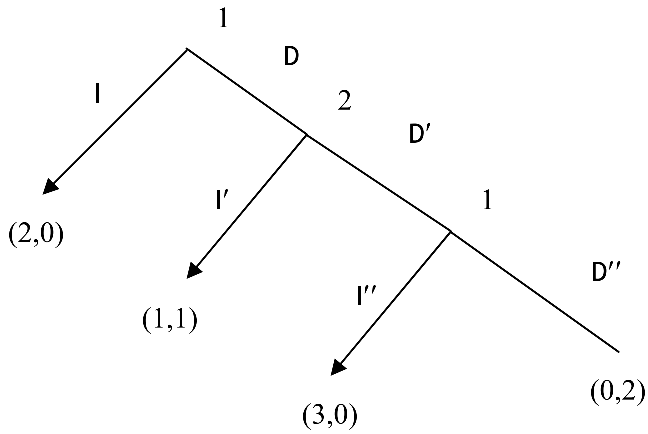
Consideremos el juego de TELEX contra IBM que cuenta con dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (quedar fuera, aplastar) y (entrar, acomodarse). El primero de los equilibrios tiene problemas de credibilidad, pues si J_1 decidiese entrar, a J_2 no le convendría ejecutar la jugada “aplastar”. La jugada “aplastar” sólo le conviene a J_2 si no tiene que ejecutarla. La amenaza “aplastar” tiene problemas de credibilidad. Así pues, el equilibrio de Nash (quedar fuera, aplastar) no parece plenamente satisfactorio.

Inducción hacia atrás

El **principio de inducción hacia atrás,** llamado también **principio de inducción retroactiva,** consiste en predecir el resultado en cada etapa futura del juego y entonces razonar hacia atrás en la etapa presente. Siguiendo este procedimiento comenzaremos el juego por la última etapa y retrocederemos progresivamente hacia la primera. La inducción retroactiva garantiza que al adoptarse una decisión en un momento determinado, la valoración de dicha acción **incorpora el resultado de las decisiones que serán óptimas en el futuro.**

Como veremos, la inducción hacia atrás es una forma natural de obtener un equilibrio de Nash creíble en un juego dinámico, pues siempre se intenta hallar, en cada etapa, la mejor respuesta ante cualquier acción del contrario.

Consideremos, por ejemplo, el árbol de decisión:



Para resolverlo procederemos de la siguiente forma:

Empezamos por la **tercera etapa**: el jugador 1 elegirá I″ como respuesta óptima ante D′: $I'' = R_1(D')$.

En la **segunda etapa** el jugador 2 prevé que el 1 elegirá I″ en la tercera etapa, por lo que elegirá óptimamente I′ con ganancia 1: $I' = R_2(D)$.

En la primera etapa el jugador 1 prevé que el jugador 2 elegirá I′ en la segunda etapa, luego elegirá I con ganancia 2.

En este caso diremos que el **perfil estratégico de equilibrio o trayectoria de equilibrio del juego** es I, I′ , I″.

De forma más general, en este tipo de juegos el jugador I escoge una acción $a_1 \in A_1$ de su espacio de estrategias, y el jugador II observa la acción de I y elige una acción $a_2 \in A_2$.

Para resolver el juego por inducción hacia atrás comenzamos por la segunda etapa, donde el jugador II se enfrenta al problema de elegir la mejor respuesta $R_2(a_1) \in A_2$, dada una acción $a_1 \in A_1$ del jugador I. Así, el jugador II resuelve el problema de optimización:

$$R_2(a_1) = \underset{a_2 \in A_2}{Max}\, u_2(a_1, a_2) .$$

Supongamos que la solución a este problema de optimización es única.

El jugador I sabe también resolver este problema y puede prever la acción de II ante $a_1 \in A_1$. Por tanto, el jugador I resolverá el siguiente problema en la primera etapa del juego:

$$a_1^* = \underset{a_1 \in A_1}{Max}\, u_1(a_1, R_2(a_1)) ,$$

cuya solución, que suponemos única, es $a_1^* \in A_1$.

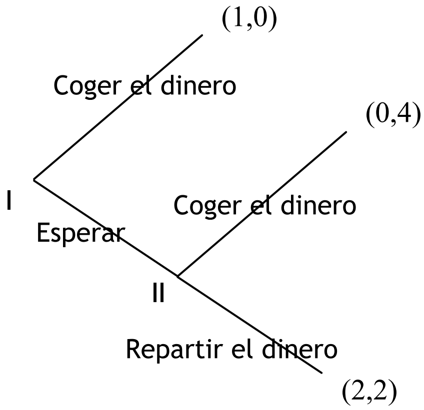
En tal caso diremos que el par de acciones $(a_1^*, R_2(a_1^*))$ es el **resultado del juego por inducción hacia atrás**.

La inducción hacia atrás proporciona un criterio adicional al del equilibrio de Nash que permitirá desechar ciertos equilibrios de Nash por tener **problemas de credibilidad**. La teoría de juegos considera la inducción hacia atrás como un criterio adicional o un **refinamiento del equilibrio de Nash**, en el sentido que se imponen condiciones de equilibrio adicionales a las especificadas por el equilibrio de Nash (ver Vega Redondo (2000), capítulo 4).

La inducción hacia atrás permite desechar **amenazas no creíbles**. En el juego de TELEX contra IBM, la solución del juego por inducción hacia atrás es la pareja de acciones (entrar, acomodarse). El otro equilibrio de Nash del juego en forma normal (quedarse fuera, aplastar) presenta un problema de credibilidad, pues la amenaza "aplastar" no maximiza la utilidad de IBM en el momento que va a ejecutar la amenaza. En cambio, la estrategia de IBM "acomodarse" maximiza la utilidad de IBM en la segunda etapa.

La **credibilidad de promesas** también puede analizarse por medio de la inducción hacia atrás. Consideremos el siguiente juego de reparto. Se comienza con 1 euro sobre la mesa. El jugador I puede cogerlo o esperar. Si lo coge finaliza el juego y el jugador I se queda con un euro. Si el jugador I espera, el euro depositado en la mesa se cuadruplica. Entonces le toca al jugador II, quien puede coger los 4 euros o repartirlos equitativamente con el jugador I.

La representación del juego en forma extensiva es la siguiente:

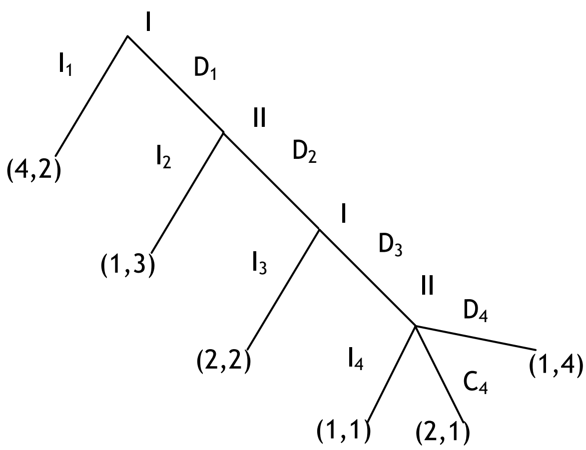


La representación del juego en forma normal es:

	Coger el dinero	Repartir el dinero
Coger el dinero	1,0	1,0
Esperar	0,4	2,2

El equilibrio de Nash (coger el dinero, coger el dinero) es también el que se obtiene por inducción hacia atrás. Esto significa que la promesa "si esperas repartiré el dinero contigo" encierra un problema de credibilidad.

Ejemplo. Consideremos el juego representado por el árbol de decisiones que figura a continuación:



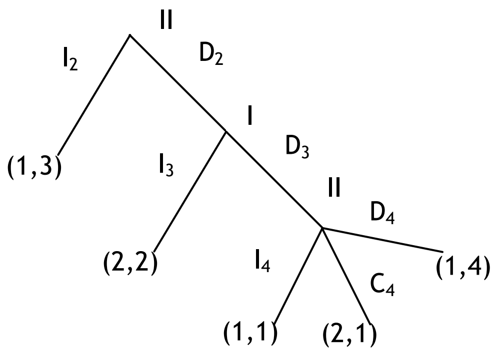
Resolviendo del juego por inducción hacia atrás, el perfil estratégico de equilibrio de Nash del juego es el conjunto de acciones (I_1, I_2, I_3, D_4), es decir que:

El jugador I juega I_1 en la primera etapa.
El jugador II juega I_2 en la segunda etapa.
El jugador I juega I_3 en la tercera etapa.
El jugador II juega D_4 en la cuarta etapa.

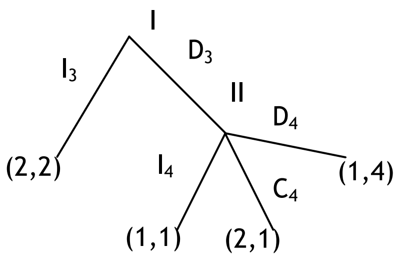
Este equilibrio de Nash obtenido por inducción hacia atrás es además, en terminología de Selten, un **equilibrio de Nash perfecto en subjuegos,** porque **la restricción de la estrategia de equilibrio a cada subjuego sigue siendo un equilibrio**, al haber sido construido por inducción hacia atrás. Veamos esto con más detenimiento en los subjuegos del juego anterior.

(I_1 , I_2 , I_3 , D_4) es un perfil estratégico de equilibrio del juego total.

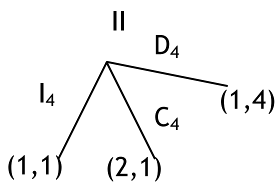
(I_2 , I_3 , D_4) es un perfil estratégico de equilibrio del subjuego:



(I_3, D_4) es un perfil estratégico de equilibrio del subjuego:



(D_4) es un perfil estratégico de equilibrio del subjuego:



Como puede observarse, **la inducción hacia atrás conduce a equilibrios de Nash que son perfectos en subjuegos**, porque en el proceso de construcción se van obteniendo, desde el final hacia el principio, los diferentes equilibrios de Nash en cada uno de los subjuegos.

Referencias

K. Binmore (1993): *Teoría de Juegos*. McGraw-Hill, Madrid.

F. Costales (2000): *Teoría de Juegos*. [Disponible en http://www.monografias.com/trabajos5/teorideju/teorideju.shtml#intro].

M.D. Davis (1986): *Introducción a la Teoría de Juegos*. Alianza Universidad, Madrid.

D. Fudenberg, J. Tirole (1995): *Game Theory*. MIT Press, Cambridge.

R. Gardner (1996): *Juegos para empresarios y economistas*. Antoni Bosch, Barcelona.

R. Gibbons (1992): *Un primer curso en Teoría de Juegos*. Antoni Bosch, Barcelona.

J.C. Martínez Coll (2001): *Introducción a la Teoría de Juegos*. En *La economía de mercado: virtudes e inconvenientes*. [Disponible en http://www.eumed.net/cursecon/juegos].

J.C. Martínez Coll (2001): *Los mercados no competitivos*. En *La economía de mercado: virtudes e inconvenientes*. [Disponible en http://www.eumed.net/cursecon/8/index.htm].

La Teoría de Juegos, http://www.deguate.com/infocentros/gerencia/mercadeo/mk10.htm.