Poincaré, el último matemático universalista

José M. García Calcines
Profesor Asociado Doctor de Geometría y Topología
Departamento de Matemática Fundamental, Universidad de La Laguna

Introducción

El estereotipo tradicional del matemático es el de soñador distraído, barbudo, buscando siempre sus gafas sin darse cuenta de que están sobre sus narices... Pocos matemáticos se ajustan realmente a este estereotipo; pero Poincaré sí. Era de aspecto delgado, miope, se concentraba en cualquier lugar, incluso en los tranvías; tenía una memoria portentosa. Su forma habitual de trabajar era resolver un problema completamente en su cabeza; una vez resuelto, escribía el artículo de un tirón. También destacaba especialmente por su total impericia en el dibujo. Tal era su fama que le conocían con el sobrenombre de "ambidiestro" porque "podía dibujar igual de mal con la derecha que con la izquierda".

Poincaré es uno de los grandes genios de todos los tiempos. Con frecuencia se dice que el siglo XIX comenzó bajo la sombra de Gauss y terminó con el dominio de un genio de magnitud similar: Poincaré. De hecho, Jean Dieudonné decía de ellos: *Ambos eran matemáticos universales en el sentido supremo, y ambos realizaron contribuciones importantes a la astronomía y física matemática. Si los descubrimientos de Poincaré en la teoría de números no son iguales a los de Gauss, sus logros en la teoría de funciones son al menos del mismo nivel. Si Gauss fue el iniciador de la teoría de las variedades diferenciables, Poincaré desempeñó el mismo papel en la topología algebraica. Poincaré es la figura más importante en la teoría de ecuaciones diferenciales, y es el matemático que, después de Newton, efectuó el trabajo más destacado en mecánica celeste.*

Tanto Gauss como Poincaré tuvieron pocos estudiantes, ya que les gustaba trabajar solos. Pero mientras que Gauss se resistía a publicar sus descubrimientos, la lista de artículos de Poincaré se acerca a quinientos, sin incluir los muchos libros y notas de clase producto de sus enseñanzas en la Sorbona. Sus aportaciones pertenecen a prácticamente todos los campos matemáticos de la época, tanto puros como aplicados: ecuaciones diferenciales, teoría general de funciones, álgebra, aritmética, teoría de grupos, topología, mecánica celeste, mecánica de fluidos, geodesia, física matemática (teoría de la relatividad y cuántica), filosofía de las ciencias, enseñanza, divulgación, etc. Podemos decir que Poincaré no fue sólo un gran matemático, sino también un gran físico matemático y filósofo de la ciencia.

Aunque murió antes del comienzo de la Primera Guerra Mundial, proporcionó temas de gran interés a los matemáticos actuales. Fue pionero en geometría hiperbólica y fundador de la topología; inventó métodos cualitativos para el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales y los aplicó al movimiento de los planetas. Su trabajo en este tema fue el precursor del nacimiento de otro tema, de interés actual: la teoría del caos y los sistemas dinámicos. Además, su trabajo en la física matemática fue de gran importancia. Se le considera por muchos científicos como codescubridor, junto con Einstein y Lorentz, de la teoría especial de la relatividad.

1. Poincaré: su vida

Jules Henri Poincaré nació el 29 de abril de 1854 en Nancy, capital histórica de Lorena, al nordeste de Francia, hijo de León Poincaré y Eugénie Launois. Éstos tenían 26 y 24 años de edad, respectivamente, cuando nació. Su madre fue parte importante en su formación básica, dedicando toda su atención a la educación de Henri y de su hermana Aline. Sorprendentemente, se sabe poco de su madre. Su padre fue médico y ejerció su profesión durante toda su vida en Nancy, donde también fue profesor de la facultad de medicina.

La familia de Poincaré era bastante ilustre. Su tío Antoine fue Inspector General de Caminos y Puertos y tuvo dos hijos: Raymond, primer ministro de Francia varias veces y Presidente de la República durante la Primera Guerra Mundial (entre 1913 y 1920), y Lucien, Director General de Enseñanza Secundaria.

En parte debido a los constantes desvelos de la madre, el desarrollo mental de Poincaré fue extrordinariamente rápido. Aprendió a hablar muy precozmente, pero también de modo defectuoso, debido a que pensaba con tanta rapidez que no podía trasladar el pensamiento a la palabra. Durante su infancia, Henri Poincaré tuvo graves problemas de salud. En primer lugar, su coordinación motora fue precaria. Debido a sus problemas de motricidad nunca pudo escribir correctamente y estaba incapacitado para los deportes y el dibujo. Como dificultad añadida, Poincaré también tenía una severa miopía. A la edad de cinco años sufrió un fuerte ataque de difteria complicado con parálisis laríngea, que persistió durante nueve meses. Este accidente dio lugar a que durante largo tiempo fuera delicado y tímido, pero después sacó fuerzas de flaqueza para dedicarse a los juegos propios de los niños de su edad. De aspecto triste e introvertido, algunos creyeron detectar en su conducta los síntomas de un retraso mental. En realidad era un niño con una inteligencia fuera de lo normal y poseía una memoria asombrosa.

En 1862, esto es, a los ocho años, ingresó en el Liceo de Nancy (renombrado en 1913 como Liceo Henri Poincaré, en su honor), donde estudió durante once años. Los estudios primarios de Poincaré fueron brillantes, aunque la matemática no fuera la disciplina que atrajera al principio su interés. Su primera pasión fue la historia natural, y toda su vida continuó siendo amante de los animales. La primera vez que tomó un rifle en sus manos se le disparó accidentalmente y mató a un ave sin proponérselo. Este accidente le afectó tanto que en su vida posterior, salvo la época del servicio militar, se negó a tocar un arma de fuego. A la edad de nueve años dio la primera demostración de lo que iba a ser uno de sus mayores triunfos. El maestro de composición declaró que un breve ejercicio del joven Poincaré, original en su forma y en su fondo, constituía “una pequeña obra maestra” y lo conservó como uno de sus tesoros. Pero también aconsejó a su discípulo que fuera más convencional, si deseaba causar una buena impresión en los profesores de la escuela. La pasión por la música, especialmente sinfónica, acompañó a Poincaré toda su vida.

Apartándose de los juegos bruscos propios de sus compañeros, Poincaré inventaba los suyos. Como aprendía las lecciones con tanta facilidad, empleó la mayor parte de su tiempo en diversiones y en ayudar a su madre en las tareas de su casa. En esa fase precoz de su carrera Poincaré ya mostró algunas de las más notables características de su facilidad para abstraerse del mundo. Frecuentemente se olvidaba de comer, y casi nunca recordaba si había o no desayunado.

La diversión principal de Poincaré era la lectura, donde por primera vez se mostró su desusado talento. Una vez leído un libro, cosa que hacía con increíble velocidad, lo memorizaba para siempre, y podía citar la página y la línea donde se narrara un determinado acontecimiento. Conservó esta poderosa memoria toda su vida. La capacidad para recordar con extraordinaria precisión una serie de sucesos acaecidos largo tiempo antes era también extraordinariamente potente. Sin embargo, Poincaré solía calificar su memoria como "mala". Su defectuosa visión física contribuyó quizá a otra peculiaridad de su retentiva. La mayoría de los matemáticos parece que recuerdan los problemas y fórmulas en su mayor parte de un modo visual, pero Poincaré los recordaba casi totalmente de un modo auditivo. Incapaz de distinguir la pizarra cuando era estudiante, se sentaba lejos y memorizaba lo que oía de un modo perfecto sin tomar notas.

La pasión por la matemática se bosquejó en la adolescencia, alrededor de los quince años. Desde el principio mostró una particularidad que duró toda su vida: hacía sus operaciones matemáticas mentalmente, mientras paseaba inquieto, y sólo acudía al papel después de una madura meditación. Ni la charla, ni los ruidos le perturbaban cuando estaba trabajando. Su profesor de matemáticas dijo de él que era un "monstruo de las matemáticas".

La guerra franco-prusiana estalla en Francia en 1870, cuando Poincaré tenía 16 años. Aunque era demasiado joven y demasiado débil para un servicio activo, Poincaré participó de todos los horrores, pues Nancy, donde vivía, sufrió la ola de la invasión, y el joven acompañó a su padre en sus visitas al hospital. Más tarde, pasando terribles dificultades, volvió con su madre y hermana a Arrancy para ver lo que había sucedido a sus abuelos paternos, en cuyos espaciosos jardines habían transcurrido, durante las vacaciones escolares, los días más felices de su infancia. Arrancy estaba cerca del campo de batalla de Saint-Privat. Para llegar a la ciudad tuvieron que pasar a través de campos desiertos y quemados, sufriendo un frío glacial. Al final llegaron a su destino, encontrando que la casa había sido saqueada. Los abuelos carecían de todo, y el alimento les era proporcionado por una pobre mujer que se había negado a abandonar las ruinas de su casucha y que insistía en compartir con ellos su modesta ración de comida. Poincaré jamás olvidó esto, ni tampoco olvidó la larga ocupación de Nancy por el enemigo. Fue durante la guerra cuando aprendió alemán. Ávido de saber lo que los alemanes decían de Francia y de sí mismo, Poincaré aprendió su lengua. Lo que vio y lo que aprendió de los relatos oficiales de los propios invasores le hicieron un ardiente patriota, pero, al igual que Hermite, jamás confundió la matemática de los enemigos de su país con sus actividades más prácticas.

Poincaré aprobó sus primeros grados (bachiller en letras y en ciencias) antes de especializarse. Esos exámenes se celebraron en 1871, cuando tenía 17 años, y estuvo a punto de ser suspendido en matemática. Llegó tarde, y azorado fracasó en una prueba tan sencilla como es obtener la suma de una progresión geomética convergente. Pero su fama le había precedido: "Cualquier estudiante que no fuera Poincaré habría sido suspendido", declaró el presidente del tribunal. Luego se preparó para los exámenes de ingreso en la Escuela de Ingenieros de Montes, donde asombró a sus compañeros al obtener el primer premio en matemática sin haberse molestado en tomar apuntes. Sus compañeros, creyéndole un farsante, le quisieron someter a una prueba, encargando a un estudiante de cuarto año que le presentara un problema matemático que les parecía particularmente difícil. Sin una aparente meditación, Poincaré encontró la solución con rapidez, y siguió paseando, dejando cariacontecidos a sus burlones compañeros que se preguntaban cómo había hallado la solución. No son pocos los que se han hecho la misma pregunta en otras condiciones similares de la carrera de Poincaré. Jamás parecía meditar cuando sus colegas le presentaban una dificultad matemática: la réplica venía como una flecha.

Al terminar este año pasó, ocupando el primer lugar, a la Escuela Politécnica, el centro de estudios superiores más prestigioso de la estructura académica francesa, y en el que las matemáticas despempeñaban un papel central, en donde adquirió cierta reputación como promesa matemática. Varios son los relatos que se conservan de su examen. Unos dicen que cierto miembro del tribunal, prevenido de que el joven Poincaré era un genio matemático, suspendió el examen durante tres cuartos de hora, para idear alguna difícil cuestión, una refinada tortura. Pero Poincaré la resolvió sin dificultad, y el inquisidor felicitó cariñosamente al alumno, comunicándole que había obtenido la máxima calificación.

En la Politécnica, Poincaré se distinguió por su brillantez en la matemática, por su incompetencia en todos los ejercicios físicos, incluyendo la gimnasia y las artes militares, y por su manifiesta incapacidad para dibujar. A pesar de esta ineptitud para los ejercicios físicos y el dibujo, Poincaré era muy popular entre sus compañeros. Al final del año organizaron una exhibición pública de sus "obras artísticas", cuidadosamente rotuladas en griego: "Esto es un caballo..." y así sucesivamente. Pero la incapacidad de Poincaré para el dibujo también tuvo su lado serio cuando estudió geometría; entonces perdió el primer lugar, ocupando el segundo puesto.

Al dejar la Politécnica en 1875, con 21 años, Poincaré ingresó en la Escuela Nacional Superior de Minas, a la que solían ir los licenciados más distinguidos de la Politécnica, con la idea de convertirse en ingeniero. Allí no le faltaron profesores ilustres, entre ellos el matemático Charles Hermite. Sus estudios técnicos, aunque fielmente realizados, le dejaban ciertas horas de ocio que dedicaba a la matemática, y mostró lo que había dentro de él abordando un problema general de ecuaciones diferenciales, bajo la asesoría de Hermite. En marzo de 1879 se graduó como Ingeniero.

Poincaré no estaba destinado a ser ingeniero de minas, aunque durante su aprendizaje demostró que tenía al menos el valor para serlo. Por un corto período de tiempo, mientras hacía aún su trabajo doctoral, ejerció como ingeniero en la región de Vesoul, al nordeste de Francia. Estuvo presente en la explosión de una mina en Magny, en agosto de 1879, en la cual murieron dieciocho mineros. Llevó la investigación oficial del accidente. Nunca abandonó por completo su carrera de minas por las matemáticas y llegó a ser Ingeniero Jefe del Cuerpo de Minas en 1893, e Inspector General en 1910.

En 1879 presentó su tesis doctoral en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Paris, con el título *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux differénces partielles*, que trataba sobre teoremas de existencia y no sobre métodos de resolución en ecuaciones diferenciales, para aspirar al grado de doctor en ciencias matemáticas. Poincaré encontró una nueva forma de estudiar las propiedades de las ecuaciones diferenciales no lineales. No sólo encaró la cuestión de integrar dichas ecuaciones, sino que también fue la primera persona en estudiar sus propiedades geométricas generales. Más tarde se daría cuenta de que podrían ser usadas para modelar el comportamiento de muchos cuerpos en movimiento libre en el sistema solar.

La tesis, supervisada por Darboux, recibió algunas críticas, sobre todo en lo referente a su rigor matemático. Poincaré era una persona fuertemente intuitiva y con grandes y novedosas ideas, pero no se ocupaba de los detalles. Años más tarde, Darboux diría:

> Vi clara e inmediatamente que la tesis era superior al tipo ordinario y merecía ampliamente ser aceptada. Seguramente contenía resultados suficientes para proporcionar material a algunas buenas tesis. Pero debo aclarar, para que se tenga una idea exacta de cómo trabajaba Poincaré, que muchos puntos necesitaban correcciones o explicaciones. Poincaré era un hombre dominado por la intuición. Una vez que llegaba a la cima, jamás volvía sobre sus pasos. Quedaba satisfecho pasando a través de todas las dificultades, y dejaba a los demás el trabajo de pavimentar las carreteras destinadas a conducir más fácilmente hasta la meta. Voluntariamente se sometió a hacer las correcciones que parecían necesarias, pero me explicó que tenía entonces otras muchas ideas en su cabeza, y que ya estaba ocupado con algunos de los grandes problemas cuyas soluciones nos pensaba dar.

Finalmente obtuvo el título de Doctor en Ciencias el 1 de agosto de 1879. Inmediatamente después, el 1 de diciembre del mismo año, obtuvo su primer cargo académico en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Caen, como profesor de Análisis Matemático. Estuvo sólo dos años, porque en 1881 fue propuesto para ocupar una plaza en la Facultad de Ciencias de París, ciudad en donde pasaría el resto de su vida, desde donde reinó como el líder indiscutible de los matemáticos franceses y, presumiblemente, del mundo. Ese mismo año se casa. Tuvo un matrimonio feliz, del que nacieron un hijo y tres hijas que le proporcionaron una gran dicha, especialmente durante su infancia.

En 1886 fue ascendido a Encargado de Curso de Mecánica y Física Experimental. Obtuvo en ese año la Cátedra de Física Matemática, hasta que en 1896 desempeñó la Cátedra en Astronomía Matemática. Fue elegido miembro de la Académie des Sciences en 1887, a la temprana edad de 32 años, consiguiendo 31 de los 55 votos posibles, lo que nos da una idea del aprecio en que le tenían sus colegas. Su proponente dijo algunas cosas muy atinadas acerca de él. La mayor parte de los matemáticos suscribieron principalmente esta verdad:

> La obra de Poincaré está por encima de todo elogio, y nos recuerda inevitablemente lo que Jacobi escribía de Abel: que había planteado cuestiones que antes de él no habían sido imaginadas. Debe, en efecto, reconocerse que hemos sido testigos de una revolución en matemática comparable en cualquier aspecto a la que tuvo lugar hace medio siglo con la aparición de las funciones elípticas.

Entre 1904 y 1908 ofreció cursos en la Escuela Politécnica y de 1904 a 1910 en la Escuela Profesional de Estaciones y Telégrafos. También fue admitido en 1909 en la Academia de la Lengua Francesa. Tenía una prosa culta, clara y elegante, hasta el punto de que se le consideraba un notable literato. Los primeros problemas de salud (una hipertrofia de próstata) aparecieron en 1908 mientras se celebraba el Congreso Internacional de Matemáticos en Roma. En esta ocasión no pudo pronunciar su conferencia sobre *El porvenir de las matemáticas*. Con la habilidad y el buen hacer de los médicos italianos pudo superar el problema en dicha ocasión, pero cuatro años más tarde, el 9 de julio de 1912, tuvo que someterse a una intervención. En principio el resultado parecía satisfactorio, pero le sobrevino una embolia y el 17 de julio moría en París.

Poincaré tenía tan solo 58 años cuando murió. De una esquela en el *Times*:

> M. Henri Poincaré, aunque la mayoría de sus amigos no lo sabía, había tenido recientemente una operación en una clínica de reposo. Parecía tener gran mejoría, y estaba a punto de salir por primera vez esta mañana. Murió repentinamante mientras se vestía.

A su funeral asistió mucha gente importante en el mundo de la ciencia y de la política:

> El Presidente del Senado y la mayoría de los miembros del Ministerio estaban presentes, y habían delegaciones de la Academia Francesa, la Academia de las Ciencias, la Sorbona, y muchas otras instituciones públicas. El Príncipe de Mónaco estaba presente, el Bey de Túnez estaba representado por sus dos hijos, y el Príncipe Roland Bonaparte asistió como Presidente de la Sociedad Geográfica de París. La Sociedad Real estaba representada por su secretario, Sir Joseph Larmor, y por el Astrónomo Real, Mr. F.W. Dyson.

2. Su obra

El período creador de Poincaré se abre con su tesis de 1878 y termina con su muerte en 1912, cuando estaba en la cumbre de su capacidad. En este lapso de tiempo relativamente breve de treinta y cuatro años acumuló una cantidad increíble de trabajos, si consideramos las dificultades que entrañan la mayor parte de ellos. Suman casi quinientos sobre nuevas matemáticas, tratándose en muchos casos de extensas memorias, y más de treinta libros, que se refieren prácticamente a todas las ramas de la física matemática, de la física teórica y de la astronomía teórica entonces existentes.

Como hemos comentado, Poincaré hizo aportaciones originales en todas las disciplinas del quehacer matemático de su época. Las contribuciones matemáticas fueron tan numerosas que es difícil resumirlas. Sin embargo, hay tres momentos importantes en la carrera de Poincaré, en los que culmina su obra más original y profunda. Han sido estos puntos de su vida creadora los que, a la postre, constituirían auténticos programas de investigación para los matemáticos del siglo XX. Éstos son la creación de las funciones automorfas, el ataque al problema de los tres cuerpos para resolver una cuestión sobre la estabilidad del sistema solar y finalmente, la creación de un nuevo campo del hacer matemático: la topología.

2.1. Las funciones automorfas y el modelo del plano hiperbólico.

Poincaré es el creador de las funciones automorfas de una variable compleja, llamadas por él *fuchsianas*, dando también un enlace con los modelos de las geometrías métricas no euclídeas, concretamente, con la geometría hiperbólica.

Una función *automorfa* $f(z)$ de una variable compleja z es una función analítica en un dominio D y que es invariante bajo un grupo numerable de transformaciones fraccionales lineales, también llamadas transformaciones de Möbius:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}.$$

La teoría de las funciones automorfas generaliza a la de las funciones elípticas (periódicas con doble período). Casos particulares de funciones automorfas habían sido estudiados antes de Poincaré, como por ejemplo las funciones periódicas, pero las generalizaciones que éste introdujo le permitió descubrir funciones hasta ese momento desconocidas, como las *zeta-fuchsianas*, que además podían ser utilizadas, como demostró él mismo, para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes algebraicos. También descubrió que las funciones automorfas que son invariantes bajo el mismo grupo están conectadas por una ecuación algebraica. Recíprocamente, encontró que las coordenadas de un punto en cualquier curva algebraica pueden ser expresadas en términos de funciones automorfas.

Hay que destacar aquí que sus trabajos sobre ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales son considerados por algunos matemáticos como los más profundos del siglo.

A título de curiosidad, Félix Klein (1849-1925) se vio en una dura mitad-competencia, mitad-colaboración con Poincaré, acerca de las funciones automorfas, durante los años 1881-1882. En correspondencia con Poincaré se intercambiaron muchas ideas buenas y profundas que permitieron un gran desarrollo en esta teoría. Ambos matemáticos acabaron mal; al parecer Klein se molestó muchísimo con Poincaré por la alta opinión y admiración que éste último tenía por el trabajo de Lazarus Fuchs. El trabajo de Fuchs llevó a Poincaré a introducir los llamados *grupos fuchsianos*, concepto fundamental en la teoría de las funciones automorfas.

Como hemos comentado, existe una conexión entre la teoría de las funciones automorfas con la geometría no euclídea. Poincaré llegó a desarrollarla gracias a un modelo de geometría hiperbólica que él mismo diseñó: el *disco hiperbólico* de Poincaré. Aunque Lobachevsky, Bolyai y Gauss habían desarrollado la nueva teoría de la geometría hiperbólica, los matemáticos aún no se sentían tan seguros de su validez como lo estaban de la euclídea. Estaban preocupados de que hubiera alguna contradicción en esta nueva teoría, puesto que parecía demasiado extraña e inconsistente con la euclídea. Sin embargo, poco a poco los matemáticos empezaron a encontrar modelos de la geometría hiperbólica que le daban consistencia. En particular, Poincaré, llegó a su modelo, el disco hiperbólico, descrito por él en una memoria de 1887. Este modelo de geometría hiperbólica sirvió al rol de sus nuevas funciones automorfas en el mismo modo que la geometría euclídea había servido para las funciones elípticas. La consistencia de la geometría hiperbólica quedó confirmada a través de los modelos de Klein-Beltrami y Poincaré.

El disco hiperbólico de Poincaré es el disco 2-dimensional $\{x \in R^2 : ||x|| < 1\}$ dotado del elemento de arco:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

También se interpreta como un espacio métrico con la siguiente distancia: dados dos puntos A y B del disco, entonces la distancia de A a B es el logaritmo neperiano

$$d(A,B) = ln\left(\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{SB}}{\overline{AS}}\right),$$

donde $\overline{AT}$, $\overline{TB}$, $\overline{SB}$, $\overline{AS}$ son distancias euclídeas, siendo S y T los puntos de corte de la frontera del disco con el arco circular ortogonal a dicha frontera y que pasa por los puntos A y B .

En este modelo del plano hiperbólico, los puntos son los puntos del disco, y las "rectas" son los arcos circulares ortogonales con la frontera del disco. Ciertas distancias que resultan constantes en la geometría euclidiana resultan infinitas cuando nos aproximamos a dicha frontera. Los ángulos son medidos por sus valores como ángulos euclídeos.

2.2. Ataque al problema de los tres cuerpos. Base de la teoría del caos.

Poincaré produjo profundas contribuciones en mecánica celeste. Su primer gran triunfo en astronomía matemática (1889) se debió a un intento de resolución del problema de los n cuerpos. En 1885, Gösta Mittag-Leffler (1845-1927), como profesor de Matemáticas Puras en la Universidad de Estocolmo, le propone al rey Oscar II de Suecia y Noruega la realización de un concurso matemático para commemorar el sexagésimo aniversario del monarca, que tendría lugar el 19 de enero de 1889.

Oscar II, rey de Suecia y hasta 1905 de Noruega, fue un rey muy culto, doctor en filosofía por la Universidad de Uppsala. Escribió extensa y eruditamente. También sentía una manifiesta debilidad por las matemáticas; en 1883 ya había ayudado a Mittag-Leffler en la fundación de la revista *Acta Mathematica*. Acepta la propuesta de Mittag-Leffler, y ofrece un premio consistente en una medalla de oro y 2500 coronas suecas.

Mittag-Leffler se pone manos a la obra y constituye un comité científico para el concurso, formado por Hermite, Weierstrass y el mismo Mittag-Leffler. Este comité decide las reglas del concurso; el merecedor del premio debía de ser aquél que resolviera satisfactoriamente alguna de las cuatro preguntas formuladas por el comité. De las cuatro preguntas del concurso Weierstrass formuló una y Hermite tres. La planteada por Weierstrass versaba sobre el problema de los n cuerpos y parecía la más importante. Según él, su solución ampliaría el conocimiento sobre el sistema del Universo:

> Dado un sistema formado por un número arbitrario de puntos materiales que se atraen mutuamente de acuerdo con las leyes de Newton, se propone, bajo la hipótesis de que un choque entre dos o más partículas no tiene nunca lugar, desarrollar las coordenadas de cada partícula en una serie procedente de funciones conocidas del tiempo y que sean uniformemente convergentes para cualquier valor del tiempo.

Para $n = 2$ el problema había sido completamente resuelto por Newton; cuando n supera a tres, pueden realizarse algunas de las reducciones aplicables al famoso problema de los tres cuerpos. En general, es una cuestión muy dura sobre sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Para el caso $n = 3$, suponiendo que la posición de cada partícula en cada instante de tiempo viene dada por

$$\theta_i(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

y que su masa es m_i , se traduce en el sistema de nueve ecuaciones diferenciales no lineales siguiente:

$$\theta_i''(t) = G\sum_{k\neq i} \frac{m_i m_k(\theta_k - \theta_i)}{||\theta_k - \theta_i)||^3}, \quad i = 1, 2, 3 \, ,$$

con las correspondientes condiciones iniciales, siendo G la conocida constante gravitatoria universal.

A Poincaré le costó un poco tomar la decisión de presentarse al concurso, por lo que Mittag-Leffler le escribió animándole a participar. Poincaré le contesta confirmándole que lo hará intentando resolver el problema de los tres cuerpos. Le comenta a Mittag-Leffler que espera atacar el problema general no ya para resolverlo, empresa que le parece casi imposible, sino al menos para obtener unos resultados nuevos lo suficientemente relevantes para enviarlos al concurso. A lo largo de dos años, Poincaré trabajó de manera persistente en el problema de los tres cuerpos. Al final de esos dos años, Poincaré había cimentado completamente su teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Consciente de la gran dificultad en la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, Poincaré introduce los métodos cualitativos, parcialmente originados en su tesis. El análisis cualitativo consiste en deducir propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales sin necesidad de calcularlas explícitamente.

Poincaré presenta una memoria en mayo de 1888. Esta memoria, que suponía un avance espectacular en los métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales, al combinar métodos cuantitativos con cualitativos y geométricos, ha sido considerada como el primer tratado sobre teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Contenía tantas ideas nuevas que contribuyó significativamente a la idea general de que muy poca gente era capaz de entender los resultados de Poincaré.

Se presentaron al concurso en total doce memorias, de las cuales cinco, entre ellas la de Poincaré, versaban sobre el problema del movimiento de los n cuerpos. Después de una lectura realizada en paralelo por Hermite en París, y por Weiertrass y Mittag-Leffler en Berlín, todos ellos coincidieron al cabo de un mes en que había una memoria que sobresalía por encima de las otras, que era la que merecía claramente el premio. Aunque las memorias se presentaban anónimamente, no les fue difícil reconocer la autoría de Poincaré en la memoria ganadora. A este respecto Weierstrass escribía a Mittag-Leffler:

> Podréis decir a vuestro soberano que esta obra no da la solución completa de la cuestión propuesta, pero, de todos modos, tiene tal importancia que su publicación inaugurará una nueva era en la historia de la mecánica celeste. El objeto que Su Majestad se proponía al plantear la cuestión puede, por tanto, considerarse que ha sido alcanzado.

El comité encontró otra memoria, debida a Paul Appell, compañero de estudios de Poincaré en Nancy, que era al menos merecedora de reconocimiento. El 20 de enero de 1889, el día anterior al aniversario del Rey Oscar, el monarca aprobó oficialmente el resultado del comité que fue presentado por Mittag-Leffler, consistente en la concesión del premio a Henri Poincaré, así como una mención honorífica para Paul Appell. El resultado se publicó rápidamente en la prensa internacional, y Poincaré y Appel fueron considerados poco menos que héroes nacionales por la prensa francesa, ya que habían triunfado sobre la matemática alemana, tradicionalmente considerada dominante. Como consecuencia de este triunfo francés sobre Alemania, Poincaré y Appell fueron nombrados rápidamente Caballeros de la Legión de Honor.

Mittag-Leffler tenía la intención de que ambas memorias fuesen publicadas en la revista *Acta Mathematica* dentro del mismo 1889. El volumen se acabó de imprimir durante el mes de noviembre de 1889, sin el informe de Weierstrass. Fue entonces cuando se encontró un importante error en la memoria de Poincaré que impidió la publicación del volumen ya impreso. Phragmén, en calidad de editor de la revista, encontró algunos pasajes poco claros. Se lo comunicó a Mittag-Leffler, quien escribió una carta a Poincaré pidiéndole más detalles sobre este punto. Poincaré contesta el 1 de diciembre, comunicándole que el error detectado es, efectivamente grave. Mittag-Leffler responde a Poincaré el 4 de diciembre manifestándole su perplejidad al conocer estas noticias, pero añadiendo que está fuera de duda el que la memoria sea una obra maestra que será una referencia puntal en la mecánica celeste, y confirmándole que, en su opinión, el premio le ha sido justamente otorgado. Sin embargo, no es tan indulgente con Poincaré en otra carta enviada a Hermite dos días más tarde, a quien comenta que el error cometido por Poincaré es tan grave que hay pocas páginas donde no se usan resultados que no sean falsos.

Desafortunadamente, la memoria original se distribuyó, y Mittag-Leffler se moviliza para intentar recuperar todos los ejemplares. El 5 de diciembre, Mittag-Leffler le escribe otra carta a Poincaré, comunicándole que está en vías de recuperar prácticamente todos los ejemplares enviados y le sugiere que se haga cargo del costo de la edición del ejemplar malogrado, lo que Poincaré hará más adelante, teniendo que abonar más de 3585 coronas, y, de hecho, perdiendo dinero en el concurso. Mittag-Leffler destruye todos los ejemplares (excepto al menos dos) y le propone a Poincaré que escriba una nueva versión libre de errores, pero sin hacer modificaciones muy profundas.

Finalmente, a principios de enero de 1889 Poincaré envía a Phragmén una versión corregida de su memoria. En ella incorpora las notas dentro del cuerpo del texto y realiza importantes avances, como la introducción de las órbitas doblemente asintóticas, más tarde llamadas *homoclínicas* por Poincaré, para corregir el error encontrado. Es importante resaltar que esas nuevas introducciones suponen la base de la teoría del caos. De este modo se le considera a Poincaré como el "abuelo" de la dinámica no lineal contemporánea. Poincaré descubrió que la evolución de un sistema a veces es caótico, en el sentido de que una pequeña perturbación en el estado inicial tal como un pequeño cambio en la posición inicial de uno de los cuerpos podría dar lugar posteriormente a estados radicalmente diferentes. Si el cambio no es detectable por nuestros instrumentos de medida, entonces no seremos capaces de predecir cual será el estado final. Poincaré explicita así que el comportamiento de un sistema dinámico puede estar perfectamente determinado, sin que sea posible para el científico la predicción de su estado futuro. Por tanto, determinismo y predicción son problemas distintos.

Como prueba clara del avance de Poincaré respecto a sus coetáneos, no se produjo después de él una continuación de la investigación sobre este tipo de comportamiento irregular. Hubo que esperar a la aparición de los ordenadores, unos setenta años después, para que pudiera desarrollarse la teoría comenzando una nueva ciencia multidisciplinar: los *sistemas dinámicos* o *dinámica no lineal*, donde aparecen frecuentemente fenómenos de tipo caótico. Pasados más de cien años de los trabajos de Poincaré en ecuaciones diferenciales y la mecánica celeste, sus trabajos son aún fuente de nuevas ideas actuales. Esto es muy difícil de encontrar en la obra de cualquier otro matemático.

Poincaré resumió los resultados de su investigación en un trabajo de tres volúmenes, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, publicados, respectivamente, en los años 1892, 1893 y 1899.

2.3. Fundación de la topología. La Conjetura de Poincaré.

Poincaré funda un nuevo campo del hacer matemático: la topología. La *topología* es la rama de la matemática que estudia las propiedades que permanecen invariantes en las figuras cuando son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: así trabajamos con *homeomorfismos*. Por consiguiente, se puede deformar por estiramiento, compresión o retorcimiento; están prohibidas operaciones que entrañen cortar o pegar. Sólo está permitido cortar si las dos partes se pegan después exactamente por el mismo corte. Cuando dos objetos geométricos (o *espacios*) se pueden deformar uno en otro por medio de estas operaciones se dice que son *homeomorfos*. Por ejemplo, un cubo y una esfera son homeomorfas, pero una esfera y un toro no lo son.

Aunque matemáticos como Leibniz, Euler, Cantor y Möbius ya se habían ocupado de algunas cuestiones topológicas, lo cierto es que el punto de partida oficial de esta rama coincide con la publicación en 1895 de un artículo de Poincaré, titulado *Analysis Situs*, completado con sus cinco posteriores *Compléments*, en los años 1899, 1900, 1902, 1902 y 1904. ¿Por qué hizo este estudio? Muchas cuestiones trabajadas anteriormente por Poincaré se basaban en propiedades cualitativas. Realmente el *Analysis Situs*, o análisis de la posición, se encontraba subyacente en sus trabajos sobre las curvas definidas por ecuaciones diferenciales, sobre la extensión de éstas a ecuaciones diferenciales de orden superior y, en particular, en aquellas del problema de los tres cuerpos. También en el estudio de las funciones multivaluadas de dos variables y en el estudio del período de integrales múltiples y su aplicación al desarrollo de la función perturbación. Asimismo en la teoría de grupos, con la investigación para grupos finitos o discretos contenidos en un grupo continuo dado.

En este estudio sistemático Poincaré crea la noción de *homología*, convirtiéndola en un auténtico cálculo algebraico sobre los subespacios de uno dado. Con ello da una definición precisa de los números de Betti. Hablando sin precisión, la homología asocia a cada espacio un grupo abeliano que da información geométrica sobre éste; básicamente, captura los agujeros que tiene dicho espacio. Para trabajar esta noción, simplificaba los espacios que trataba; estos eran los denominados *complejos simpliciales*. Trabajando con estos conceptos, Poincaré logró extender la fórmula poliedral. Por otro lado, valiéndose de técnicas de topología algebraica logra formular, hacia 1900, una medida de la estructura topológica de los cuerpos, la *homotopía*. También define el *grupo fundamental* o *grupo de Poincaré*, como un invariante topológico (es más, homotópico) de naturaleza algebraica, similar a la homología en dimensión 1, pero sin ser necesariamente grupo abeliano. Con este invariante se pueden distinguir diferentes categorías de superficies.

En 1904 conjeturó el siguiente enunciado: *Toda variedad de dimensión 3 cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera*. El mismo Poincaré no consiguió demostrar su conjetura; tampoco ninguno de sus contemporáneos ni sucesores. Con el tiempo, la conjetura cobró interés hasta convertirse en el problema abierto más notable de la topología, con destacables implicaciones para la física. Aún más, llegó a convertirse en uno de los problemas abiertos más importantes de la matemática.

2.4. Otras aportaciones importantes de Poincaré.

2.4.1. Poincaré es también considerado como el que dio origen a la teoría de las funciones analíticas de varias variables complejas. Comenzó sus contribuciones en este tema en 1883, con un artículo en el cual usaba el principio de Dirichlet para probar que una función meromorfa de dos variables complejas es el cociente de dos funciones enteras.

2.4.2. También trabajó en geometría algebraica, haciendo contribuciones fundamentales en artículos escritos en 1910-11. Examinó curvas algebraicas en una superficie algebraica $F(x,y,z)=0$ y desarrolló métodos que le permitieron dar demostraciones sencillas de resultados profundos de Emile Picard y Severi. Dio la primea demostración correcta de un resultado establecido por Castelnuovo, Enriques y Severi; estos autores habían sugerido un método de demostración que era falso.

2.4.3. Otro apartado destacable trabajado por Poincaré es la teoría de números. Su primera gran contribución se produjo en 1901 con una aportación sobre el problema de Diofantes de encontrar los puntos con coordenadas racionales de una curva $f(x,y)=0,$ donde los coeficientes de f son números racionales.

2.4.4. En matemática aplicada, aparte de la mecánica celeste con el problema de los tres cuerpos, estudió la teoría de la luz y de las ondas electromagnéticas de Hertz. También se interesó por los rayos X; el 20 de enero de 1896, Henri Poincaré expone a los restantes miembros de la Academia de Ciencias de París los resultados del alemán Röntgen de los rayos X, exposición que escucha Antoine Henri Becquerel (quien, junto con su padre, eran eminencias en los fenómenos de luminiscencia). Poincaré sospecha de la posibilidad de una conexión entre los rayos X y la fluorescencia, y tras una discusión así se lo sugiere a Becquerel, el cual se anima a investigar este fenómeno recién descubierto. Esto lleva a Becquerel a descubrir la radioactividad, y con ello la concesión del Premio Nobel de Física en 1903.

Poincaré también siguió las experiencias de los Curie sobre el radio. Por otro lado estudió óptica, electricidad, telegrafía, capilaridad, elasticidad, termodinámica, cálculo de probabilidades, teoría del potencial, teoría cuántica, cosmología y relatividad. Tenía por costumbre tratar un tema distinto en cada uno de sus cursos en la Sorbona; el contenido de dichos cursos se publicaba redactado por algunos de sus colaboradores. Poincaré exponía en ellos lo que se conocía hasta ese momento, pero también hacía aportaciones nuevas.

2.4.5. En relatividad es reconocido como co-descubridor, junto con Albert Einstein y Hendrik

Lorentz, de la teoría especial de la relatividad. Su primer trabajo sobre relatividad fue en 1898: *La medida del tiempo*. En éste, Poincaré formula el Principio de Relatividad, primer postulado de la teoría de Einstein, según el cual ningún experimento mecánico ni electromagnético puede diferenciar un estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme. También Poincaré dice:

> No tenemos intuición directa sobre la igualdad de dos intervalos de tiempo. La simultaneidad de dos sucesos o el orden en que aparecen, así como la igualdad de dos intervalos de tiempo, deben ser definidas de forma tal que las afirmaciones sobre las leyes naturales sean lo más simples posible.

Asimismo, propuso una definición operacional explícita de sincronización de relojes.

Poincaré pudo ser perfectamente "el Einstein de la relatividad especial", pues fue la persona que más se acercó y casi anticipó esta teoría. En 1904 propuso durante una charla una teoría de la relatividad para explicar el experimento de Michelson-Morley. Ese mismo año sugiere que el éter es un ente indetectable para todos los órdenes de v/c. Sin embargo, como Lorentz, Poincaré no rechazó del todo la idea del éter. Notemos que estas dos proposiciones, el Principio de Relatividad y la imposibilidad de detectar el éter, son básicamente los postulados de la teoría de la relatividad especial. Sin embargo, todavía en 1909 Poincaré no estaba preparado aún para decir que las equivalencias de todos los sistemas inerciales combinados con la invariancia de la velocidad de la luz eran suficientes para inferir el modelo de Einstein. Poincaré mantenía que también se debe estipular una contracción particular de los objetos físicos en la dirección de su movimiento.

En cierto sentido, el fallo de Poincaré en encontrar la teoría moderna de relatividad no fue debido a una falta de discernimiento por su parte (claramente reconoció el grupo de Lorentz de las transformaciones de espacio y tiempo), sino por un exceso de discernimiento y sofisticación filosófica. Publicó dos artículos más, titulados *Sobre la dinámica del electrón*, cuyo contenido no difiere mucho, desde el punto de vista formal, del célebre *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento* de Einstein. En 1899, aunque no se resolvió a abandonar la hipótesis del éter, creía firmemente en el principio de la relatividad, así como en la imposibilidad fundamental de poder detectar el movimiento absoluto a partir de observaciones ópticas. Su trabajo está enlazado con temas relativistas: la contracción de Lorentz, el aumento de la masa con la velocidad, el papel de c como velocidad límite de la dinámica. Poincaré manifestó su creencia de que la teoría de Lorentz no era la última palabra, pero sus observaciones revelan que él mismo no poseía ninguna teoría superior.

Entre los autores que han estudiado la obra relativista de Poincaré destacan dos tendencias. Por un lado están aquellos que consideran que Poincaré, a pesar de tener todos los conceptos previos necesarios, no llegó a la teoría de la relatividad. Por otro lado están aquellos que opinan que Poincaré llegó, esencialmente, a la teoría de la relatividad independientemente de Einstein, pese a que, tal vez, este último la formuló con mayor claridad y concisión.

Es interesante ver las reacciones de Poincaré, Lorentz y Einstein a la formulación final de la teoría. Aunque Einstein pasó muchos años pensando en cómo hacerlo, una vez que hubo encontrado los dos postulados fue inmediatamente natural para él. Einstein siempre fue renuente en reconocer que los pasos que otros dieron debido al experimento de Michelson-Morley habían influido en su pensamiento.

Por otro lado, la reacción de Poincaré hacia el artículo de Einstein de 1905 fue bastante extraña. Cuando Poincaré dio una conferencia en Göttingen en 1909 sobre relatividad no mencionó a Einstein en absoluto. Presentó la relatividad con tres postulados, siendo el tercero la contracción de FitzGerald-Lorentz. Poincaré nunca escribió un artículo sobre relatividad en el que mencionara a Einstein. También Einstein se comportó de forma similar, y Poincaré sólo es referenciado una vez en sus artículos. Sin embargo, Lorentz fue elogiado tanto por Einstein como por Poincaré, y a menudo citado en sus trabajos.

2.4.6. Poincaré empezó a interesarse por la teoría cuántica a raíz de su asistencia al primer Congreso Solvay celebrado en Bruselas del 30 de octubre al 3 de noviembre de 1911 para debatir el tema *La teoría de la radiación y los cuantos*.

2.4.7. Destacamos también a Poincaré como pensador y divulgador. A partir de 1902, cuando su grandeza como matemático estaba más allá de toda duda, se sintió atraído por lo que pudiera llamarse vulgarización de la matemática, y se dejó llevar con un sincero entusiasmo por la idea de compartir con los no profesionales la significación e importancia humana del tema. Su preferencia por lo general frente a lo particular le ayudó para exponer ante los inteligentes profanos aquellos temas cuyos alcances matemáticos van más allá de la importancia técnica. Hace 20 ó 30 años podía verse en los jardines y en los cafés de París a obreros y vendedores leyendo algunas de las obras maestras populares de Poincaré, en su edición barata. Las mismas obras, en ediciones más cuidadas, se encontraban sobre la mesa de trabajo de cualquier hombre culto. Estos libros fueron traducidos al inglés, al alemán, al español, al húngaro, al sueco y al japonés. Poincaré hablaba un lenguaje universal, fácilmente comprensible, de la matemática y de la ciencia, y su estilo, muy peculiar, pierde mucho en la traducción.

El caso es que Poincaré escribió muchos artículos científicos divulgativos, en una época en la que la ciencia no era un tema muy popular entre el público general en Francia. Entre estos trabajos de Poincaré caben destacar *Ciencia e hipótesis* (1901), *El valor de la ciencia* (1905) y *Ciencia y método* (1908).

Muy afín a su interés por la filosofía de la matemática es su preocupación por la psicología de la creación matemática. ¿Cómo realizan los matemáticos sus descubrimientos? Poincaré nos narra sus propias observaciones sobre este misterio en una de las más interesantes descripciones de los descubrimientos personales que haya podido ser escrita. Según Poincaré, los descubrimientos matemáticos suelen tener lugar después de un largo tiempo de ardua labor. En la matemática no se producen descubrimientos sin un profundo trabajo preliminar, pero esto no es, en modo alguno, todo lo necesario. Todas las "explicaciones" para proporcionar una receta en cuya virtud un ser humano pueda llegar a crear resultan sospechosas.

3. La Conjetura de Poincaré

En este apartado veremos el ejemplo más notable de la influencia del trabajo de Poincaré en la matemática posterior del siglo XX y principios del XXI. Como hemos comentado anteriormente, Poincaré fue el fundador de la topología con el *Analysis Situs* publicado en 1895. En él estableció los fundamentos de la homología, usando descomposiciones poliedrales de los espacios para calcular números de Betti, definió el grupo fundamental para distinguir superficies, y formuló su famosa conjetura. Desde que se enunció la Conjetura de Poincaré, muchísimos topólogos han intentado demostrarla, sin éxito hasta el momento. En este intento de resolver la conjetura se ha desarrollado espectacularmente la topología de variedades, apareciendo numerosos resultados y avances, hasta el punto de que casi han sido más importante éstos que la propia resolución del problema.

3.1. Formulación de la Conjetura de Poincaré.

En 1904, Henri Poincaré hizo la siguiente pregunta: *Considerése una variedad 3-dimensional cerrada V. ¿Es posible que el grupo fundamental de V pueda ser trivial, aunque V no sea homeomorfa a la esfera 3-dimensional?*

Actualmente, la Conjetura de Poincaré viene dada en modo afirmativo: *Toda variedad 3-dimensional cerrada y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera 3-dimensional*.

Para entender la Conjetura de Poincaré es necesario recordar algunas nociones, como son las de variedad y grupo fundamental. Una *variedad* de dimensión n o n-variedad es un espacio topológico M que es Hausdorff, segundo contable y tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de R^n. Esta última propiedad es la más relevante de la definición: nos dice que la variedad es localmente como R^n, lo que nos permite considerar coordenadas. Un caso especial de variedades, que se considera en la Conjetura, son aquellas que son cerradas, es decir, variedades conexas y compactas. En general, las variedades son de gran importancia en física y en geometría. Por ejemplo, nuestro Universo lo percibimos como una variedad de dimensión 3, pues en nuestro alrededor vemos un pequeño trozo que es similar al espacio tridimensional R^3. Esto nos lleva a la pregunta: ¿Qué forma tiene nuestro Universo? No tiene necesariamente que ser R^3. Podríamos caer en el mismo error que hace unos siglos. En la antigüedad creíamos que la superficie de la Tierra era plana porque localmente la veíamos así; posteriormente se comprobó que, en realidad, era redonda, es decir estábamos viviendo en la 2-esfera, una variedad de dimensión 2.
Como ejemplo de n-variedad tenemos la n-esfera:

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset R^{n+1}.$$

Así, la 3-esfera S^3 está dentro de R^4. La podemos imaginar como un espacio en el que si viajamos en línea recta, llegamos a las antípodas -el punto más alejado- y, si seguimos viajando en la misma dirección, acabaremos volviendo al punto de partida.

El otro apartado técnico que necesitamos para entender el enunciado de la Conjetura de Poincaré es la noción de grupo fundamental. Dado un espacio topológico X, un *camino* en X es una aplicación continua $\gamma : [0,1] \to X$. Se dibuja como un trazo continuo en X (es decir, si X fuese un papel, el camino se dibujaría sin levantar el lápiz de X). El punto inicial de γ es $\gamma(0)$, y el punto final es $\gamma(1)$. Dos caminos α y β con los mismos puntos iniciales y finales ($\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$) se dice que son *homótopos* si existe una familia uniparamétrica continua de caminos

$$\{\gamma_s : I \to X\}_{s \in [0,1]}$$

con $\gamma_0 = \alpha$ y $\gamma_1 = \beta$, todos ellos con los mismos puntos iniciales y finales. La continuidad de la familia se expresa diciendo que la aplicación $F:[0,1]\times[0,1]\to X$, $F(t,s)=\gamma_s(t)$, es continua. Si nos imaginamos un camino como un hilo extensible en X, una homotopía consiste en mover el hilo en X manteniendo sus extremos fijos.

Conviene fijar un punto, al que se suele denotar por $*$. Se llama *espacio con punto base* al par $(X,*)$. Los caminos que comienzan y acaban en $*$ se llaman *lazos* basados en $*$.

Teniendo en cuenta que la relación de homotopía de caminos es de equivalencia, se define el *grupo fundamental* de $(X,*)$ como el conjunto $\pi(X,*)$ cuyos elementos son las clases de equivalencia $[\gamma]$ de lazos basados en $*$. Este conjunto es un grupo. El producto es la concatenación de lazos: si $[\alpha]$, $[\beta]$ son dos lazos, entonces $[\alpha]*[\beta]$ viene dado por el lazo $\gamma=\alpha*\beta$ que consiste en recorrer α seguido de β. Esto se puede hacer siempre debido a que todos los caminos empiezan y acaban en el mismo punto $*$. Explícitamente, el lazo concatenación de α seguido de β viene dado por

$$(\alpha*\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}.$$

El elemento neutro es la clase del lazo constante en el punto $*, c_* \ (c_*(t)=*, \forall t\in[0,1])$, y el inverso de $[\alpha]$ está dado por el lazo recorrido en sentido inverso, esto es, por el lazo $\overline{\alpha}$ definido como $\overline{\alpha}(t)=\alpha(1-t)$.

Si X es conexo por caminos, es decir, todo par de puntos se pueden unir por un camino, el punto base no importa mucho. Así, si elegimos otro punto base $*'$, el grupo fundamental de $(X,*')$ es isomorfo al de $(X,*)$. Basta fijar un camino θ de $*'$ a $*$ y considerar el isomorfismo de grupos

$$\pi(X,*')\to\pi(X,*),\quad [\alpha]\mapsto[\theta*\alpha*\overline{\theta}].$$

De este modo, abusando un poco del lenguaje, podemos considerar la notación $\pi(X)$, sin poner explícitamente el punto base.

El grupo fundamental es un *invariante algebraico*. Supongamos que dos espacios X e Y son topológicamente equivalentes, es decir, homeomorfos. Entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

Dado un espacio X conexo por caminos, se dice que X es *simplemente conexo* si $\pi(X)$ es el grupo trivial; esto es, todo lazo es homótopo al lazo constante. Intuitivamente, podemos pensar que un espacio simplemente conexo es un espacio que no tiene agujeros, como por ejemplo la n-esfera, para $n\ge 2$. Notemos que con esta intuición la circunferencia o 1-esfera no es simplemente conexa. Se comprueba que, efectivamente, el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo de los enteros Z.

3.2. Generalización de la Conjetura de Poincaré.

La extensión más obvia de la Conjetura de Poincaré es a dimensión arbitraria. Sin embargo, la condición de que una variedad cerrada de dimensión n sea simplemente conexa no es suficiente para asegurar que sea homeomorfa a la n-esfera. Por ejemplo, en dimensión 4, la 4-variedad cerrada $S^2 \times S^2$ es simplemente conexa pero no es homeomorfa a S^4 (se puede demostrar con otros invariantes algebraicos, como por ejemplo el 2-grupo de homotopía, o bien con la homología).

La formulación adecuada para la Conjetura de Poincaré en dimensión arbitraria requiere el concepto de equivalencia de homotopía. Dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ se dice que son *homótopas* ($f \simeq g$) si existe una familia continua de aplicaciones

$$\{f_t : X \to Y\}_{t\in[0,1]}$$

tal que $f_0 = f$ y $f_1 = g$. La continuidad de la familia se expresa diciendo que $H : X \times [0,1] \to Y$, dada por $H(x,t) = f_t(x)$, es continua.

Así, se dice que dos espacios X, Y son *del mismo tipo de homotopía* si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que

$$f \circ g \simeq id_Y g \circ f \simeq id_X .$$

Se tiene entonces el siguiente enunciado, en el que cabe mencionar que en el caso $n = 3$ coincide con la conjetura original:

Conjetura de Poincaré Generalizada*. Toda n-variedad cerrada del mismo tipo de homotopía de la n-esfera es homeomorfa a la n-esfera.*

El caso $n = 1$ es trivialmente cierto, puesto que la única 1-variedad cerrada es S^1. Para el caso de superficies, $n = 2$, es un resultado clásico, ya conocido y comprobado por Poincaré.

El final de los años 50 y principio de los 60 del siglo XX vio una gran avalancha de progresos con el descubrimiento de que las variedades de dimensiones altas son en realidad más sencillas de trabajar que las 3-dimensionales (los argumentos topológicos son en general más sencillos, puesto que hay más espacio para mover objetos con homotopías).

Stephen Smale anunció una demostración de la Conjetura de Poincaré en altas dimensiones ($n \geq 5$) en 1960, para variedades diferenciables. Fue rápidamente seguido por John Stallings (en principio para $n \geq 7$, pero Zeeman extendió su argumento a dimensiones 5 y 6), que usó un método completamente diferente, y por Andrew Wallace ($n \geq 6$), que había estado trabajando en líneas muy similares a la de Smale. Stallings y Zeeman hicieron uso de variedades combinatorias, adaptando el trabajo de Smale con sus propios trabajos y los de J.H.C. Whitehead. El proceso concluye en 1966 con M.H.A. Newman, quien completó la demostración en toda su generalidad. Se hace notar que el caso 5-dimensional es particularmente difícil. ¿Por qué la demostración en dimensión $n \geq 5$ no funciona en dimensiones inferiores? Ello es debido a un teorema de Whitney, que sólo se aplica en dimensión superior o igual a seis. Los topólogos de la época decían irónicamente que en dimensiones tres y cuatro se sentían claustrofóbicos, porque no podían aplicar el teorema de Whitney. Para superar parcialmente la claustrofobia, el mucho más difícil caso $n = 4$ tuvo que esperar 20 años al trabajo de Michael Freeman en 1982, lo que le hizo merecedor de la medalla Fields en 1986. Los métodos usados por Stallings y Zeeman, así como los de Smale, no funcionaban en absoluto, por lo que tuvo que hacer uso de técnicas totalmente distintas. Friedmann no sólo demostró la Conjetura de Poincaré en dimensión cuatro, sino que clasificó las variedades cerradas de dimensión cuatro con grupo fundamental trivial.

Así que todos los casos están demostrados, salvo el original $n = 3$. ¿Qué ocurre con este caso? La Conjetura de Poincaré ha demostrado ser un problema muy rebelde desde que fue formulada. Su estudio ha llevado a muchas demostraciones falsas y a gran número de avances en el estudio de la topología de variedades. El número de demostraciones de la Conjetura de Poincaré enviadas a revistas y universidades es incalculable. Hasta el momento son todas falsas, pero en casos excepcionales no son irrelevantes. Por ejemplo, en 1934, J.H.C. Whitehead dio una "demostración" de que si una variedad abierta de dimensión tres tiene el tipo de homotopía de R^3, entonces esta variedad es homeomorfa a R^3. Con argumentos de compactificación por un punto, este resultado implicaría la Conjetura de Poincaré; sin embargo, es falso. Él mismo encontró un contraejemplo, que actualmente se conoce con el nombre de *variedad de Whitehead*. Para este contraejemplo desarrolló nuevas técnicas en variedades abiertas; gracias a este error, inició un campo de investigación muy interesante: las variedades abiertas de dimensión tres. La amarga experiencia de la falsa demostración marcó el rigor de los trabajos posteriores de Whitehead.

No todos los topólogos que se interesan en la Conjetura de Poincaré quieren demostrarla: algunos buscan contraejemplos, es decir, variedades con el mismo tipo de homotopía de S^3, pero no homeomorfas. Supongamos que hemos construido una variedad candidata a contraejemplo. ¿Cómo podemos distinguirla de S^3? No podemos utilizar el grupo fundamental, puesto que es trivial. El problema está en que todos los invariantes algebraicos que se conocen para variedades de dimensión tres se anulan si el grupo fundamental es trivial. Durante los años 70 se creyó que el invariante Rocklin construido a partir de cobordismo permitiría distinguir un contraejemplo, pero A. Casson demostró que depende del grupo fundamental. No ha sido hasta 1992 que H. Rubinstein ha dado un algoritmo que permite reconocer la esfera S^3; es decir, dada una variedad cerrada triangulada, este algoritmo decide si es la 3-esfera o no.

3.3. ¿Resuelta la Conjetura de Poincaré?

Con la idea de popularizar la investigación en matemática fundamental, gran desconocida al profano que sólo percibe la función práctica, el Clay Mathematics Institute (Cambridge, EE.UU.), una fundación que tiene como objetivo la difusión del conocimiento matemático, ha instaurado recientemente siete premios de un millón de dólares cada uno para la resolución de los siete *Problemas del Milenio*. Estos problemas, seleccionados muy cuidadosamente por expertos indiscutidos, son cuestiones abiertas de las más difíciles de varios campos de las matemáticas. Algunos son problemas nuevos; otros hace más de cien años que esperan su resolución. Los Problemas del Milenio, entre los que se encuentra la

Conjetura de Poincaré, fueron presentados públicamente el 24 de mayo del año 2000 en París, como una especie de nueva versión de la famosa conferencia en París de Hilbert. Para hacerse acreedor del premio hay cuatro cribas que una solución debe pasar:

1) Ser publicada en una revista de prestigio mundial, para lo cual han de aceptarla los recensores habituales de la misma.
2) Tener "aceptación general" dos años después de su publicación.
3) Poseer el visto bueno del comité científico del Instituto Clay.
4) Obtener el visto bueno de un segundo comité más especializado que se creará expresamente para estudiar esa solución.

Para muchos matemáticos es claro que, dada la naturaleza de los problemas seleccionados, la solución de uno de ellos indudablemente proporcionará a su autor no sólo una considerable cantidad de dinero, sino además un lugar sobresaliente en la historia de la matemática. A partir del momento en que se anunció el premio, varios competidores probaron suerte. Un caso que recibió difusión ocurrió en abril de 2002, cuando M.J. Dunwoody presentó un artículo con una supuesta demostración de la Conjetura de Poincaré, pero rápidamente se le encontró un fallo fundamental. En octubre de ese mismo año, E. Pitcher presentó una conferencia titulada *The Poincaré Conjecture is true*, y envió un trabajo para su publicación que todavía no ha sido aceptado. Por otra parte, en octubre de 2002, Sergey Nikitin, de Arizona State University, publicó un *preprint* en *arXiv.org e-Print archive* (servidor de trabajos de investigación alojado en el Laboratorio Nacional de Los Alamos), en el que propone otra demostración de la Conjetura de Poincaré reduciéndola al caso de ciertas variedades denominadas *estelares*. Posteriormente ha ido agregando varias versiones con correcciones, pero no terminan de convencer.

En noviembre de 2002 corrió el rumor en Internet de que el matemático ruso Grigori Perelman, del Steklov Institute of Mathematics en San Petersburgo, había publicado en *arXiv.org* un *preprint* en el que presentaba una demostración de la Conjetura de Poincaré. Esto llamó poderosamente la atención, ya que Perelman es reconocido como un sobresaliente especialista en Geometría Diferencial. Además, el rigor y la solidez de su trabajo gozan de reconocido prestigio en la comunidad matemática.

Efectivamente, Perelman sometió a la consideración de la comunidad matemática mundial su *preprint* de 39 páginas *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. Sorpresivamente, Perelman no anuncia en este preprint una demostración de la Conjetura de Poincaré sino de otra conjetura más general, que implica la de Poincaré, denominada la *Conjetura de geometrización de Thurston*. Esta última conjetura fue propuesta en 1970 por el matemático estadounidense William Paul Thurston, ganador de una Medalla Fields en 1982 por su trabajo en variedades de dimensiones 2 y 3. La Conjetura de geometrización de Thurston es mucho más ambiciosa que la de Poincaré, puesto que plantea una clasificación muy precisa de todas las 3-variedades.

Actualmente, el trabajo de Perelman está sometido a una cuidada revisión. Según los expertos hay bastantes probabilidades de que no haya errores significativos. De cualquier modo, las técnicas que incorpora son tan novedosas que ya de por sí representan un avance importante.

Referencias

E.T. Bell: *The last universalist: Poincaré*. En *Men of mathematics: the lives and achievements of the great mathematicians from Zeno to Poincaré*. Simon and Schuster, New York, 1937, pp. 526-554.

M. Castellet: De Hilbert a los Problemas del Milenio. *La Gaceta de la RSME* **6.2** (2003), 367-376.

W.S. Massey: *Introducción a la topología algebraica*. Reverté, 1982.

J. Milnor: Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), 1226-1233.

V. Muñoz: Cien años de la Conjetura de Poincaré. *La Gaceta de la RSME* **7.3** (2004), 629-653.

H. Poincaré: *Ciencia e hipótesis*. Colección Austral, Espasa Calpe, 2002.

Clay Mathematics Institute: Millennium problems, http://www.claymath.org/millennium.

The Mactutor History of Mathematics Archive, http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincare.html.

Planetmath Encyclopedia, http://planetmath.org/encyclopedia/iep/p/poincare.htm.