sctm05
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2005

Algunas reflexiones acerca del papel de la ingeniería en matemáticas

José M. Pacheco Castelao
Catedrático de Matemática Aplicada
Departamento de Matemáticas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

1. Introducción

En casi doscientos años de Ingeniería se han producido avances y cambios, tanto en las materias propias de la carrera como en las Ciencias Básicas en que se apoya, así como en la consideración social de los ingenieros; de modo que los ingenieros actuales no son ni como el superhéroe omnisciente que describe Julio Verne (1828-1905) en *La isla misteriosa* ni como el tecnólogo casi inhumano de *Los quinientos millones de la Begum*, por seguir con el mismo autor. Hoy se valoran en el ingeniero, además de las habilidades correspondientes, capacidades generales de ubicarse en el tejido social y cultural, y por ello es necesario conocer y estudiar las relaciones entre Ingeniería, Cultura, Ciencia y Sociedad.

Viajando hacia atrás en el tiempo, podríamos encontrar muy próximos entre sí los orígenes de algunas disciplinas ingenieriles y de las Matemáticas: sólo hay que pensar en nombres como *Edad del Bronce*, o *del Hierro*, y observar la estrecha relación entre la Agricultura y la medición de los campos para quedar convencidos.

Es tradicional que los estudios de Ingeniería incluyan Matemáticas, con la justificación más o menos plausible de la necesidad de su aplicación en muchos problemas. Sin embargo, pocas veces se nos cuenta cómo la Ingeniería ha sido creadora de Matemáticas, ya sea en el desarrollo de teorías que podríamos llamar *a corto plazo*, o bien como caldo cultural para evoluciones *a largo plazo*. En esta intervención se comentarán algunos extremos sobre estas cuestiones.

2. El emblema de la Ingeniería Industrial y las Matemáticas que esconde

No es fácil separar la Ingeniería de las Matemáticas debido a las influencias recíprocas desarrolladas a lo largo de la historia. Puede verse cómo en los emblemas de las carreras españolas de Ingeniero Industrial se halla magníficamente representada esa relación (Figura 1).

Figura 1. Emblemas de la Ingeniería Industrial española.

Observen el elemento central del escudo: es un regulador de bolas o centrífugo, síntesis casi perfecta entre Ingeniería y Matemáticas, y representante de una interesantísima página de historia de la Ciencia, la Técnica y la Tecnología.

Es seguro que pocos avances técnicos han tenido tanta proyección en el devenir de la Humanidad como la máquina de vapor: de ella derivan enormes pasos adelante en las Comunicaciones, la Industria, la Ciencia –la Termodinámica es hija de este desarrollo- y las Matemáticas. Pero la máquina de vapor no es útil si no se consigue regular o controlar la fuerza que genera. El regulador de bolas fue la pieza ingenieril destinada a conseguir esa hazaña, y por ello figura de modo destacado en su insignia. La historia atribuye a James Watt (1736-1819) y a Matthew Boulton (1728-1809) este invento, pero en realidad estos nombres son sólo el eslabón final de una larga cadena no exenta de casualidades. Recordémosla brevemente.

Durante siglos, en la vieja Europa los maestros canteros, los constructores de relojes y de molinos, al igual que algunos otros técnicos, viajaban de un lado a otro prestando sus servicios donde fueran requeridos. Entre los constructores de molinos se conocía que al aumentar las revoluciones de la muela o rueda móvil del molino, ésta tendía a separarse de la fija[1], dando como resultado una harina molida más groseramente. Para acercar ambas ruedas bastaba con depositar un peso sobre la muela móvil, frenando así su tendencia a elevarse. Los molineros escoceses habían experimentado desde principios del siglo XVIII con métodos para regular el peso necesario, entre ellos un dispositivo formado por un pantógrafo giratorio con dos pesos o bolas laterales.

El aparato se hacía girar en torno al eje vertical mediante una polea que transmitía el movimiento circular desde el eje de la muela, elevándose las bolas por efecto de la fuerza centrífuga. Una palanca transformaba esta elevación en una presión –producida por un peso- sobre la rueda de molino, devolviéndola así a su altura de trabajo.

El constructor de molinos Andrew Meikle (1719-1811) inspiró a Watt y a su socio Boulton para aplicar la misma idea a la regulación de la velocidad de giro de la máquina de vapor, dando así lugar al mecanismo en 1798 (Figura 2):

[1] Un problema parecido se observó en el diseño de las primeras unidades de almacenamiento de datos, discos y disquetes, que al girar a velocidades altas llegaban a rozar las cabezas lectoras estropeándose el almacenaje.

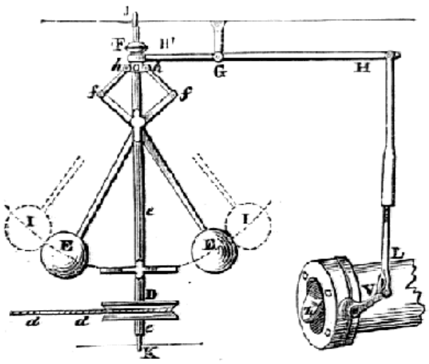


Figura 2. Regulador de bolas (aquí, actuando sobre una válvula).

En este caso, la rotación es tanto más uniforme cuanto más regular sea el flujo de vapor enviado al cilindro, a partir del cual el sistema formado por el pistón, la biela y la manivela genera el movimiento rotativo. Desde luego, podía hacerse la regulación manualmente abriendo o cerrando una válvula, pero la idea brillante, tanto ingenieril como matemática, fue conseguir que la propia máquina de vapor se hiciera cargo del mando. Para ilustrar con un poco de Matemáticas esta exposición, veamos la ecuación para la evolución temporal del ángulo φ entre la vertical y uno cualquiera de los brazos:

$$\varphi'' + b\varphi' + g\sin\varphi - n^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

En ella se distingue con claridad su origen a partir de la ecuación no lineal del péndulo físico,

$$\varphi'' + g\sin\varphi = 0$$

modificada por el término de rozamiento de la bisagra, $b\varphi'$, y por otro término no lineal $-n^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi$ en el que intervienen la velocidad de rotación ω de la máquina y la relación de reducción n entre los giros de los ejes de la máquina y del regulador.

Para comenzar ω se considera como un parámetro que rige tanto el comportamiento del regulador como el de toda la máquina. Para ser correctos habría que añadir una nueva ecuación para la evolución del parámetro:

$$\omega' = \Omega(\omega, \varphi)\,,$$

pero vamos a concentrarnos en la primera ecuación de segundo orden, que escribimos en forma de sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi \\ \psi' &= -F\psi - g\sin\varphi + n^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

Este sistema posee un punto singular en el origen. Si se cumple la desigualdad $\frac{g}{n^2\omega^2} < 1$, entonces existe otro punto singular $(\arccos\frac{g}{n^2\omega^2}, 0)$, lo cual nos indica que el regulador no funciona si la velocidad angular no alcanza un valor umbral: esto es, $\omega > \frac{\sqrt{g}}{n}$ es condición necesaria para que el regulador comience a actuar.

Un simple análisis en el plano de fases nos muestra que $\omega_{bif} = \frac{\sqrt{g}}{n}$ es el valor de bifurcación que separa el comportamiento con sólo el punto singular en el origen y el de dos estados críticos obtenidos por una bifurcación en que el origen se escinde en un punto de silla -que permanece en el origen- y un punto espiral estable cuya localización en el eje φ depende de la velocidad angular (ver Figura 3).

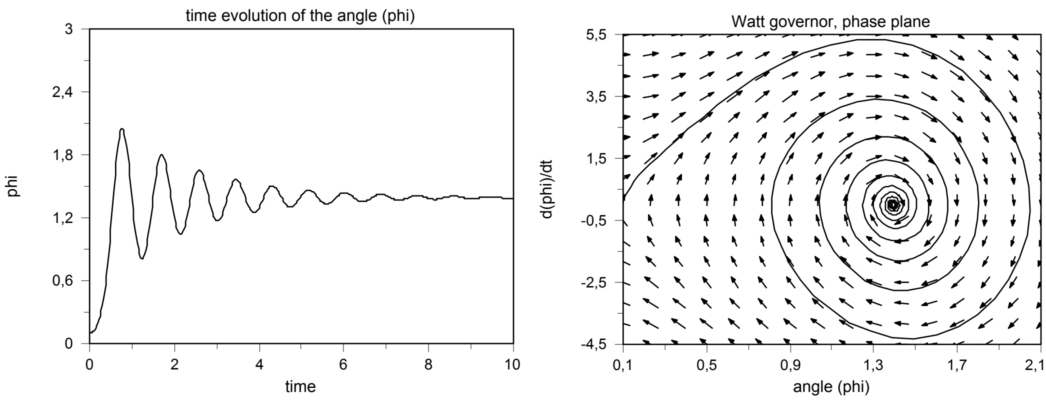


Figura 3. Comportamiento del regulador de Watt (dos puntos singulares), para los valores $F = 1$, $n = 5$, ω =0.637. El punto de silla en el origen y la espiral estable se ven siguiendo el campo de direcciones del plano de fases.

Las gráficas nos muestran que el regulador acabará llevando la máquina a un estado estacionario dependiente de la velocidad angular de rotación del eje de las bolas. Pero como la carga que debe soportar la máquina depende del número de mecanismos a que sirve, ello modificará el momento angular y la velocidad de rotación del eje, por lo que añadiremos la tercera ecuación $\omega' = \Omega(\omega, \varphi)$ para que las matemáticas sean capaces de describir los comportamientos erráticos observados por los ingenieros a finales del siglo XIX cuando las máquinas de vapor alcanzaron proporciones monstruosas y se volvieron inmanejables. Una formulación adecuada para esta ecuación es

$$\omega' = K\cos\varphi - L$$

donde K y L dependen del momento angular del eje de la máquina y de la inercia del regulador. En este caso se vuelve a encontrar un punto singular en el primer octante, pero con un comportamiento mucho más complicado: ¡acabamos de descubrir el caos!

En el caso del molino la regulación tenía lugar sobre el movimiento en sí, y en la máquina de vapor sobre el flujo de vapor. En cualquier caso, el siguiente esquema es representativo:

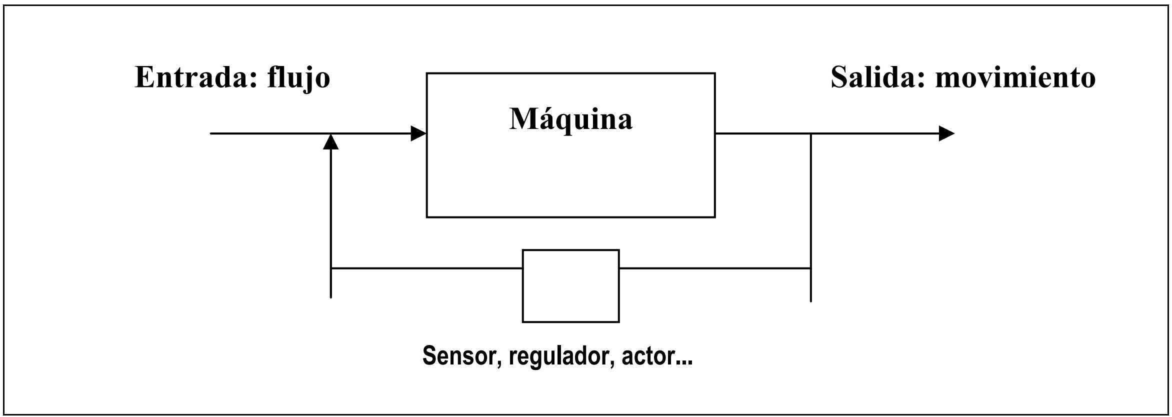


Figura 4. Circuito con retroalimentación.

El estudio matemático de este esquema dio lugar -muchos años más tarde, hacia 1940 y acuciado por la resolución de problemas bélicos relacionados con la segunda guerra mundial- a que el ruso Lev Pontriaguin (1908-1988) creara la *Teoría del Control*, una de las ramas más fructíferas de las Matemáticas del siglo XX[2]. Por supuesto, en la actualidad estos controles no se implementan mecánicamente, sino en versiones electrónicas, pero aún así el regulador de bolas sobrevive por doquier y se halla presente, aunque no lo veamos, en las más dispares aplicaciones.

3. Técnicas, Tecnologías y Matemáticas

Cambiemos por un momento de línea expositiva para reflexionar acerca de la distinción, un tanto sutil, entre Técnica y Tecnología. En opinión de muchos autores, en el paso de una a otra radica la verdadera naturaleza de la Ingeniería. Comencemos prestando alguna atención a la etimología: ambas palabras proceden del griego clásico *techné*, cuyo significado es el de “arte o modo de hacer las cosas”. Cuando usamos “Técnica” nos referimos al simple dominio operativo de los conocimientos para que algo funcione -llamamos al “técnico” cuando algún aparato casero se avería- pero al decir “Tecnología” empleamos la raíz *lógos*, cuyo sentido es el de “razonamiento” o “reflexión”. En otras palabras, la Tecnología incluye pensar acerca del por qué de los elementos técnicos y de su funcionamiento, y esta actividad pensante sobre los objetivos, medios y fundamentación de

[2] El regulador de Watt fue objeto de estudio para científicos tan distinguidos como el astrónomo George Airy (1801-1892), el matemático, físico e ingeniero William Thompson (Lord Kelvin) (1824-1907), el físico Léon Foucault (1819-1868), y muchos otros. Véase también el apartado dedicado al mismo (capítulo V, párrafo 27) en Pontriaguin (1969).

las técnicas es lo característico de la Ingeniería, que queda así conectada con las Ciencias Puras y las Humanidades.

El resultado de esta concepción de la Ingeniería es el Proyecto. Éste no es únicamente la guía de construcción y el catálogo de materiales y calidades pertinentes para la elaboración de un producto, sino también la expresión de una cierta forma de entender la producción desde un punto de vista global. Se podría comparar un Proyecto con una Ley, que incluye en su exposición de motivos las perspectivas del legislador antes de descender a los aspectos técnicos contenidos en el articulado subsiguiente. De esta manera, el Proyecto se configura como vehículo de ideología y generador de problemas –a veces también de soluciones- para otras disciplinas. Es instructivo recordar ahora que la historia de la tecnología del vapor se halla plagada de pleitos legales relativos a las patentes, que unas veces impidieron desarrollos más rápidos y otras fomentaron ideas novedosas conducentes a explorar otros campos científicos.

El Proyecto aparece, pues, cuando el Ingeniero[3] pasa de técnico a tecnólogo y procede a fijar el conocimiento necesario y a dar las condiciones para contribuir a su conservación, transmisión y distribución. En este sentido el Proyecto es una abstracción o modelo que permite variaciones –también podríamos decir que está aquejado de ellas- en su ejecución, al igual que de una partitura musical se pueden obtener diferentes interpretaciones cada vez que se toca, o como dicen algunos escritores acerca de los libros, éstos se completan con las sensaciones que generan en cada lectura.

La capacidad de abstracción y síntesis inherente a esta idea del Proyecto es un caso claro de Modelización: nos hallamos ya en la antesala de las Matemáticas, y autorizados para hablar con total seguridad de la *influencia de la Ingeniería en las Matemáticas*. Hay partes de éstas, ya casi en desuso o prácticamente cerradas, tales como los métodos de representación o Geometría Descriptiva, que surgieron como evolución directa de las necesidades de los proyectistas, aunque luego fueran recogidas, ampliadas y subsumidas en cuerpos doctrinales más extensos y abstractos, como por ejemplo las Geometrías Proyectiva y Diferencial. Los aspectos más prácticos y próximos a las aplicaciones originarias sobreviven hoy día como programas de ordenador, del mismo modo que las tablas trigonométricas y de logaritmos se ocultan en las calculadoras de los estudiantes.

Es bien sabido que las carreras de Ingeniería se originaron con una fuerte influencia de lo militar. Haciendo abstracción por un momento de las aplicaciones bélicas, hay que reconocer la importancia histórica de los ingenieros militares en el avance conjunto de la Ingeniería y de las Ciencias. Un ejemplo clásico es la determinación del equivalente mecánico del calor, estudiado por primera vez alrededor de 1800 en el proceso de taladrado de cañones a partir de cilindros macizos de acero o bronce. En muchas ciudades costeras y plazas fuertes coloniales se pueden observar interesantes casos de fortificaciones estrelladas del tipo preconizado por el francés Sébastien Vauban (1633-1707). Tales polígonos no convexos dan una condición extremal que minimiza el número de vigilantes del perímetro sin que existan ángulos ciegos. En tiempos menos guerreros, hemos visto el problema formulado con la frase:

[3] Notemos que "ingeniero" proviene de "ingenio", que en castellano era la forma habitual de designar cualquier máquina (obviamente, creada por el "ingenio" humano). Otros idiomas, como el inglés, mantienen la palabra "engine" con el sentido de máquina o más concretamente de motor, tanto mecánico como virtual: por ejemplo, los buscadores de Internet son "search engines".

"*Cómo vigilar una exposición en una galería de arte...*". En otras palabras, al parecer siempre hay que defenderse de algún enemigo o amigo de lo ajeno.

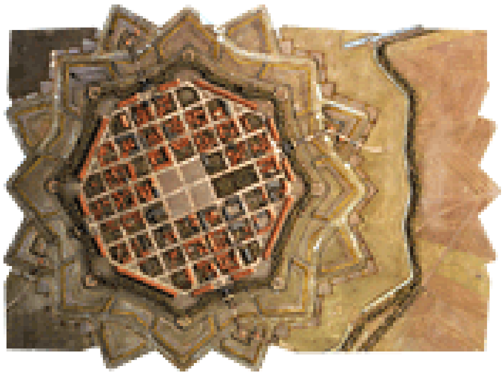


Figura 5. Maqueta de una fortificación al estilo de Vauban.

Lo interesante de *las* construcciones de Vauban y su escuela es que resultan de la aplicación de proyectos básicos, repetibles en multitud de casos y lugares con independencia de técnicas locales e individuales: he aquí implícito el concepto de generalización, ingrediente básico de las Matemáticas.

La Ingeniería moderna no se ocupa únicamente de la producción o del diseño de las plantas que la llevan a cabo. En realidad, ésa es sólo una parte del trabajo actual, que atiende también a la estructura esencialmente lógica de los procesos productivos, esto es, la organización de la empresa productora. Es cierto que cada producto necesita sus elementos particulares, pero no lo es menos que existen estructuras comunes utilizables en muchos casos particulares adaptando una idea general, del mismo modo que un teorema matemático se aplica en casos concretos sustituyendo las variables abstractas por valores particulares. Se puede abstraer también el concepto de producto –por ejemplo, un préstamo es un producto bancario, o un viaje de vacaciones uno turístico- y en esencia nos quedará una estructura o esqueleto cuyo objetivo es la optimización de algunas variables interesantes. Aquí encontramos una rama de las Matemáticas generada por la Ingeniería militar con ocasión –también- de la Segunda Guerra Mundial, la Investigación Operativa, heredera de la antigua Logística tan bien descrita por Jenofonte en el *Anábasis* o *Retirada de los diez mil*.

La Investigación Operativa estudia una familia de problemas de optimización de gran complejidad, tanto por el número de variables como por las relaciones entre ellas: el caso típico es la asignación de rutas y frecuencias de transporte entre una serie de proveedores y otra de clientes –en origen, el abastecimiento regular a las tropas en diferentes escenarios-, problema que sirve de molde o modelo para todo un conjunto de cuestiones tales como el tráfico de Internet o la comprensión de fenómenos ecológicos y fisiológicos.

Pero hay un grado más en estas Matemáticas: la Investigación Operativa es más que la aplicación de Matemáticas preexistentes a cuestiones bélicas, pues constituye un cuerpo matemático *totalmente nuevo* creado para esos propósitos y que después ha servido para muchos objetivos en el mundo de las aplicaciones.

Vayamos a otros ámbitos. Un excelente libro[4] del historiador y profesor de Oxford Felipe Fernández-Armesto nos habla de las técnicas clásicas de transporte, almacenamiento y distribución del agua como elemento capital de cualquier cultura o civilización. Este conjunto de conocimientos, conocido como Hidráulica, engloba el cálculo de canales, esclusas, y reguladores, así como la construcción de pozos y de obras de captación en ríos, arroyos y acuíferos. Se conservan excelentes piezas, como el acueducto de Segovia, exponentes del dominio de las técnicas de la Hidráulica.

A nuestro modo de ver, lo más interesante es la obtención de flujos laminares. En efecto, en ausencia de mecanismos elevadores la distribución del agua se realiza por gravedad, y para controlar la cantidad enviada es necesario que en alguna parte del trayecto el flujo sea laminar y de velocidad constante. Conseguido esto, sabiendo el calibre de la conducción es fácil hallar la cantidad de líquido. En el campo canario han sido muy populares las llamadas “cantoneras”, dispositivos mezcla de distribuidor y regulador formados por un estanque de pequeño tamaño cuyo rebosadero está provisto de compuertas de varios tamaños (ver Figura 5).

Es claro, atendiendo a nomenclaturas aún en uso, que estas “máquinas” o ingenios son la evolución de estructuras más antiguas, simples balsas de tierra en cuyo borde se excavaba un desagüe del calibre deseado. Por ejemplo, una “azada” de agua es la cantidad de líquido que sale durante 24 horas usando el flujo correspondiente a la brecha abierta con dicho instrumento en el borde de la balsa. Existían también medidas como el “real”, que solía usarse como pago de impuestos, definido por el flujo a través de un tubo cuyo diámetro era dicha moneda.

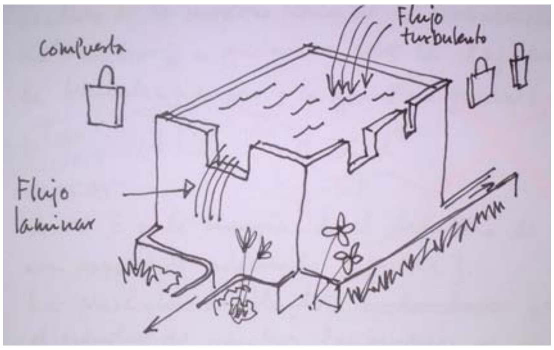


Figura 6. Cantonera (dibujo del autor).

En todo caso, el dominio del agua lo forman técnicas que de manera natural originaron su correspondiente tecnología, y casi sin solución de continuidad ésta se transformó en una ciencia de pleno derecho, la Mecánica de Fluidos, que en los países anglosajones se ha considerado siempre más parte de las Matemáticas que de la Física.

De nuevo desde nuestro punto de vista, lo más interesante de la Mecánica de Fluidos es justamente el problema teórico de los flujos no laminares, esto es, de la turbulencia, así como su relación con las capas límite. Hay turbulencia en un fluido cuando en su seno coexisten estructuras portadoras de energía de diferentes escalas: es la responsable de los

[4] Felipe Fernández-Armesto: *Civilizaciones.* Editorial Taurus, Madrid, 2002.

procesos de mezcla y difusión, y de multitud de problemas ingenieriles. La moderna teoría de la turbulencia se debe a Theodore Von Kármán (1881-1963) y Andrei Kolmogórov (1903-1987), quien da nombre a la ley exponencial para el espectro de potencias

$$E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$$

La Mecánica de Fluidos permite al ingeniero el estudio de muchos fenómenos y su aprovechamiento tecnológico. Así, la gestión de acuíferos y la minería del petróleo se basan en la Mecánica de Fluidos en medios porosos, para los que existe toda una teoría específica desarrollada en una gran variedad de aplicaciones.

4. Ingeniería, Cálculos, Informática y Lógica

Con toda seguridad la mención de la Mecánica de Fluidos les habrá recordado enormes y complicados cálculos, sólo factibles con ayuda de ordenadores. Desde luego, la Ingeniería actual utiliza masivamente el ordenador, lo cual nos lleva a preguntarnos qué relaciones ligan la Ingeniería, las Matemáticas y la Lógica en esta máquina omnipresente. No son tan difíciles de encontrar.

Se acepta generalmente que el conocimiento e interpretación del mundo que nos rodea se obtiene mediante un método[5] que se sustenta en la alternancia de dos procesos, el inductivo y el deductivo. El primero de ellos intenta extraer de observaciones particulares reglas o leyes lo más generales posibles para condensar en ellas la mayos cantidad posible de conocimiento. Por su parte, el segundo consiste en la aplicación de "mecanismos válidos de razonamiento" para obtener, a partir de unas hipótesis de principio, conclusiones de las que se espera contrastar su veracidad mediante experiencias posteriores. La combinación inducción-deducción es el núcleo de lo que se conoce como *método científico*[6].

Es evidente que la parte deductiva plantea más dificultades conceptuales, pues toda ella descansa sobre la idea de *mecanismo válido de razonamiento*, como si ésta fuera una noción fácil de entender y definir. Los primeros -y perdurables- intentos de clasificar los razonamientos válidos están en la Lógica de Aristóteles, o cálculo de silogismos. Muchos siglos después el Método de Descartes (1596-1650) y la Escuela de Port Royal (alrededor de 1650) darán paso a la idea propuesta por Leibniz (1646-1716) de *lengua perfecta*, el antecedente más claro de la Lógica Matemática creada a mediados del siglo XIX por George Boole (1815-1864) y otros autores. Unos años más tarde, los problemas de la Lógica Matemática volverán a confluir con los derivados de la máquina de vapor a través del Cálculo Integral, cuando Georg Cantor (1845-1918) cree la Teoría de Conjuntos hacia 1870. Al final volveremos sobre ello.

Demos por sentado que existen unas pautas reconocidas de razonamiento plausible y veamos un ejemplo para estudiar alguna conclusión interesante. Consideremos el silogismo clásico:

Todo humano es mortal;
Sócrates es humano;

[5] Método = "*met* + *hódos*", literalmente "en el camino", en griego.

[6] Las ideas de ambos procesos se deben al filósofo empirista Francis Bacon (1561-1626).

luego:
Sócrates es mortal.

Nadie duda de la validez del mismo (aunque tal vez ello se deba a que no se conocen todavía ejemplos de hombres inmortales). Podemos representar ese silogismo en una gráfica[7] (Figura 7):

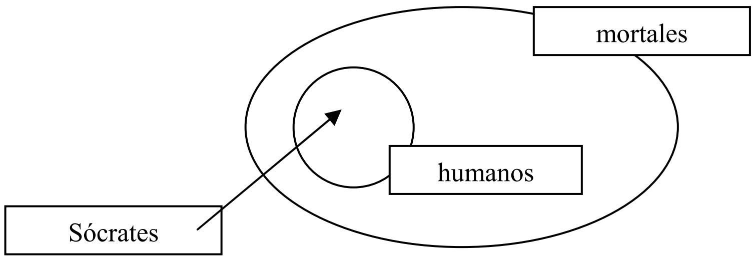


Figura 7.

O mediante algunas fórmulas:

$$H \subset M$$
$$S \in H$$
$$\therefore S \in M$$

que también podemos encontrar escritas como:

$$[H \subset M] \wedge [S \in H] \Rightarrow [S \in M];$$

pero hasta ahora no hemos hecho nada, matemáticamente hablando. Lo matemático es que el razonamiento consiste en la *eliminación* de una variable, en este caso la *H* (humano), del mismo modo en que se elimina una incógnita entre ecuaciones algebraicas:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=z \\ x-z=2y \end{array}\right\} \Rightarrow [y=2z]$$

La eliminación de una variable es un proceso de indudable utilidad, pues permite ahorrar información almacenada y sustituirla por una simple llamada al algoritmo de comprobación, esto es, al razonamiento válido. Llévese este pequeño ejemplo a gran escala, considerando diferentes tipos de razonamientos, y estaremos de lleno en el mundo de la Informática actual.

Desde una perspectiva ingenieril, el problema es diseñar y construir circuitos que simulen el comportamiento de los algoritmos y permitan guardar información y acceder a ella

[7] Se atribuye al gran Leonhard Euler (1707-1783) la invención de estos diagramas.

en caso necesario. Dado que más o menos todos sabemos cómo funciona un ordenador, no entraremos en detalles, sino que presentaremos otro problema matemático surgido de la Ingeniería y que tuvo su interés en el desarrollo de las memorias de los ordenadores. Para ello será necesario que recordemos, o mejor dicho precisemos, el concepto de memoria.

Ya casi nadie hace nudos en el pañuelo o se cambia de lugar el anillo para recordar algo: esos son dispositivos de memoria de un solo uso. También los relojes analógicos habituales son memorias en ese sentido: cada vez que las agujas se hallan en una determinada posición nos recuerdan qué debemos hacer, al igual que el programador de una lavadora, otro simple reloj, indica qué ciclo del lavado entra en acción. Por tanto parece una idea plausible hacer residir la memoria en una especie de oscilaciones estables, pues éstas son garantía de conservación o de recuerdo de alguna actividad. Las primeras memorias de computación eran dispositivos electrónicos muy complicados, con cápsulas de mercurio líquido y otros artilugios de manejo delicado. Pero todos ellos estaban basados en el concepto de oscilaciones automantenidas observadas en las primeras válvulas electrónicas a principios del siglo XX y descritas como ondas no lineales por el holandés Balthazar Van der Pol (1889-1959) hacia 1920. La ecuación descrita por este físico e ingeniero se obtiene, como la del regulador de Watt, modificando la forma lineal del oscilador amortiguado

$$x'' + kx' + \omega^2 x = 0$$

haciendo que el coeficiente de fricción k sea sustituido por una expresión dependiente de la amplitud (notemos cómo reaparece el concepto de retroalimentación), y por tanto no lineal:

$$k = -\varepsilon(1 - x^2), \quad \varepsilon > 0\,;$$

de forma que la ecuación representa oscilaciones cuya amplitud tiende a aumentar si $|x| < 1$, y a disminuir si $|x| > 1$. Este “conflicto” se resuelve con la aparición de un ciclo límite que puede modularse atendiendo al parámetro ε. El ciclo resultante es estable, en el sentido de que el comportamiento a largo plazo del sistema es la oscilación definida por él.

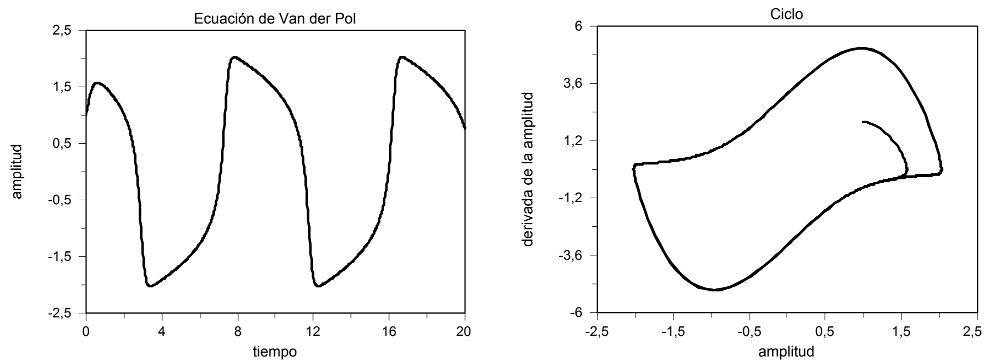


Figura 8. Oscilaciones y ciclo de Van der Pol.

El análisis de las oscilaciones no lineales es una de las ramas más fascinantes y espectaculares de las Matemáticas en los últimos 100 años. En él se dan cita, traídas por las necesidades tecnológicas, ideas físicas, conceptos geométricos y topológicos, y métodos analíticos tales como los desarrollos asintóticos, y produce como resultado un sinfín de posibilidades de aplicación y evolución, tanto de la práctica ingenieril como de los estudios de las Matemáticas más puras.

5. Una genealogía

Para ir terminando volvamos a nuestra vieja conocida, la máquina de vapor. Los estudios sobre la fuerza motriz del vapor condujeron pronto a otros acerca del calor, su naturaleza y su transmisión. La obra capital de Jean Baptiste Fourier (1768-1830), la *Théorie analytique de la chaleur*, ganadora del premio de la Academia Francesa en 1822, es el origen de numerosas investigaciones posteriores, tanto puras como aplicadas. La ecuación de la transmisión del calor en un cuerpo finito aislado, en su forma lineal más simple, viene expresada como sigue, donde u es la temperatura y k un coeficiente de transmisividad adecuado:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\nabla^2 u \, .$$

En los casos más simples la solución de esta ecuación puede hallarse por el método de separación de variables, y restringiéndonos al caso de dimensión espacial 1, teniendo en cuenta las condiciones suplementarias de contorno que indican el aislamiento, más una distribución inicial de calor $G(x)$, se obtiene formalmente como un desarrollo en serie de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n f_n(t) e^{inx}$$

donde los coeficientes C_n vienen dados por ciertas integrales de la distribución inicial de calor. Es conocido de los cursos elementales que esencialmente esas integrales se reducen a las del tipo

$$I_n = \int_0^{2\pi} G(x)\cos nx dx \, ,$$

así que la determinación de la solución *depende de la existencia de la integral* donde interviene la función $G(x)$. Si ésta no tiene un comportamiento adecuado, la integral puede no existir y entonces las Matemáticas no proveen una solución al problema de la transmisión del calor. Más todavía, incluso existiendo los coeficientes, podría ocurrir que el desarrollo formal anterior no fuera convergente, lo cual daría soluciones sin sentido físico razonable.

Veamos una tabla con las claras analogías entre el álgebra vectorial y los desarrollos de Fourier:

Espacio	**Euclídeo** $\mathbb{R}^3$	**Funciones** $[0,2\pi) \to \mathbb{R}$	**Observación**
Base	$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ nº finito de elementos	$\{e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}\}$ nº infinito de elementos	
Representación coordenada	$v=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$	$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx}$	(1)
Producto escalar	$v \cdot v' = aa' + bb' + cc'$	$f \cdot g = \int_0^{2\pi} f \overline{g} dx$	
Módulo	$\lvert v \rvert = \sqrt{v \cdot v} =$ $=\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\int_0^{2\pi} f^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f \cdot f} = \lVert f \rVert$	(2)
Coeficientes	$a = v \cdot \mathbf{i}$, $b = v \cdot \mathbf{j}$, $c = v \cdot \mathbf{k}$	$f_n = \int_0^{2\pi} f e^{inx} dx = f \cdot e^{inx}$	(3)
...	...	...	...

Tabla 1. Analogía entre el cálculo vectorial y las series de Fourier.

La tabla refleja lo conocido clásicamente como *principio de superposición* o, dicho en palabras más modernas, la linealidad inherente a la teoría de los espacios vectoriales: en el primer caso, el habitual de la geometría elemental; en el segundo, un conjunto adecuado de funciones, que no son sino vectores de infinitas dimensiones. Se han marcado algunas observaciones en la tabla que ya se han apuntado antes. La (1) indica que hay obligación de considerar problemas de convergencia en la serie; la (2), que es necesario investigar si existirá o no la integral del cuadrado de la función; y la (3) que, como se dijo más arriba, la integrabilidad de la función puede ser una cuestión importante[8].

La observación (3) nos lleva de inmediato a una cuestión *más abstracta todavía*: como casi todo en esta vida, lo que se entiende por "integrable" depende de la definición que se use. Todos conocemos la integral de una función de una variable, representada como un área, una buena interpretación si tomamos como funciones integrables aquéllas para las que sea fácil entender una aplicación inmediata del teorema elemental del valor medio, tal como la de la Figura 9:

[8] Notemos que como la exponencial compleja está acotada, en realidad basta con estudiar la integrabilidad de la función. Por tanto, al estudiar las soluciones de la ecuación del calor, o los desarrollos de Fourier que las definen, habrá que buscar siempre en conjuntos de funciones tales que sean a la vez integrables las funciones y sus cuadrados.

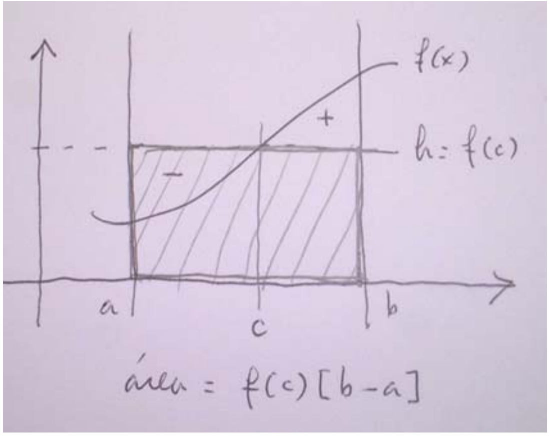


Figura 9. Teorema del valor medio para la integral de una función continua (dibujo del autor).

Por ejemplo, si nuestra función es continua, la interpretación del área como cuadratura[9] es inmediata. Un matemático no resistiría la tentación de implicarse más en el problema y ver si hay alguna definición que permita pensar como posibles las integrales de funciones no tan cómodas como las funciones continuas, y así es como Bernhard Riemann (1826-1866) definió un nuevo concepto de integral, *casualmente* la misma que se explica en los primeros cursos universitarios, en su trabajo de Habilitación –algo parecido a una memoria de oposiciones- sobre la representación de una función en serie de Fourier. Así las cosas, llevamos recorrido el siguiente camino:

Máquina de vapor → Teoría del Calor → Fourier → Integrales → ...

A finales del siglo XIX y principios del XX se produjo una notable inversión del punto de vista sobre la integrabilidad de las funciones: si lo que *impide* a una función ser integrable *es ser poco continua*, habrá que investigar qué es exactamente el conjunto de las discontinuidades de una función, medirlo de alguna manera, igual que se hacía con las aguas de riego, y ver cuándo es lo bastante grande para impedir la integración. Estas investigaciones llevaron a Cantor, ya citado antes, a descubrir o inventar la Teoría de Conjuntos, y a Henri Lebesgue (1875-1941) a formular la Teoría de la Medida entre 1904 y 1906. Pero la medición, como problema asociado a figuras geométricas, puede intentarse con figuras rarísimas, y así Abraham Besicovich (1891-1970), estudiando extrañas configuraciones, creó la Teoría Geométrica de la Medida, núcleo de esas Matemáticas hoy tan de moda como la Geometría Fractal, cuestión abstracta donde las haya, que se aplica –en una larga y complicada retroalimentación- en la Ingeniería para cosas tan dispares como el diseño de tramas de imprenta o el análisis de la predecibilidad de situaciones climáticas o meteorológicas, por ejemplo para el posible control de inundaciones y la consiguiente regulación de flujos hidráulicos... Por tanto la cadena anterior continúa así:

... → Integrales → Teoría de Conjuntos → Medida → Geometría Fractal → ...

[9] Este es el nombre dado antiguamente a los cálculos de áreas, en el sentido de hallar un cuadrado de área equivalente a la que se iba a calcular (por ejemplo, recordemos la "cuadratura del círculo").

Y vean cómo, al final, volvemos a encontrarnos con el problema clásico de la Ingeniería: dominar y controlar razonablemente las fuerzas que la Naturaleza pone a disposición de quienes se aventuran a usarlas. En ese largo camino las Matemáticas siempre han acompañado a la Ingeniería. Recuerden que el gran Galileo Galilei (1564-1642) ya escribió hacia 1623 en su conocida obra *Il Saggiatore* que "el libro de la Naturaleza está escrito en el lenguaje de las Matemáticas". El oficio de los hombres es escribir comentarios a ese fabuloso libro, y mientras se redactan, se va elaborando cada vez más esa escritura. Al igual que en las Academias de la Lengua saben que el lenguaje es obra de todos, y por tanto hay académicos de muchas profesiones -no sólo filólogos o literatos, también hay ingenieros, médicos, curas, militares y hasta poetas- sabemos que las Matemáticas son también obra de quienes se las han encontrado alguna vez en su camino. Y les abarca a todos ustedes.

Muchas gracias.

Reconocimientos

Esta presentación es una extensión del artículo de Isabel Fernández y José M. Pacheco publicado a principios de 2005 en el *European Journal of Engineering Education*, a su vez originado a partir de una conferencia de José M. Pacheco pronunciada en la Universidad de Cádiz (España) en Septiembre de 2003 con motivo del Centenario de la Escuela Superior de Ingeniería de aquella ciudad. El primer borrador fue redactado en Aragua de Maturín, en el profundo Oriente venezolano, durante el verano de 2003.

Referencias

F. Arriaga: *Matemáticas e ingeniería*. Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia: "Matemáticas y Realidad" (1998) [no publicado].

R. Ball: *Control, stability, and bifurcations of complex dynamical systems*. Preprint, Australian National University Centre for Complex Systems (2003).

D. Bernstein: *Feedback control and the history of technology*. Preprint, Aerospace Engineering Department, University of Michigan (2001).

B. Gille: *Prolégomènes à une histoire des techniques*. Gallimard, Paris, 1978.

F. Fernández-Armesto: *Civilizaciones*. Taurus, Madrid, 2002.

I. Fernández, C. Hernández, J. Pacheco: Is the North Atlantic Oscillation just a pink noise? *Physica A*, **323** (2003), 705-716.

I. Fernández, J. Pacheco: On the role of engineering in mathematical development. *European Journal of Engineering Education* **30**, no. 1 (2005), 81-90.

I. Grattan-Guinnes: *The Fontana history of the mathematical sciences*. The Fontana Press, London, 1997.

J. Pacheco, I. Fernández: Flounders unlimited. *European Journal of Engineering Education* **27**, no. 4 (2002), 401-407.

L. Pontriaguin: *Équations différentielles ordinaries*. Mir, Moscú, 1969.

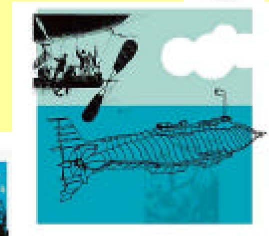
sctm 05

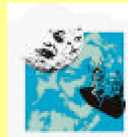
…dicen que el aprendizaje es **continuo**, pero como es un tanto duro, vamos a hacerlo un **poco más** entretenido…

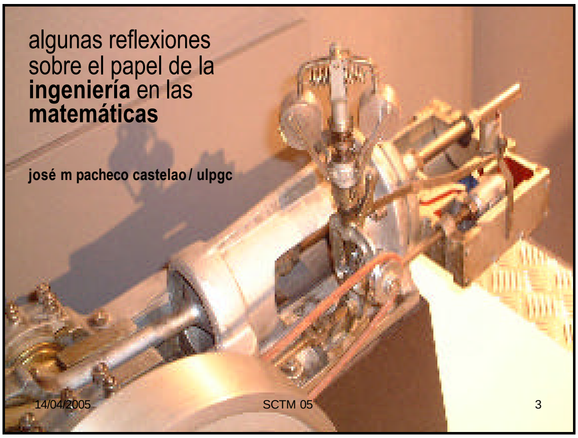
es el centenario de julio verne

(1828-1905)

- los ingenieros y julio verne
- "la isla misteriosa"
- "los quinientos millones de la begum"
- y tantas otras…







algunas reflexiones sobre el papel de la **ingeniería** en las **matemáticas**

josé m pacheco castelao / ulpgc

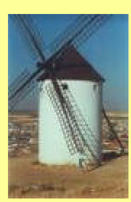
guión

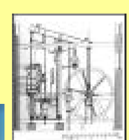
- introducción
- el emblema de la ingeniería industrial
- técnicas, tecnologías y matemáticas
- ingeniería, cálculo, informática, lógica…
- una *laaarga* genealogía
- conclusiones

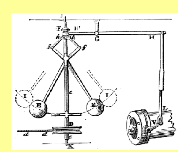
veamos un emblema…

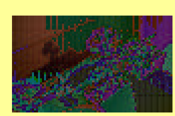
el emblema de la ingeniería industrial española está presidido por un "regulador" (*governor*, en inglés), uno de los inventos más fascinantes de todas las épocas…

el regulador de watt (1736-1819)









matemáticas del regulador, 1

$$\varphi''+b\varphi'+g\sin\varphi-n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi=0$$

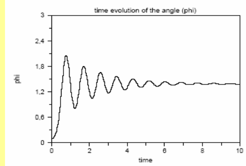
$$\omega'=\Omega(\omega,\varphi)$$

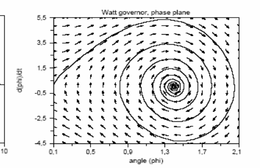
$$\varphi'=\psi$$

$$\psi'=-F\psi-g\sin\varphi+n^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$$

matemáticas del regulador, 2

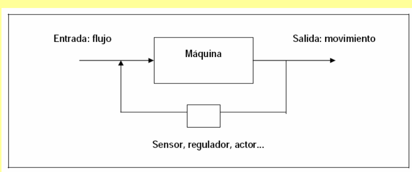
Este sistema posee un punto singular en el origen. Si se cumple la desigualdad $\frac{g}{n^2\omega^2}<1$, entonces existe otro punto singular $(\arccos\frac{g}{n^2\omega^2},0)$, lo cual nos indica que el regulador no funciona si la velocidad angular no alcanza un valor umbral: Esto es, $\omega>\frac{\sqrt{g}}{n}$ es condición necesaria para que el regulador comience a actuar.





retroalimentación

la retroalimentación (inglés: *feedback*) es la base de la teoría no lineal y de los mecanismos de control, su esquema general es

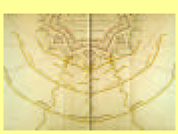


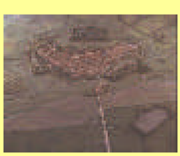
técnicas, tecnologías y matemáticas

- técnica: del griego *techné*
- tecnología: del griego *techné* + *lógos*
- matemáticas: del griego *máthesis*: “explicación”
- el proyecto
- el proyecto como modelización
- de la técnica y la tecnología a la ciencia pura
- …

1º: vauban  y la arquitectura militar

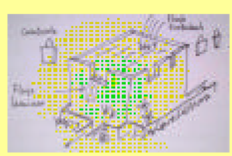
sébastien vauban (1633-1707) y los diseños poligonales de las fortalezas. problemas de optimización. el proyecto como modelo…





2º: de la hidráulica a la mecánica de fluidos

la **hidráulica** es la práctica ingenieril antecesora (recordar el acueducto de **segovia** o las **cantoneras** del campo canario) de la **mecánica de fluidos**. ésta siempre se ha considerado más matemática que física, especialmente en los países anglosajones.



$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}=-\frac{\nabla P}{\rho}+\nu\nabla^2\mathbf{u}+\frac{\mathcal{F}}{\rho},$$

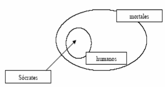
3º: ingeniería, cálculo, lógica e infórmatica (i)

el método científico

Se acepta generalmente que el conocimiento e interpretación del mundo que nos rodea se obtiene mediante un método[6] que se sustenta en la alternancia de dos procesos, el inductivo y el deductivo. El primero de ellos intenta extraer de observaciones particulares reglas o leyes lo más generales posibles para condensar en ellas la mayor cantidad posible de conocimiento. Por su parte, el segundo consiste en la aplicación de "mecanismos válidos de razonamiento" para obtener, a partir de unas hipótesis de principio, conclusiones de las que se espera contrastar su veracidad mediante experiencias posteriores. La combinación inducción-deducción es el núcleo de lo que se conoce como *método científico*[7].

Es evidente que la parte deductiva plantea más dificultades conceptuales, pues toda ella descansa sobre la idea de *mecanismo válido de razonamiento*, como si ésta fuera una noción fácil de entender y definir. Los primeros –y perdurables- intentos de clasificar los razonamientos válidos están en la Lógica de Aristóteles, o cálculo de silogismos. Muchos siglos después el Método de Descartes (1596-1650) y la Escuela de Port Royal (alrededor de 1650) darán paso a la idea propuesta por Leibniz (1646-1716) de *lengua perfecta*, el antecedente más claro de la Lógica Matemática creada a mediados del siglo XIX por George Boole (1815-1864) y otros autores. Unos años más tarde los problemas de la Lógica Matemática volverán a confluir con los derivados de la máquina de vapor a través del Cálculo Integral cuando Georg Cantor (1845-1918) cree la Teoría de Conjuntos hacia 1870. Al final volveremos sobre ello.

silogismos…



O mediante algunas fórmulas:

$$H \subset M$$
$$S \in H$$
$$\therefore S \in M$$

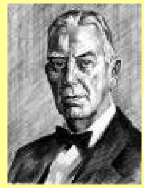
que también podemos encontrar escritas como:

$$[H \subset M] \wedge [S \in H] \Rightarrow [S \in M]$$

3º: ingeniería, cálculo, lógica e infórmatica (ii)

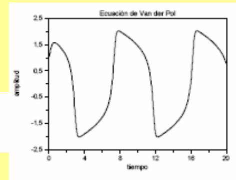
van der pol (1888-1959)

memoria ¿qué es? y oscilaciones no lineales, la electrónica entra en acción…



$$x'' + kx' + \omega^2 x = 0$$

$$k = -\varepsilon(1-x^2), \quad \varepsilon > 0$$



una larga genealogía, 1

fourier (1768-1830)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\nabla^2 u$$
$$u(x,0) = G(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(t) \begin{cases} \cos nx \\ \sin nx \end{cases}$$

$$C_n = \int_0^{2\pi} G(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{Bmatrix} dx$$

sin condiciones de contorno y en toda la recta:

$$C_n = \int_{\Re} G(x) \exp(inx) dx$$

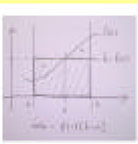
una laarga genealogía, 2

espacios funcionales

Espacio	Euclídeo $\Re^3$	Funciones $[0,2\pi) \to \Re$	Observación
Base	$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ nº finito de elementos	$\{e^{inx}, \quad n \in Z\}$ nº infinito de elementos	
Representación coordenada	$v = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$	$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx}$	(1)
Producto escalar	$v \bullet v' = = aa' + bb' + cc'$	$f \bullet g = \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx$	
Módulo	$\lvert v \rvert = \sqrt{v \bullet v} = = (a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\int_0^{2\pi} f^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f \bullet f} = \lVert f \rVert$	(2)
Coeficientes	$a = v \bullet \mathbf{i}$, $b = v \bullet \mathbf{j}$, $c = v \bullet \mathbf{k}$	$f_n = \int_0^{2\pi} f e^{inx} dx = f \bullet e^{inx}$	(3)
...	...	...	...

una laaarga genealogía, 3

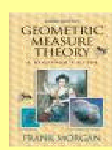
desarrollo del concepto de integral:
riemann (1826-866), cantor (1845- 1918), lebesgue (1875-1941)

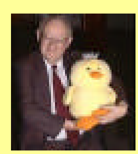


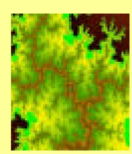
Máquina de vapor → Teoría del Calor → Fourier → Integrales →…

una laaaarga genealogía, 4

besicovich (1891-1970): teoría geométrica de la medida, mandelbrot (1924-): fractales…

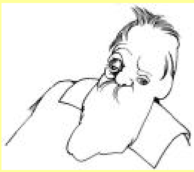






…Integrales → Teoría de Conjuntos → Medidas → Geometría Fractal → …

conclusión



el **problema clásico de la ingeniería** es dominar y controlar razonablemente las fuerzas que la naturaleza pone a disposición de quienes se atreven a utilizarlas, y mientras ejecutan esa tarea, se va leyendo y **reescribiendo el libro de la naturaleza**, que de acuerdo con el gran **galileo** (1564-1642), está escrito en el **lenguaje de las matemáticas**, pero…

las matemáticas son **obra de todos quienes se han acercado alguna vez hasta ellas** (y observen que **hoy** eso nos **incluye a todos nosotros**)

¡¡muchas gracias!!