

Modelización matemática de los mecanismos de orientación de los cetáceos. Familia ziphidae.

Carmelo Militello Militello
Catedrático de Física Aplicada
Departamento de Física Fundamental y Experimental, Electrónica y Sistemas,
Universidad de La Laguna

Introducción

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo un problema de investigación que podría plantearse inicialmente como un problema estrictamente de biología o zoología ha llevado a planteamientos que van desde el modelado físico e instrumentación hasta el modelado numérico. Más aún, la deficiencia en los modelos numéricos existentes ha conducido a la generación de nuevas aproximaciones basadas en el método de los elementos finitos. Intentaremos, en forma breve, mostrar la evolución de estos trabajos.

El varamiento de zifios en las playas de Lanzarote y Fuerteventura del año 2002

En el año 2002, las maniobras militares conjuntas entre la Armada Española y la OTAN en Lanzarote y Fuerteventura dejaron como saldo negativo la aparición en las costas de estas dos islas de 12 cetáceos muertos. Curiosamente todos ellos pertenecían a la misma familia, la *ziphidae*. Una imagen de los cuerpos durante la maniobra de recolección puede verse en la Figura 1.



Figura 1. Zifios varados en Fuerteventura. Foto cedida por Vidal Martín Martel (SECAC).

Ante este hecho surgen varias preguntas: ¿Sucedió antes? Sí, en Bahamas en el año 2000, y anteriormente en Grecia en el año 1996. ¿Hubo otras especies implicadas? No. ¿Qué

grado de desarrollo tenían los especímenes encontrados? No había crías pequeñas. ¿Había características comunes en las 3 maniobras? Sí, la utilización, además de otros, de un sonar cuya frecuencia central de emisión se encuentra entre los 2400 a 3500 Hz. Este es el único presente en los 3 casos.

¿Qué nivel de presión produce daños parciales o dolor en el animal?

La armada estadounidense propone como límites de exposición, válidos para operaciones NATO, los siguientes valores, debiendo entenderse que exposiciones menores o niveles menores no producen daños relevantes:

- 1 segundo a 204 dB
- 1 minuto a 186 dB
- 20 minutos a 172 dB
- 8 horas continuas a 160 dB referidos a 1 μ Pa

Estos valores se basan en extrapolación de resultados para humanos o para especies en las que se han podido determinar molestias.

El ping de máxima duración es de 1 minuto para el LFA (*Low Frequency Array*), sonar de baja frecuencia de la armada estadounidense. Se toma como nivel de seguridad para este sonar el de 180 dB. De cualquier manera, parece que el mismo no estuvo presente durante las maniobras.

Por otro lado, las autopsias muestran hemorragias en oídos, hígado y otros órganos.

En el momento que nos integramos en la comisión de investigación se contaba, además, con los siguientes resultados:

- Vidal Martín Martel (SECAC), a través de los estudios del estado de los contenidos estomacales y de las especies contenidas en las mismas, determina que en el momento del suceso los animales estaban comiendo a 900 m de profundidad.
- El Laboratorio de Histología y Anatomía Patológica del Instituto Universitario de Sanidad Animal de la Facultad de Veterinaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, dirigido por el Prof. Antonio Fernández, determina que la causa de la muerte es la descompresión brusca (embolia grasa) [1]. Esto justifica que no hayan muerto infantiles, que maman y no se sumergen a cazar.
- Especie poco estudiada. Tímida. Se la conocía en el 2002 por haber encontrado cadáveres. Investigaciones recientes determinan gran abundancia en El Hierro.
- Existen pocos trabajos respecto de los hábitos de esta especie.

Para fijar la terminología realizamos ahora (Figura 2) una descripción sucinta del sistema auditivo del zifio (familia *ziphidae*). Una visualización completa, incluyendo una tomografía computerizada, puede encontrarse en [2]. Debemos tener en cuenta que:

- No poseen oído externo (está atrofiado).

- Se considera que utilizan la mandíbula inferior como receptor de sonido, pero no está caracterizado.

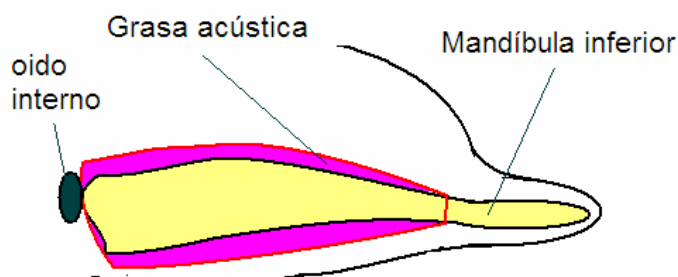


Figura 2. Esquema de la mandíbula inferior y de la cavidad acústica, llena de grasa líquida a la temperatura corporal de 36°C. El oído interno se localiza cercano a estas estructuras. El oído externo se ha ido atrofiando durante el proceso evolutivo.

Objetivos del trabajo

El objetivo de este trabajo es investigar las propiedades en frecuencia del conjunto compuesto por la mandíbula inferior acoplada con la cavidad acústica de grasa líquida, y determinar si existen efectos de amplificación dentro de la cavidad o un comportamiento diferencial del conjunto en las frecuencias de emisión de los sonares.

Para obtener resultados se exploran dos vías, el modelado numérico y la simulación física. La simulación numérica presenta como ventaja fundamental la facilidad para probar distintas condiciones de carga y visualizar resultados. Su desventaja es intentar estudiar un problema de interacción fluido-estructura en una propagación de onda acústica, que de por sí no es una tarea sencilla.

La simulación física tiene como ventaja, si el modelo físico es representativo del problema, que sus resultados parecen más creíbles por no depender de aproximaciones numéricas. El tiempo de realización se puede acotar. La desventaja es que no podemos contar con el animal, ni siquiera muerto. Debemos construir un modelo híbrido, de componentes óseos y materia no orgánica e instrumentarlo.

Obtención de las muestras

Tanto para el modelo numérico como para el físico es importante contar con los componentes, a fin de determinar su geometría y las propiedades físicas de los distintos elementos componentes. La mandíbula inferior es muy difícil de conseguir entera, debida a su fragilidad. Si el animal vara se rompe por efecto de las olas; si se lo encuentra muerto o a la deriva, se rompe al izarlo.

Obtuvimos un cráneo y las dos mandíbulas inferiores (una rajada) de un zifio de Cuvier, cedidas por el Departamento de Biología Marina de la Universidad de La Laguna (Figura 3).

El Laboratorio de Histología y Anatomía Patológica del Instituto Universitario de Sanidad Animal de la Facultad de Veterinaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, dirigido por el Prof. Antonio Fernández, facilitó la observación y medida *in situ* de uno de estos animales.



Figura 3. Vista anterior y posterior del maxilar inferior derecho.

Nótese la existencia de una parte delgada y compacta, cuyo espesor no supera los 2,0, y una parte gruesa porosa en el otro extremo. Llamamos *material 1* al compacto y delgado y *material 2* al poroso. Las propiedades elásticas se obtienen a partir de mediciones ultrasónicas en el espesor. Para el material poroso las propiedades se ponderan con la fracción de aire. Nótese que el material 1 presenta una relación resistencia/masa que es un tercio la del acero (Tabla 1).

Material	Módulo elástico E (Nw/m ²)	Módulo de Poisson	Densidad ρ (kg/dm ³)	Vel. sonido (m/s)	E/ρ	Módulo de Poisson
material 1	2,10e10	0,25	1,92	3307	1,09e10	0,25
material 2	1,25e10	0,25	1,14	3311	1,09e10	0,25
acero	2,10e11	0,30	7,80	5188	2,70e10	0,30

Tabla 1. Propiedades de los materiales que componen el maxilar inferior.

La velocidad de propagación del sonido en la grasa acústica se asume (*spermaceti oil*): 1450 m/s [3].

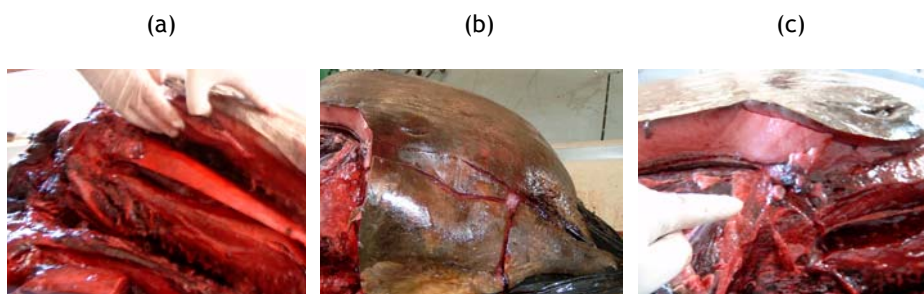


Figura 3. Detalle de la configuración de la cabeza. En (a), nótese la capa de grasa; en (b), el tamaño de la cavidad acústica que rodea la mandíbula inferior; en (c), el oído externo atrofiado (señalado por el dedo), la cercanía del oído interno a la mandíbula y la cavidad de grasa acústica.

Modelo numérico de la mandíbula

En la Figura 4 mostramos el modelo numérico realizado para ambos componentes. Para el hueso se han combinado elementos sólidos elásticos tetraédricos y elementos de cáscara triangulares y cuadriláteros. Las incógnitas en los nodos son los desplazamientos de los mismos [4].

Para la grasa se han utilizado elementos tetraédricos que modelan el comportamiento de un fluido acústico. Las incógnitas en los nodos son la presión del fluido para cada nodo.

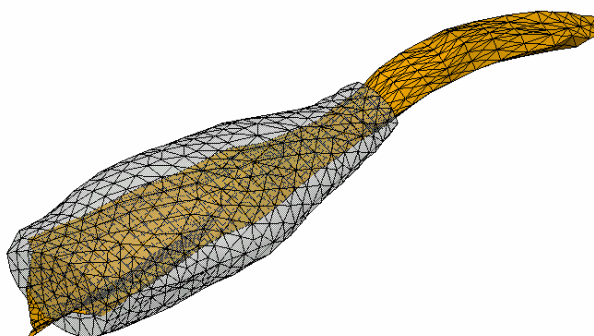


Figura 4. Superposición gráfica de los modelos de la mandíbula inferior y de la cavidad de grasa acústica. Debemos enfatizar que en el modelo actual, la interacción entre ambos no ha sido modelada.

El análisis de los primeros modos acústicos en la cavidad dan los resultados de la Figura 5 y la Tabla 2. Como puede verse estos modos de vibración son longitudinales, y los dos primeros muestran un máximo relativo en la zona del oído del animal.

Modos	Frecuencia (Hz)
Primer modo	446.81
Segundo modo	2467.8
Tercer modo	4026.5

Tabla 2. Frecuencias de resonancia acústica de la cavidad.

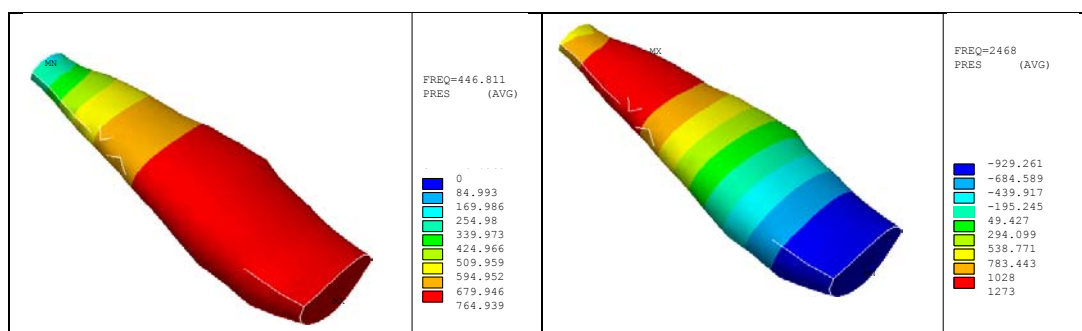


Figura 5. Distribución de presión acústica en los dos primeros modos.

Para el hueso se asume como condición de contorno el soporte de la apófisis en la quijada y la condición de simetría impuesta por la otra mandíbula, que no se modela ni representa. Como veremos más adelante esta condición de contorno es irrelevante, ya que para las frecuencias de interés el modo de vibración es local. Es decir, la vibración relevante se presenta en las placas delgadas y es independiente de las condiciones de apoyo antes mencionadas. En la Figura 6 vemos los modos de vibración de la mandíbula inferior para las frecuencias de 3054 y 3100 Hz. Para este nivel de frecuencias el hueso presenta una alta densidad espectral, con saltos inferiores a los 50 Hz.

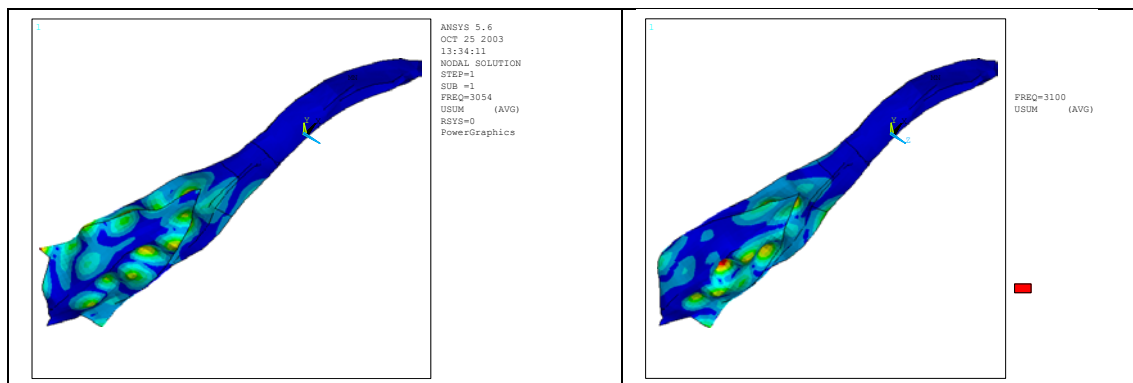


Figura 6. Modos de vibración del hueso para las frecuencias de 3054 y 3100 Hz.

Si bien tenemos frecuencias para ambos componentes en el rango de emisión del radar, todavía debemos verificar cuál será el efecto de ambos sistemas acoplados.

El problema de interacción fluido-estructura

Los modelos numéricos de simulación de componentes estructurales utilizan como incógnita los desplazamientos de las partículas de continuo. Los modelos de comportamiento acústico de fluidos utilizan como incógnita la presión en los puntos del mismo. La bibliografía sobre este problema es extensa, y el lector interesado puede consultar las referencias [4], [5], [8]. Existe la posibilidad de modelar el fluido acústico a partir del campo de desplazamientos y esto permitiría una conexión directa entre ambos modelos, es decir, el fluido acústico aparecería como un elemento estructural, gobernado por ecuaciones diferenciales similares a las de la estructura, con propiedades físicas diferenciadas. El problema de esta formulación es que el campo de desplazamientos propuesto dentro de cada elemento no es irrotacional, como requiere la teoría acústica, y aparecen en la solución de los problemas típicos modos rotacionales, de baja frecuencia, que contaminan la solución. Esta contaminación no es real, en el sentido que el sistema numérico resuelve lo que hemos formulado, pero nosotros deseamos eliminar este comportamiento espurio.

Varios procedimientos se han implementado para mejorar el comportamiento de estos elementos. El método de penalidad en las rotaciones, desarrollado por Hamdi et al. [5], arroja buenos resultados en los problemas presentados en la referencia. Luego, Olson y Bathe [10] y posteriormente Wang y Bathe [13] afirman que el elemento de Hamdi no puede resolver lo que ellos denominan los tres paradigmas de la interacción fluido-estructura, debido, entre otras, a las restricciones de irrotacionalidad e incompresibilidad. Una

desventaja adicional de este elemento es que el factor de penalidad queda indeterminado, debiendo ser seleccionado por el usuario.

Otros elementos en desplazamientos son los formulados por Bermúdez y Rodríguez [15], basados en polinomios de Raviart-Thomas, que no presentan modos espurios de rotación. Lamentablemente, la utilización de grados de libertad en la mitad de los lados, en lugar de los nodos, los hacen inapropiados para ser acoplados con elementos estructurales comunes.

El elemento propuesto en este trabajo es un elemento plano de 3 nodos, formulado con la técnica de los principios variacionales parametrizados de Felippa et al. [16], que, particularmente en la formulación libre de Bergan y Hanssen [17], plantea una energía de alto orden que se encarga de mantener la irrotacionalidad del fluido. Esta energía de alto orden es afectada por un factor de estabilización, el cual depende del tamaño del elemento. Se presenta un criterio para el cálculo de dicho factor.

Ecuaciones básicas

Se considera que el fluido es no viscoso, isentrópico y las vibraciones son de tan baja amplitud que no modifican apreciablemente la densidad del mismo. La ecuación de momento y la ecuación constitutiva del fluido son:

$$\rho \dot{v} + \nabla p = 0 \quad (1)$$

$$\beta \nabla \cdot v + \dot{p} = 0, \quad (2)$$

donde v es el vector velocidad, p es la presión, ρ es la densidad de masa y β el módulo de compresibilidad, que se define en términos de la velocidad del sonido como:

$$\beta = \rho c^2. \quad (3)$$

De la ecuación (2) podemos deducir que

$$\nabla \cdot u = -\frac{p}{\beta}. \quad (4)$$

Esto significa que para condiciones de casi incompresibilidad, donde β es mucho mayor que p , la divergencia de u es cercana a cero. Aplicando divergencia a (4) y sustituyendo en (1) obtenemos

$$\beta \nabla (\nabla \cdot u) - \rho \ddot{u} = 0 \quad (5)$$

El funcional cuya ecuación de Euler es (5) es:

$$\Pi = \int_{V_f} \left\{ \frac{\beta}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - f^B \cdot \mathbf{u} \right\} dV + \int_{S_f} \tilde{p} \cdot u_n^S dS \quad (6)$$

donde u_n^S es el desplazamiento normal a la superficie S_f . Este funcional es utilizado para la discretización por elementos finitos de fluidos acústicos basados en desplazamientos. Varias formulaciones se han desarrollado con el fin de mantener la condición de irrotacionalidad del fluido, como se mencionara anteriormente. La formulación de Hamdi se basa en la utilización del siguiente funcional:

$$\Pi = \int_{V_f} \left\{ \frac{\beta}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - f^B \cdot \mathbf{u} \right\} dV + \int_{V_f} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\nabla \times \mathbf{u})^2 \right\} dV + \int_{S_f} \hat{p}_n \cdot \mathbf{u}_n^S dS \quad (7)$$

Esta solución consiste en penalizar la rotación del fluido agregando una energía ficticia debida a la rotación, obligando al fluido a ser muy “rígido” ante la misma. El factor de penalidad α debe ser lo suficientemente alto como para que la contribución de la energía debida al rotacional sea importante respecto a la de compresión, y suficientemente bajo para que no sea este término el que gobierne el problema.

Formulación propuesta

Para desarrollar este elemento hemos partido de una formulación de alto rendimiento basada en un Principio Variacional Parametrizado (PVP) desarrollado en el marco de la elasticidad lineal. Veremos primero el paralelismo de la formulación de un elemento acústico en desplazamientos con el de uno de elasticidad lineal.

Definiendo la deformación como el cambio unitario de volumen:

$$e^u = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad , \quad (8)$$

la tensión como:

$$p = \beta e^u = \beta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad , \quad (9)$$

las fuerzas inerciales como:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = f^B \quad , \quad (10)$$

y reemplazando (8)-(10) en (6), obtenemos el funcional

$$\Pi = \int_{V_f} \left\{ \frac{1}{2} p^u e^u - f^B \cdot \mathbf{u} \right\} dV + \int_{S_f} \hat{p}_n \cdot \mathbf{u}_n^S dS \quad , \quad (11)$$

que representa la energía total elástica acumulada en el fluido y el trabajo de las cargas externas. Podemos parametrizar la energía elástica a partir de tres campos independientes

$\tilde{u}, \tilde{p}, \tilde{e}$ definidos dentro del elemento, (p^u, e^p indican campos derivados de otros):

$$U_{(param)} = \frac{1}{2} \int_V \langle \tilde{p} \quad p^e \quad p^u \rangle \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ & j_{22} & j_{23} \\ sim. & & j_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^p \\ \tilde{e} \\ e^u \end{Bmatrix} dV. \quad (12)$$

Tomando la variación de la energía interna parametrizada respecto de los campos independientes e integrando por partes obtenemos:

$$\delta U = \int_V [\Delta e \delta \tilde{p} + \Delta p \cdot \delta \tilde{e} - (\text{div } p' \cdot \delta \tilde{u})] dV + \int_S \mathbf{p}'_n \cdot \delta \tilde{u} dS = 0, \quad (13)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Delta e &= j_{11} e^p + j_{12} \tilde{e} + j_{13} e^u \\ \Delta p &= j_{12} \tilde{p} + j_{22} p^e + j_{23} p^u \\ p' &= j_{13} \tilde{p} + j_{23} p^e + j_{33} p^u \end{aligned} \quad (14)$$

En la convergencia los tres campos independientes deben coalescer y p' debe representar un campo de presión único, encargado de satisfacer la ecuación de Euler del problema. Esto indica que en la convergencia $\Delta e = 0$, $\Delta p = 0$ y $\tilde{p} = p^e = p^u$, y obliga a que los seis parámetros no sean independientes y hayan de satisfacer:

$$j_{11} + j_{12} + j_{13} = 0, \quad j_{12} + j_{22} + j_{23} = 0 \quad \text{y} \quad j_{13} + j_{23} + j_{33} = 1. \quad (15)$$

Estas son las mismas condiciones obtenidas en el PVP de la elasticidad. A la energía interna debemos agregarle el trabajo en el contorno de las cargas externas y de las discontinuidades “posibles” entre los campos definidos en los distintos elementos. Proponemos, al igual que en [16], un potencial de fuerzas que incluye un campo de desplazamientos independiente definido en el contorno $\tilde{\mathbf{d}}$:

$$P^d(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{d}}) = \int_V f^B \tilde{\mathbf{u}} dV + \int_S \tilde{\mathbf{p}}_n (\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{d}}) dS + \int_{S_i} \hat{\mathbf{p}}_n \tilde{\mathbf{d}} dS. \quad (16)$$

El acento circunflejo indica campos impuestos en el contorno del elemento. De esta manera construimos un potencial híbrido “ d generalizado”:

$$\Pi^d = U_{param} + P^d. \quad (17)$$

Si seleccionamos los parámetros libres tal que la matriz de ponderación resulte dependiente de un solo valor α y que se satisfagan idénticamente las ecuaciones (15) obtendremos, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \alpha - 1 & -\alpha & 1 \\ -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

En la discretización asumimos $\tilde{e} = \bar{e} + e_h$ y $\tilde{p} = \beta \bar{e}$. No proponemos un campo de desplazamientos en el interior del elemento, pero sí un campo $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{N}_d \mathbf{v}$ en el contorno del mismo. Este campo cumple con la propiedad de estar unívocamente definido en el contorno entre dos elementos por los grados de libertad que comparten sobre ese lado. La deformación media \bar{e} está a cargo de copiar los modos de deformación constante. La componente e_h es un campo de deformaciones arbitrario que debe cumplir las siguientes propiedades:

1. Debe quedar en función de los desplazamientos nodales en el contorno del elemento: $e_h = \mathbf{A} \mathbf{v}$. La matriz \mathbf{A} es arbitraria, pero debe cumplir la condición de no generar deformaciones medias, es decir:

$$\int \mathbf{A} dV = 0. \quad (10)$$

2. El campo de deformaciones de alto orden debe cancelarse ante un campo de desplazamientos nodales consistente con un desplazamiento rígido o un campo de deformación constante \mathbf{v}_{rc} ; luego, $\mathbf{A} \mathbf{v}_{rc} = 0$.

Si estas condiciones se cumplen, la matriz de rigidez elemental puede obtenerse como:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_b + \alpha \mathbf{K}_h, \quad (20)$$

donde

$$\mathbf{K}_h = \beta \int \mathbf{A}^T \mathbf{A} dV. \quad (21)$$

Lo interesante es que el valor de α es arbitrario, mientras produzca matrices elementales definidas positivas, y puede variar de elemento a elemento sin comprometer la convergencia. Si requerimos la satisfacción del IET (test de un elemento) de Bergan y Hansen [17], la deformación media debe calcularse como:

$$\bar{e} = \mathbf{L}^T \mathbf{v} / V, \quad (22)$$

siendo V el volumen del elemento. La matriz \mathbf{L} se obtiene a partir del campo de desplazamientos asumido sobre el contorno:

$$\mathbf{L} = \int_S \mathbf{N}_{dn}^T dS, \quad (23)$$

donde N_{dn} es la proyección de las funciones de forma de los desplazamientos en el contorno sobre las normales al mismo. Finalmente, la matriz básica se obtiene como:

$$\mathbf{K}_b = \frac{\beta}{V} \int \mathbf{L}^T \mathbf{L} dV. \quad (24)$$

El triángulo plano de 3 nodos

Formulamos ahora la matriz de rigidez para un elemento acústico plano de 3 nodos, con dos desplazamientos por nodo (Figura 7).

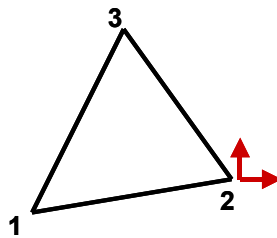


Figura 7. Triángulo de 3 nodos.

El campo de desplazamientos básico asumido dentro del elemento es

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y \\ b_1 + b_2x + b_3y \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Los coeficientes a_i y b_i pueden ponerse en función de los desplazamientos nodales fácilmente. La deformación o cambio de volumen es constante y puede demostrarse que coincide con la ecuación (22):

$$\bar{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = a_2 + b_3. \quad (26)$$

La propuesta es obtener la deformación de alto orden a partir de un campo de desplazamientos que se active cuando el campo intenta rotar. Probamos con el siguiente campo de desplazamientos:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2x + a_3y + \epsilon(y^2x + yx^2) \\ b_1 + b_2x + b_3y + \eta(y^2x + yx^2) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Si se propone

$$\nabla \times \mathbf{u}^* = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = a_3 - b_2 + \varepsilon(2yx + x^2) - \eta(y^2 + 2yx) = 0 \quad (28)$$

vemos que no se obtienen suficientes condiciones para evaluar los coeficientes ε, η . Proponemos entonces

$$\int_{V_e} (\nabla \times \mathbf{u}^*) r^2 dV = \int_{V_e} (\nabla \times \mathbf{u}^*) (x^2 + y^2) dV = 0. \quad (29)$$

Podemos satisfacer esta condición si pedimos:

$$\int_{V_e} (\nabla \times \mathbf{u}^*) (x^2) dV = 0, \quad \int_{V_e} (\nabla \times \mathbf{u}^*) (y^2) dV = 0. \quad (30)$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_{xx}(a_3 - b_2) + \varepsilon \int_{V_e} y^2(2yx + x^2) dV - \eta \int_{V_e} y^2(y^2 + 2yx) dV &= 0, \\ I_{yy}(a_3 - b_2) + \varepsilon \int_{V_e} x^2(2yx + x^2) dV - \eta \int_{V_e} x^2(y^2 + 2yx) dV &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

De esta forma podemos obtener

$$\begin{aligned} \varepsilon &= c_{11}a_2 + c_{12}b_3, \\ \eta &= c_{21}a_2 + c_{22}b_3. \end{aligned} \quad (32)$$

Por consiguiente,

$$e_h^* = \varepsilon(y^2 + 2xy) + \eta(2xy + x^2). \quad (33)$$

Aplicando las reglas del Principio Variacional Parametrizado (19) se propone

$$e_h = e_h^* - \frac{1}{V_e} \int_{V_e} e_h^* dV \quad (34)$$

para eliminar el campo de deformación medio. Tenemos ahora todos los ingredientes para armar nuestra matriz de rigidez elemental.

Obtención del factor de estabilización de energía

Ante un campo de desplazamientos nodales \mathbf{u} se obtienen las siguientes energías:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}_b \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u}^T \mathbf{K}_h \mathbf{u}. \quad (35)$$

Consideramos ahora cuál es el mínimo número de elementos necesario para capturar una semionda. Asumimos que el límite de nuestra confianza se dará cuando sea capturada por tres elementos, como la malla de la Figura 8. A pesar de capturar un campo irrotacional, el error de aproximación generará energía relacionada con la matriz de alto orden. Para este caso límite exigimos que ambas matrices produzcan la misma energía cuando introducimos un campo de desplazamientos de este tipo:

$$u^p = \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right). \quad (36)$$

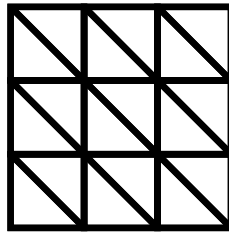


Figura 8. Malla de control de lado $l \times l$ para obtención del factor de estabilización de energía.

El factor se calcula como el cociente entre ambas energías y depende del tamaño del elemento:

$$\alpha = \left[(\mathbf{u}^p)^T \mathbf{K}_b \mathbf{u}^p \right] / \left[(\mathbf{u}^p)^T \mathbf{K}_h \mathbf{u}^p \right]. \quad (37)$$

Resultados del pistón inclinado

Un problema típico para analizar los problemas de interacción fluido-estructura es el de un pistón inclinado conteniendo un fluido en una cavidad (Figura 9).

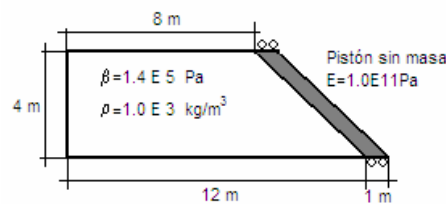


Figura 9. Problema del pistón inclinado.

La Figura 10 muestra las mallas empleadas para analizar la convergencia de la solución del problema del pistón inclinado.

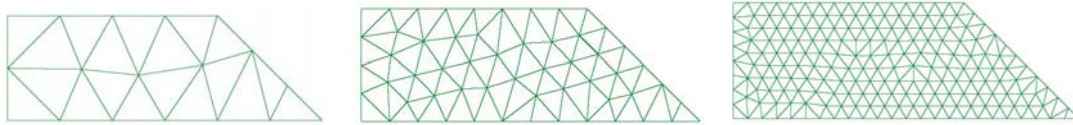


Figura 10. Mallas de elementos finitos para el problema del pistón inclinado. Densidades de 19, 82 y 339 elementos, respectivamente.

La Tabla 3 presenta los resultados de las primeras cuatro frecuencias de vibración y su comparativa con la solución obtenida mediante la formulación $u-\theta$ [9].

Densidad	Factor α	Frecuencias (Hz)			
		Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
mall 1	3.41	0.29	0.84	1.34	1.36
mall 2	13.6	0.29	0.87	1.42	1.45
mall 3	54.7	0.29	0.88	1.44	1.47
$u-\theta$		0.29	0.89	1.46	1.49

Tabla 3. Convergencia de la solución.

La Figura 11 muestra los modos de vibración obtenidos con la formulación basada en el PVP para la malla 2.

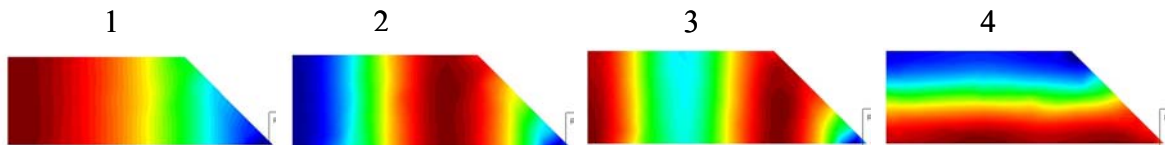


Figura 11. Cuatro primeros modos de vibración del pistón inclinado utilizando la formulación PVP.

Tal como se muestra en [13], la formulación basada en desplazamiento, presión y momento de vorticidad es sensible a la definición de la normal al contorno. Asimismo, se afirma en dicha referencia que las formulaciones basadas en desplazamientos también lo son. En la Tabla 4 se muestran los resultados empleando la formulación PVP para la malla 2, ante variaciones aleatorias de la dirección de la normal sobre el pistón.

Variación	Frecuencias (Hz)			
	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
$\pm 1^\circ$	0.29	0.87	1.44	1.47
$\pm 5^\circ$	0.29	0.87	1.44	1.47
$\pm 10^\circ$	0.29	0.87	1.44	1.47
$u-\theta$	0.29	0.89	1.46	1.49

Tabla 4. Resultados del problema del pistón inclinado obtenidos con la formulación PVP para una variación aleatoria de la normal.

La Figura 12 muestra el efecto de la variación de la normal en el segundo y cuarto modos de vibración obtenido con la formulación PVP.

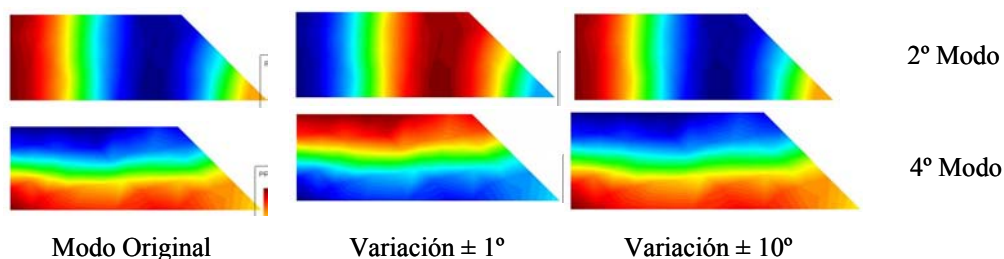


Figura 12. Efecto de la variación de la normal en la formulación PVP.

Como se deduce de la Tabla 4 y la Figura 12, el elemento basado en el PVP es insensible a la definición de la dirección normal al contorno.

Como vemos, la formulación propuesta, extendida al caso tridimensional, cumpliría con varios requisitos ideales para enfrentar un problema como el de la cavidad acústica de la mandíbula del zifio. Es un elemento sencillo, puede copiar fácilmente cualquier geometría, converge rápidamente y es insensible a la determinación de la normal a la interface fluido-sólido.

Modelo físico

Para realizar el análisis experimental se construyó un modelo físico de la cavidad. En la Figura 13 puede verse la evolución de esta construcción. El modelo se basa en la hipótesis que las paredes de la cavidad serán rígidas.



Figura 13. Modelo de la cavidad acústica.

Primeramente hemos instalado un pequeño altavoz dentro de la cavidad, intentando simular el efecto de una porción del hueso que vibrara dentro de la misma. Hemos colocado este altavoz a dos distancias del extremo delgado: 21.5 cm y 35 cm. Para tener en cuenta el efecto de las longitudes de onda en agua y aire utilizamos frecuencias que son un cuarto de las frecuencias en agua. Tomamos medidas simultáneas en los extremos delgado, A, y ancho, B, de la cavidad. La diferencia de niveles para los dos puntos se presentan en la gráfica de la Figura 14. Puede observarse que en el rango de frecuencias entre 800 y 960 Hz (equivalentes en el agua a 2400 y 3840 Hz) la intensidad en el extremo A es predominante, produciéndose una inversión drástica después de la frecuencia de 1000 Hz (4000 Hz en agua).

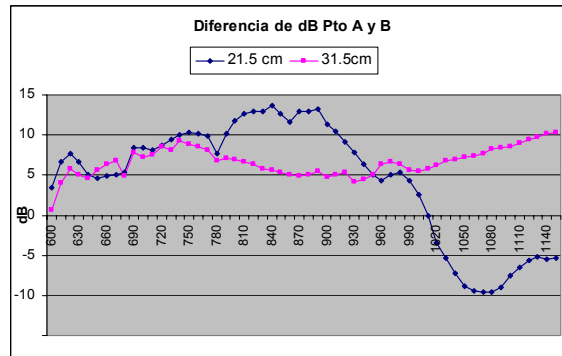


Figura 14. Diferencia de intensidades acústicas en ambos extremos de la cavidad para excitaciones en distintos puntos.

Por último, hemos instalado en el hueso dos acelerómetros, colocado un hidrófono en la región donde debería encontrarse el oído del animal y sumergido el sistema en agua (ver Figura 15). Dentro del recipiente se instala un altavoz subacuático.

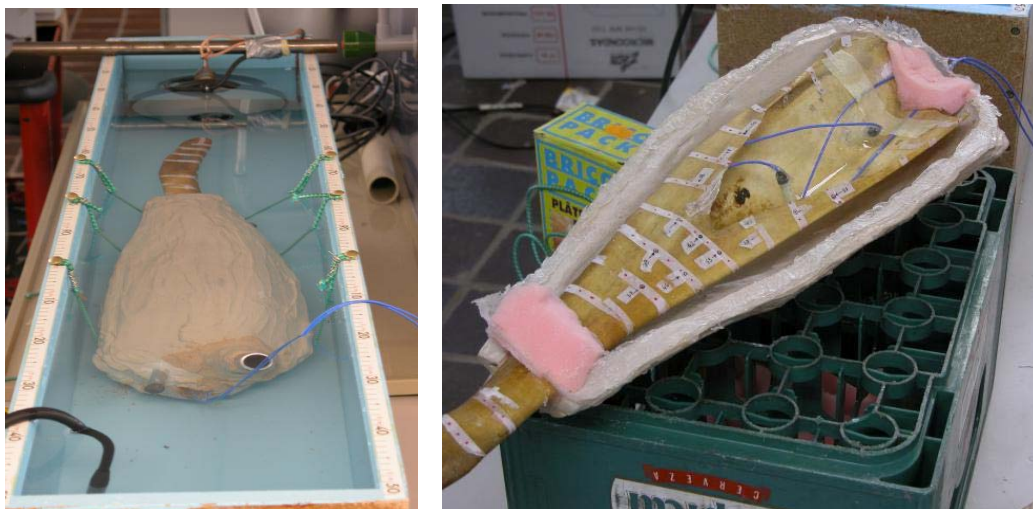


Figura 15. Dispositivo experimental para excitar el hueso y la cavidad acústica. Nótese la posición de los acelerómetros dentro del hueso.

En la Figura 16 podemos ver la respuesta del acelerómetro montado en el hueso ante una excitación del altavoz de 3600 Hz. Puede verse claramente como esta excitación genera un pico con un alto factor de calidad, no excitándose ninguna frecuencia cercana.

Para estas mediciones se utilizaron las herramientas de análisis de señal generadas por el presente grupo investigador. El software desarrollado para la medición se diferencia en cinco bloques, constituidos por: un generador de señales de pseudo-ruido; un emisor que conecta la salida de la tarjeta de audio a un amplificador de potencia y a un transductor electro-mecánico; un receptor que realiza la adquisición de la señal emitida a un ritmo máximo de muestreo de 250000 mps y el procesado a una frecuencia de 44105.30 mps; un

sistema inversor que permite obtener la respuesta impulsiva del medio; y un visualizador que se encarga de representar la respuesta impulsiva en una interfaz gráfica de usuario. El sistema de medición se ha implementado sobre un núcleo de Linux 2.4.18 recompilado para el soporte de las tarjetas de adquisición y se ha hecho uso de las herramientas de GNU. El escritorio sobre el que se ha trabajado es KDE 3.0 y KDE 3.1 que son las versiones soportadas en la distribución de paquetes Debian/Woody [19].

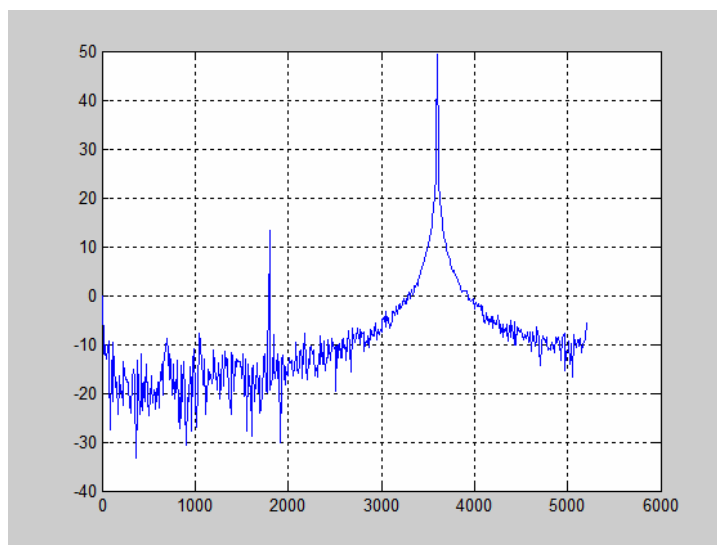


Figura 16. Respuesta del acelerómetro montado en el hueso ante una excitación del altavoz de 3600Hz.

Conclusiones

Si bien los resultados son todavía provisionales, ya que es necesario agregar instrumentación al modelo físico y generar el modelo numérico de interacción fluido-estructura, es evidente que la estructura anatómica compuesta por la cavidad de grasa acústica y el maxilar inferior del zifio de Cuvier son especialmente sensibles al rango de frecuencias de emisión de los sonares de frecuencia media. La relación entre este fenómeno y la muerte de los mismos todavía debe ser investigada.

Por otro lado, es interesante ver cómo el estudio de un problema, podríamos decir medioambiental, genera la necesidad de construir nuevas herramientas de análisis numérico y combinarlas.

Agradecimientos

Este trabajo es fruto de una investigación conjunta con S. Correa Vélez, S. Rodríguez Buenafuente, V. Guadalupe Suárez, I. Martín Mateos y F. Rosa González.

Referencias

- [1] *Conclusiones del estudio anatómo-patológico de la Unidad de Anatomía Patológica de la Facultad de Veterinaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria sobre el varamiento masivo de zifios en Fuerteventura y Lanzarote entre el 24 y el 27 de septiembre de 2002.* [Disponible en <http://www.gobcan.es/medioambiente/varamientos/informepatologia.pdf>].
- [2] *Joint interim report, Bahamas marine mammal stranding event of 15-16 March 2000.* U.S. Department of Commerce, December 2001. [Disponible en http://www.nmfs.noaa.gov/prot_res/overview/Interim_Bahamas_Report.pdf].
- [3] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor: *The finite element method*, Vol. I. McGraw Hill, 1989.
- [4] M.A. Hamdi et al.: A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13 (1978), 139-150.
- [5] T.B. Belytschko, J.M Kennedy: A fluid-structure finite element method for the analysis of reactor safety problems. *Nuclear Engineering Design* 38 (1976), 71-81.
- [6] T.B. Belytschko: Fluid-structure interaction. *Computer & Structures* 12 (1980), 459-469.
- [7] H. Morand, R. Ohayon: Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure systems: finite element results. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), 741-755.
- [8] G.C. Everstine: A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration* 79 (1981), 157-160.
- [9] L.G. Olson, K.J. Bathe: Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential. *Computers & Structures* 21 (1985), 21-32.
- [10] C.A. Felippa, R. Ohayon: Mixed variational formulation of finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction. *Journal of Fluids and Structures* 4 (1990), 35-57.
- [11] K.J. Bathe, C. Nitikitpaiboon, X. Wang: A mixed displacement-based finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction. *Computers & Structures* 56 (1995), 225-237.
- [12] X. Wang, K.J Bathe: Displacement/pressure based finite element formulations for acoustic fluid-structure interactions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), 2011-2017.
- [13] L.G. Olson, K.J Bathe: A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure systems. *Nuclear Engineering and Design* 76 (1995), 137-151.
- [14] A. Bermúdez, R. Rodríguez: Finite element computation of the vibration modes of a fluid-soil system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 119 (1994), 355-370.
- [15] C.A. Felippa, C. Militello: Variational formulation of high performance finite elements: Parametrized variational principles. *Computers & Structures* 36 (1990), 1-11.
- [16] P.G. Bergan, L. Hanssen: A new approach for deriving "good" finite elements. En *The Mathematics of the Finite Elements, Vol. II - MAFELAP II Conference* (J.R. Whiteman, ed.), Academic Press, 1976, pp. 483-497.

- [17] **C. Militello, C.A. Felippa:** The individual element test revisited. En *The finite element in the 1990's*. E. Oñate et al. (eds.), Springer-Verlag, 1991, pp. 554-564.
- [18] **R. Buenafuente et al.:** *Instrumento para medir la respuesta impulsiva usando SML*. En *XIX Simposio Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio*, Barcelona (2004), p. 178.