Geometría con papel (papiroflexia matemática)

Covadonga Blanco García y Teresa Otero Suárez
Profesora Titular de Escuela Universitaria y Catedrática de Enseñanza Secundaria
Departamento de Matemáticas,
Universidade da Coruña e IES "Antonio Fraguas" de Santiago de Compostela

Breves apuntes históricos

Papiroflexia es una palabra de origen latino que deriva de *papiro* (papel) y *flectere* (doblar); según el diccionario de la RAE significa doblar el papel y, por extensión, darle la figura de determinados seres u objetos. Por lo tanto, el término define tanto el objeto resultante como la acción de doblar.

El término original de la disciplina es *origami*, palabra japonesa con la misma composición lingüística que la castellana: *ori* (doblar), *kami* (papel).

Los japoneses inventaron la papiroflexia hace más de mil años. Le dieron el nombre de origami y le dotaron de principios estéticos ligados a su cultura. Es en China donde se introduce el papel en los primeros siglos de la era cristiana y llega a Japón en el siglo VI d.C.; con el papel hizo su aparición la papiroflexia, a la que podemos considerar como un arte, una ciencia y un entretenimiento, y de ahí su importancia en el aprendizaje de las matemáticas como estimulante de la actividad cerebral.

Para la sensibilidad japonesa, el éxito de una figura de papel depende de su estructura y proporción. Se plantean varios interrogantes ante una figura de papel: ¿llega a expresar la forma verdadera del objeto? En el caso de tratarse de un animal: ¿sugiere su forma de moverse, su paso, deslizamiento o galope? Y, finalmente, ¿es una mera reproducción del original, o ahonda más profundamente en su carácter esencial?

Si queremos hablar de una clasificación de la papiroflexia podemos considerar varios aspectos: la finalidad, el tipo de papel utilizado y la cantidad de piezas utilizadas. A continuación se presentan tres clasificaciones que se proponen de acuerdo a cada uno de los aspectos mencionados.

De acuerdo a la finalidad:

- **Artístico**: construcción de figuras de la naturaleza o para ornamento.
- **Educativo**: construcción de figuras para el estudio de propiedades geométricas más que nada.

De acuerdo a la forma del papel:

- **Papel completo:** trozo de papel inicial en forma cuadrangular, rectangular o triangular.
- **Tiras:** trozo inicial de papel en forma de tiras largas.

De acuerdo a la cantidad de trozos:

- **Tradicional:** un solo trozo de papel inicial (u ocasionalmente dos o tres, a lo sumo).
- **Modular:** varios trozos de papel iniciales que se pliegan para formar unidades (módulos), generalmente iguales, los cuales se ensamblan para formar una figura compleja.

Educación: papiroflexia y matemáticas

El origami puede ser una gran ayuda en la educación de las matemáticas:

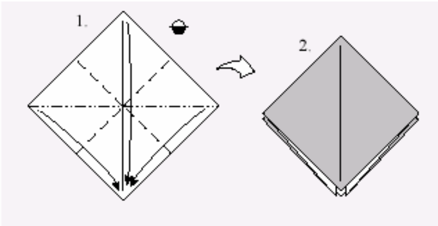
- Proporciona al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permite desarrollar diferentes contenidos, no sólo conceptuales sino de procedimiento. También desarrolla la psicomotricidad y, fundamentalmente, la psicomotricidad fina, así como la percepción espacial.
- Desarrolla la destreza manual, la exactitud en la realización del trabajo y la precisión manual.
- Relaciona la disciplina de las matemáticas con otras ciencias, como las artes, por ejemplo.
- Motiva al estudiante a ser creativo, ya que puede desarrollar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana, sino también espacial.

Bases y diagramas

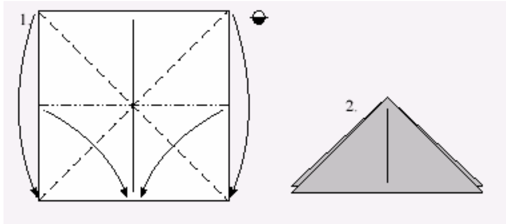
Para el matemático, la belleza de la papiroflexia está en su simple geometría. En cada trozo de papel hay patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que permiten a la hoja llegar a tener variadas e interesantes formas.

Existen unas formas geométricas fundamentales que dan lugar a gran variedad de modelos, denominadas *bases*. Los modelos tradicionales derivan de cuatro bases, desarrolladas por los japoneses, conocidas como la de la *cometa*, la del *pez*, la del *pájaro* y la de la *rana*.

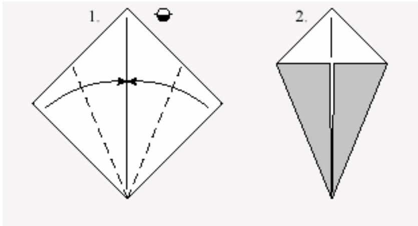
A continuación damos los diagramas de estas bases junto con otras dos, conocidas como base *preliminar* y base *bomba*.



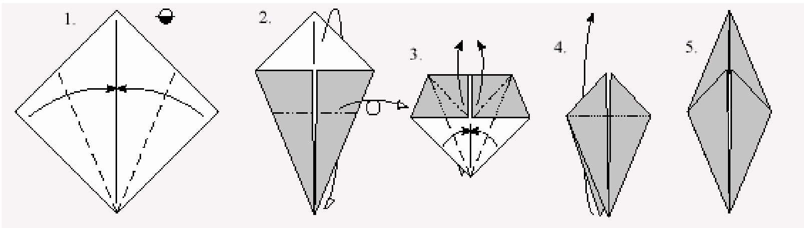
Base preliminar



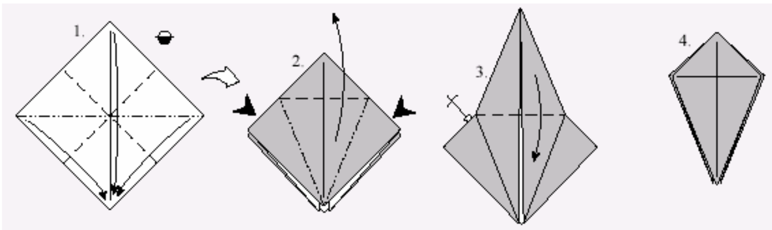
Base bomba



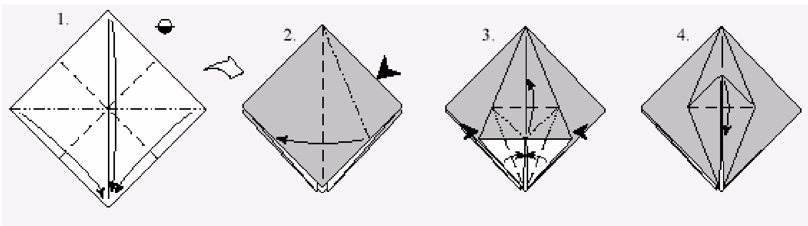
Base cometa



Base pez



Base pájaro



Base rana

Figura 1. Bases fundamentales.

La mejor manera de entender un modelo de papiroflexia es dibujar lo que se suele llamar un *patrón de doblado*. Para obtener el patrón de doblado de un modelo hay que desdoblar el papel, dejarlo liso, y dibujar sus dobleces más importantes; sólo los que contienen su geometría esencial, no los detalles. El patrón de doblado es, por necesidad, una abstracción, la reducción de una forma complicada a su estructura interna más básica.

Dibujando los patrones de doblado de las cuatro bases fundamentales descubrimos una notable progresión. La más simple, la base de la cometa, esta formada por seis triángulos, dos de un tipo y cuatro de otro. Un triángulo pequeño y dos grandes forman un modelo repetitivo. Al desdoblar el modelo reconocemos los mismos elementos simples una y otra vez. Dos módulos forman una base de cometa; cuatro, una de pez; ocho, una de pájaro; dieciséis, una de rana… Repetir el módulo en escalas más y más pequeñas lleva de forma "fatídica" de la base de la cometa a la de pez, de la de pez a la de pájaro, de la de pájaro a la de rana…

Poliedros en papel

Un poliedro se puede definir como un conjunto conexo de $\mathbb{R}^3$ formado por un número finito de polígonos planos que se juntan de manera que cada lado de un polígono pertenece exactamente a otro polígono del poliedro, y de manera que los polígonos que concurren en cada vértice forman un circuito simple. Los polígonos se llaman *caras* y sus lados *aristas*. Es decir, un poliedro es una superficie cerrada no diferenciable (vértices y aristas) que divide al espacio en dos partes, una no acotada y otra acotada que llamamos *interior*.

Los poliedros más importantes desde el punto de vista matemático son los poliedros convexos, de modo que podemos definirlos mediante un sistema de desigualdades:

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq d_i \quad \forall i = 1,\ldots,C\,,$$

siendo C el número de caras.

Los poliedros más famosos son los llamados *platónicos*, que no son más que los cinco poliedros regulares que existen: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro. La demostración de que sólo existen éstos se atribuye a Teeteto (425-379 a.C.), de la escuela de Platón. La demostración más elegante de este resultado se hace mediante la fórmula de Euler.

Platón, en su libro *Timeo* (ap. 55-56), atribuye a cada uno de estos sólidos uno de los cuatro elementos, en el pasaje en el que describe la creación del universo. El tetraedro es el fuego, el octaedro el aire, el cubo la tierra, y el icosaedro las moléculas de agua. Concluye Platón que el Creador utilizó el dodecaedro para formar el universo.

Los cinco poliedros regulares, cuyas caras son todas de la misma forma y tamaño, pueden parecer simples, pero en realidad son muy difíciles de plegar, especialmente utilizando hojas únicas de papel cuadrado. Es por ello que en el desarrollo del taller vamos a combinar la papiroflexia modular y la tradicional en la construcción de los distintos poliedros.

Utilizando la papiroflexia tradicional es especialmente difícil de doblar el dodecaedro regular. Kazuo Haga, profesor en la universidad de Tsukuba, abordó el problema realizando una labor excelente para superar las dificultades. El tetraedro regular, el hexaedro y el octaedro son relativamente fáciles. No obstante, el método del profesor Haga es el único que se ha desarrollado hasta la fecha para plegar los más difíciles, como el icosaedro y el dodecaedro, a partir de una única hoja de papel.

1. Hexaedro o cubo

Módulo Sonobè

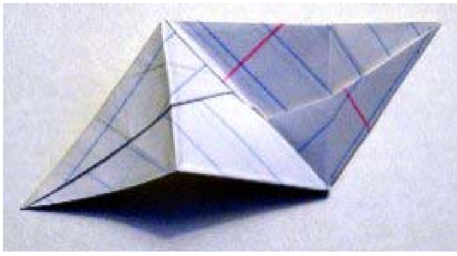


Figura 2. Módulo Sonobè.

El *módulo Sonobè* puede considerarse el punto de origen de la papiroflexia modular. Su fundador, Mitsunobu Sonobè, lo denominaba "caja de color", aunque hoy día el término empleado no es otro que módulo de Sonobè.

Seis módulos Sonobè nos permiten la construcción del cubo de múltiples maneras sin más que introducir pequeñas variaciones en la construcción de cada módulo. Es importante en la realización de los módulos tener en cuenta que todos son de la misma forma para poder realizar el ensamblaje, lo que nos lleva a una reflexión sobre la simetría especular y abre un campo interesante sobre las figuras que podrían construirse en el caso de utilizar módulos simétricos en la construcción de un mismo cubo.

La utilización de módulos de más de tres colores en la elaboración de este cubo fue investigada por Masayuki Hayashi. Este diseño se ha llamado desde hace mucho tiempo *diábolo*, el nombre de una especie de peonza rotativa accionada mediante una cuerda fijada en los extremos de dos palillos. La visualización del cubo así obtenida justifica de forma inmediata este nombre: "vale más una imagen que cien palabras".

Para la construcción del cubo con dos colores existen diversas soluciones. Nos podemos fijar en la que hace uso de los diferentes colores del anverso y reverso del papel. El método de ensamblado varía, y aunque la ubicación de los dobleces es idéntica al caso anterior se producen cambios en la utilización de los pliegues elevados o hundidos.

Con estos mismos módulos Sonobè es posible construir esferas de más unidades. Resulta relativamente sencilla la realización de las que utilizan 12 y 30 módulos. Un problema entretenido es construir la esfera multimodular de 30 unidades a partir de tres colores de papel y disponer el montaje de forma que ninguna punta (pirámide) adyacente sea del mismo color.

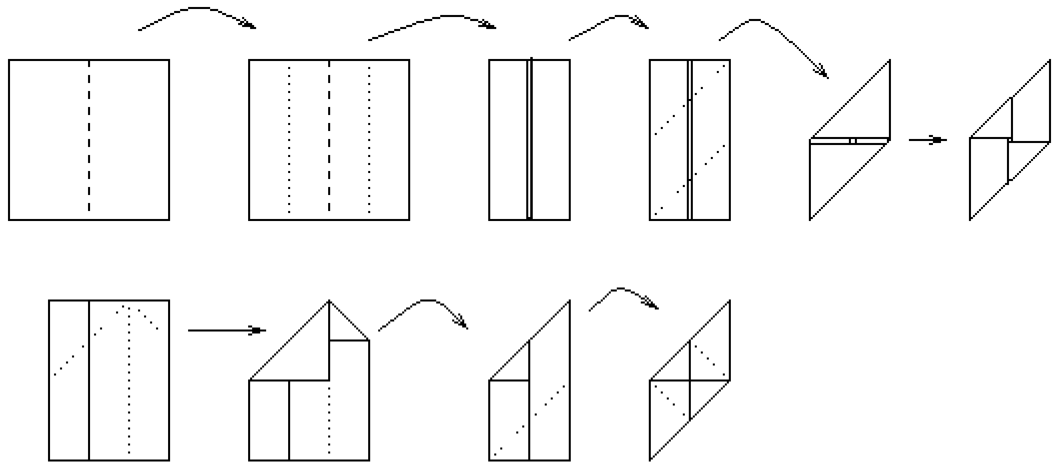


Figura 3. Módulo Sonobè: diagramas
[http://hverrill.net/pages~helena/origami/sonobe/instructions].

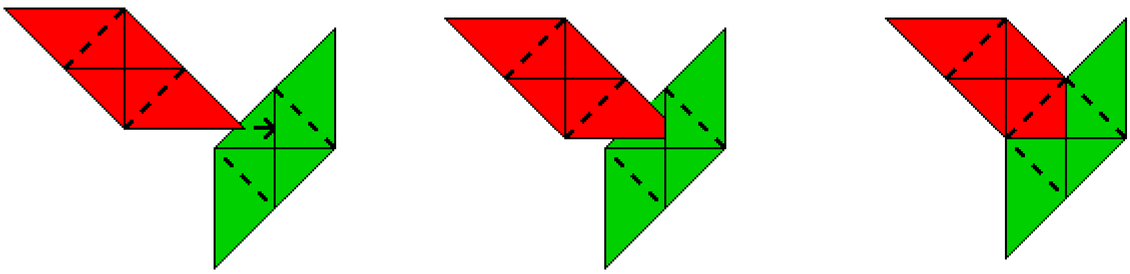


Figura 4. Método de unión para el cubo.

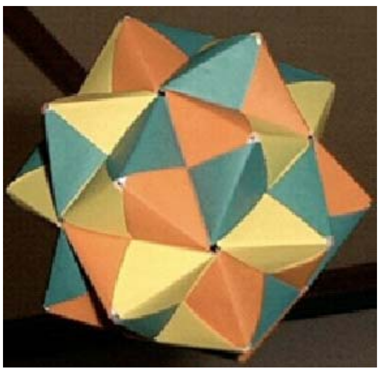


Figura 5. Sonobè de 30 módulos [Ignacio Royo].

Se puede utilizar la papiroflexia tradicional para la elaboración de la misma figura: el hexaedro. El método que proponemos es el inventado de forma independiente por Haga y Kasahara. Este método consigue una figura firme y estable, con la ventaja de que ningún doblez no deseado aparece en las caras. Si previamente a dar volumen al papel con el ensamblado se dibujan en la forma adecuada los puntos del dado, se obtiene un dado trucado debido al peso añadido como resultado de numerosos pliegues de papel sobre la cara marcada con el punto uno. Este hecho nos permite introducir en el aula el concepto de probabilidad y proponer ejercicios al alumno relacionados con el tema de una manera "experimental", analítica y al mismo tiempo lúdica.

2. Tetraedro, octaedro e icosaedro

Vamos a realizar estos tres sólidos platónicos utilizando papiroflexia modular. Van a ser un claro ejemplo de cómo un mismo módulo puede dar lugar a distintos poliedros dependiendo del número de módulos y de la forma de ensamblarlos.

El módulo que utilizaremos en la elaboración del tetraedro, octaedro e icosaedro ha sido ideado por Tomoko Fuse.

Tetraedro

Necesitaremos dos módulos, construidos con simetría especular.

En la realización del módulo utilizaremos un papel con distinto color en cada una de sus caras. Resultan de gran interés los tres primeros pasos, que nos permiten la construcción del ángulo de 60º y nos llevan a un estudio para la obtención de ángulos de 30º, 60º y, a partir de ello, a la construcción de diversos polígonos regulares, empezando por el triángulo equilátero.

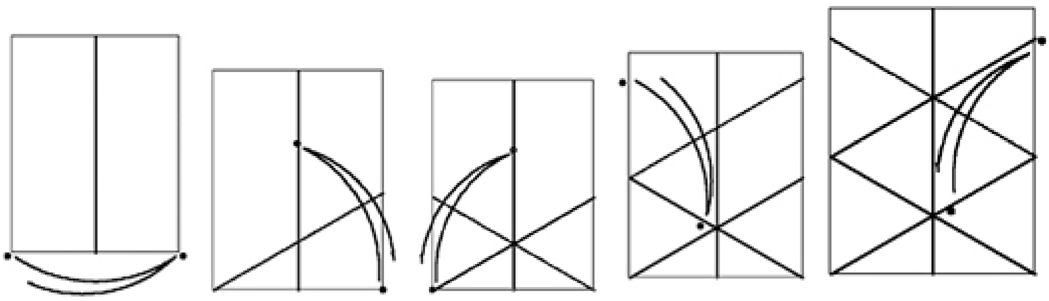


Figura 6.

Simultáneamente al proceso de construcción se recuerdan los nombres de las figuras geométricas que intervienen en la realización de un poliedro: vértices, aristas, caras; así como otros conceptos: ejes de simetría, líneas perpendiculares y paralelas, congruencia entre figuras, etc. El módulo terminado puede verse en la Figura 7.

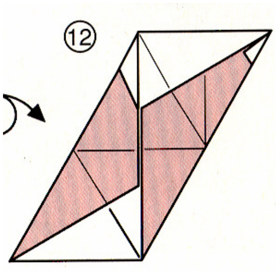


Figura 7.

Construimos el especular y procedemos al ensamblado (Figura 8):

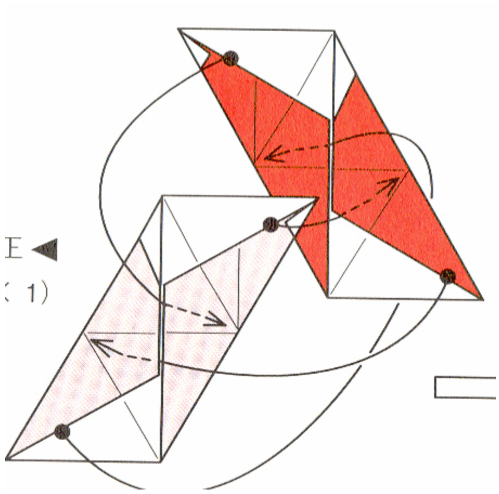


Figura 8.

Octaedro e icosaedro

En la construcción del octaedro se utilizarán 4 módulos iguales y en la del icosaedro 10, 5 de ellos con una orientación levógira y otros 5 con una orientación dextrógira.

Figura 9. Tetraedro y octaedro (Helena Verrill).

3. Dodecaedro

Ya hemos indicado que la construcción del dodecaedro con una sola hoja de papel entraña grandes dificultades, por lo que, también como en el caso del tetraedro, octaedro e icosaedro, recurrimos al origami modular.

Para construir el dodecaedro es necesario un módulo que permita la aparición de caras pentagonales de manera que en cada vértice concurran tres aristas. Vamos a utilizar un módulo ideado por Silvana Mamino y que parte, al contrario que en los casos anteriores, de un papel rectangular en vez de cuadrado. La proporción utilizada es DIN A.

Se utilizan 30 módulos de 5 colores distintos.

Figura 10. Dodecaedro (Enrica Dray).

Conclusión

La clave para utilizar pedagógicamente la papiroflexia en la enseñanza de las matemáticas está en interpretar geométricamente qué hacemos cuando doblamos papel. Damos algunos ejemplos de ello:

- Si doblamos dos lados que concurren en una esquina uno sobre otro, no hacemos otra cosa que trazar la bisectriz.
- Si llevamos un punto del papel sobre otro y doblamos, estamos trazando la mediatriz del segmento que une esos dos puntos.
- Mediante pliegues podemos construir un triángulo equilátero.
- Podemos construir una parábola dada por su foco y su recta directora.
- Si doblamos un papel cuadrado en rectas paralelas a sus lados que sean equidistantes hacemos una “cuadrícula” de dobleces, que nos permite construir superficies regladas como pueden ser el paraboloide hiperbólico y la silla del mono.
- El teorema de Haga nos permite dividir una hoja de papel en 3 y 5 partes con muy pocos dobleces.

Figura 11. Paraboloide hiperbólico.

Apéndice: Teorema de Haga

Si en un cuadrado $FIJH$ de lado unidad se lleva el vértice F sobre el punto medio del lado JI se obtienen los tres triángulos rectángulos $\Delta\,(abc)$; $\Delta\,(xyz)$; $\Delta\,(def)$, cuyos lados están en la proporción 3,4,5. Además, por ser $x=\dfrac{1}{2}$, es también $a=\dfrac{2}{3}$.

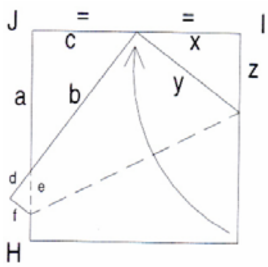


Figura 12. Teorema de Haga.

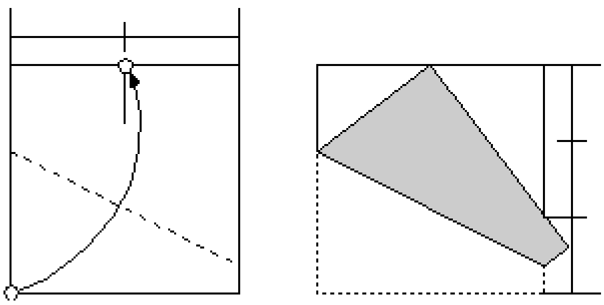


Figura 13. Teorema de Haga: división en 3 partes.

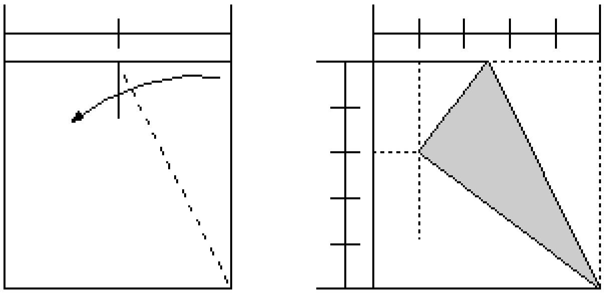


Figura 14. Teorema de Haga: división en 5 partes.

Finalmente, para terminar el taller se realizará alguna figura con movimiento, de interés para los primeros niveles de enseñanza, y se dará bibliografía comentada e información sobre direcciones de Internet útiles.

Referencias

P. Bascetta: Origami: Geometria con la carta (I). *Quadrato magico*, **52** (1998). [Disponible en http://www.origami-cdo.it/articoli/artgeo.htm].

D. Brill: *Brilliant origami*. Japan Publications, Tokyo, 2001.

T. Fusè: *Unit origami: Multidimensional transformations*. Japan Publications, Tokyo, 2000.

K. Kasahara, T. Takahama: *Papiroflexia "origami" para expertos*. EDAF, Madrid, 2000.

P. Macchi, P. Scaburri: *Nuevos objetos de papiroflexia*. Editorial De Vecchi, Barcelona, 1997.

J. de la Peña Hernández: *Matemáticas y papiroflexia*. Asociación Española de Papiroflexia, Madrid, 2001.

A. Rodríguez, A. Fernández: *Análisis de la actividad de origami*. [Disponible en http://www.pajarita.org/aep/articulos/ARTIC5-4.PDF].

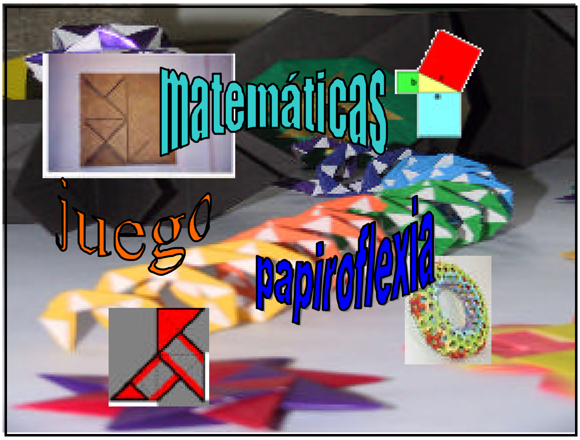
L. Simos, R. Gurkewitz, B. Arnstein: *Modular origami polyhedra*. Dover, New York, 1999.

Axiomatic origami – or the mathematical backbone of paper folding, http://cgm.cs.mcgill.ca/~athens/cs507/Projects/2002/ChristianLavoie/maths.html.

Origami (E. Dray, S. Mamino), http://digilander.libero.it/modulandia/modelli_dod.htm.

Origami and geometric constructions, http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html.

Página oficial de la Asociación Española de Papiroflexia, http://www.pajarita.org.
Página web de J.I. Royo Prieto, http://xtsunxet.usc.es/royoprieto



Una forma de "hacer matemáticas" utilizando:

- Conocimientos matemáticos teóricos
- Visión espacial
- Manejo fluido de los recursos geométricos
- Rigor en el desarrollo
- Habilidad manual

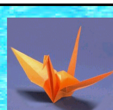
y...... !Cabeza y ojos!

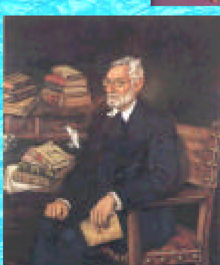
EL PAPEL

Fue inventado en China en el año 105 d.d.C.

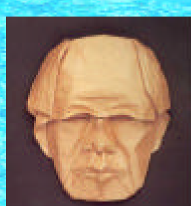
Llega a Japón en el siglo VI d.d.C.

La exposición universal de París en 1889 fue clave para la tradición del papel doblado en Europa.

PAPIROFLEXIA ES A  COMO ORIGAMI ES A 



MIGUEL DE UNAMUNO



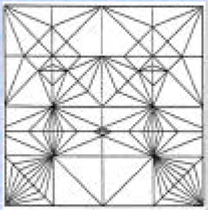
AKIRA YOSHIZAWA

PAPIRO - KAMI

FLECTERE - ORI

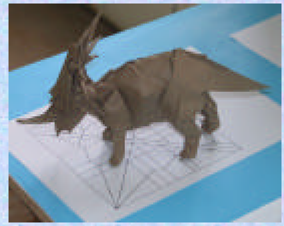
PAPIROFLEXIA - ORIGAMI

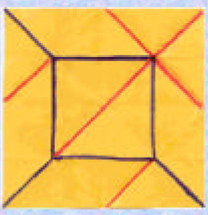
折紙



Al desplegar una figura de papiroflexia nos encontramos con su mapa de cicatrices

En cada trozo de papel hay patrones geométricos





Rojo : valle.

Negro : montaña

Método de plegado

y

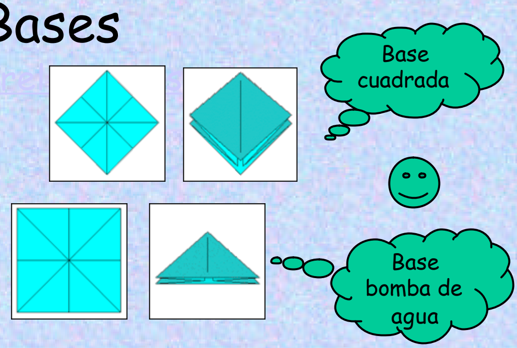
Mapa de cicatrices

En símbolos:

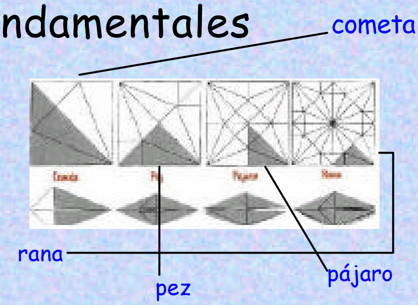
Valle: ------

Montaña: -·-·-·-

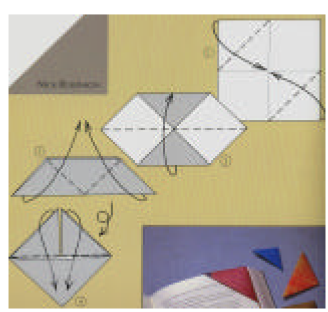
Bases



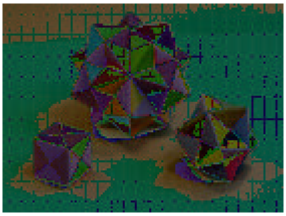
Las cuatro bases fundamentales



PUNTO DE LIBRO



[redacted]

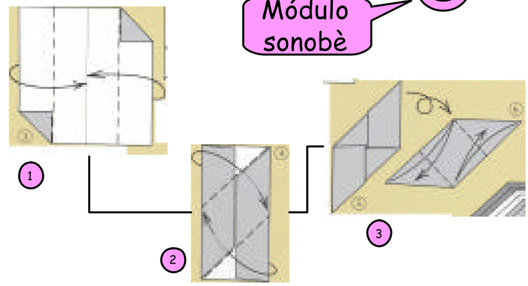


Módulo

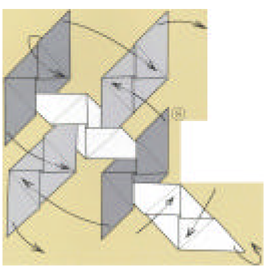
Sonobè

Diagramas 1

Módulo sonobè

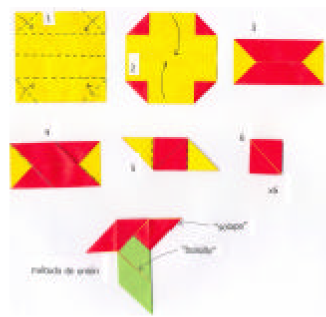


Método de unión

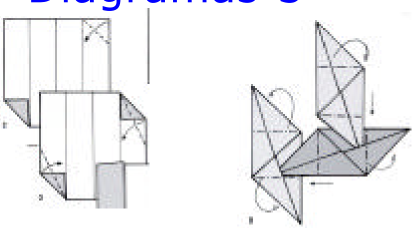


Resultado final

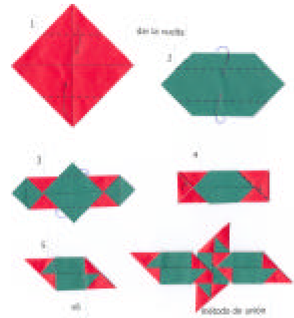
Diagramas 2



Diagramas 3

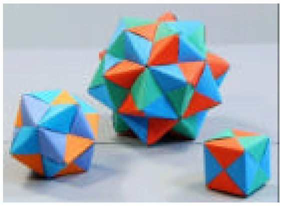


Diagramas 4



Poliedros estrellados Sonobé

- 3 módulos Sonobé → Pirámide
- 6 módulos Sonobé → Cubo (X estrellado?)
- 12 módulos Sonobé → Octaedro estrellado
- 30 módulos Sonobé → Icosaedro estrellado



TETRAEDRO

OCTAEDRO

ICOSAEDRO

SÓLIDOS PLATÓNICOS

El tetraedro es el fuego,

el octaedro el aire,

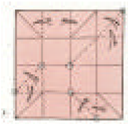
el cubo la tierra

y el icosaedro las moléculas de agua.

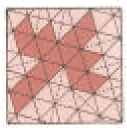
el Creador utilizó el dodecaedro para formar el universo

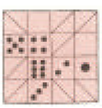
UNA HOJA

CUBO



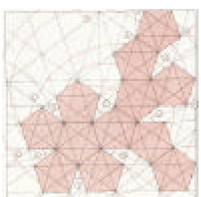
ICOSAEDRO





Dado trucado

DODECAEDRO



MODULARES

TOMOKO FUSÈ

OCTAEDRO

4 MÓDULOS

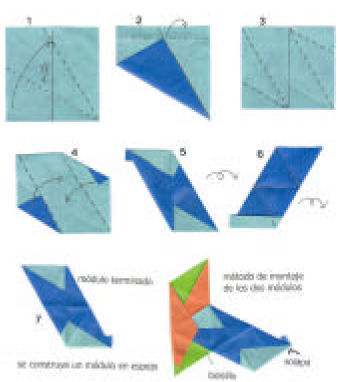
TETRAEDRO

2 MÓDULOS

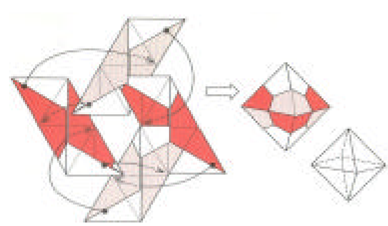
ICOSAEDRO

10 MÓDULOS

DIAGRAMAS TETRAEDRO

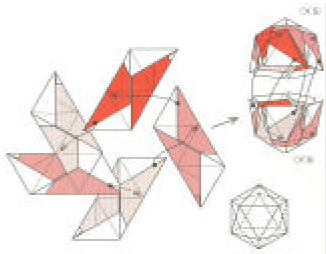


DIAGRAMAS OCTAEDRO



4 módulos iguales

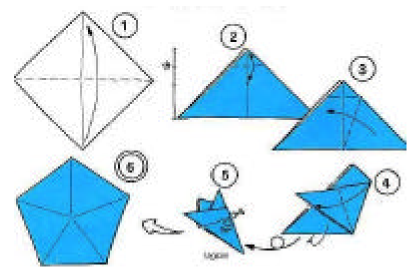
DIAGRAMAS ICOSAEDRO



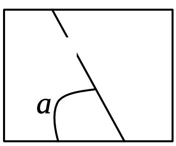
10 módulos. 5 en espejo

DODECAEDRO
Y
PENTÁGONO

pentágono



MÓDULO



VALOR EXACTO=108º.

α=105 º 22´

MATERIAL:

30 MÓDULOS

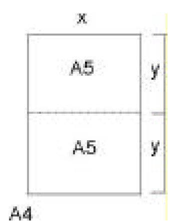
TAMAÑO: proporción DINA

Nomenclatura A4

1.- Todos los Ai son semejantes;

2.- Al partir Ai por la mitad obtenemos dos A(i+1)

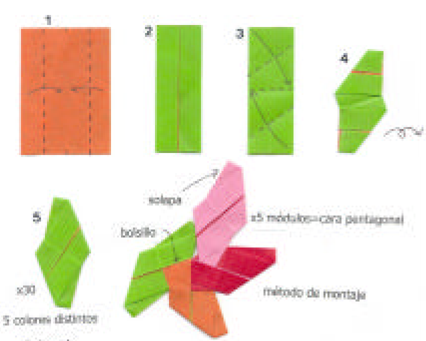
3.- El área de A0 es de 1 metro cuadrado.



$$\frac{x}{2y} = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

A4 297 x 210 mm

DIAGRAMAS



resultado