La historia de las matemáticas en la enseñanza del análisis

Martin Kindt
Profesor-Investigador
Freudenthal Instituut, Universidad de Utrecht (Holanda)

Resumen

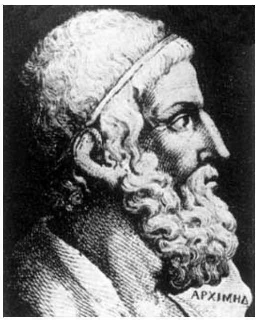
El nacimiento del Cálculo Infinitesimal pasó en la segunda mitad del siglo XVII por la obra de Newton y Leibniz. Como sabemos, Newton no hizo inscribir su hijo espiritual a tiempo, y es por ello que este nacimiento oficialmente está registrado en octubre de 1684 con el artículo de Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimus, itemque tangenribus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus.*

No podemos olvidar que la gestación duró casi 2000 años. Comenzó cuando los griegos lograron determinar áreas y volúmenes por un proceso que denominaron *método de exhausción*. El estudio de este método mediante las excelentes demostraciones de Euclides y Arquímedes no sólo es muy interesante, sino también muy instructivo como anticipación de dos conceptos básicos del Análisis, los de "límite" y "suma de Riemann".

Una segunda etapa importante en el desarrollo embrionario del Análisis es el *cálculo de indivisibles*, que es practicado por dos discípulos de Galileo, Cavalieri y Torricelli, en el comienzo del Siglo de Oro. Después, en este siglo se aceleró fuertemente el crecimiento del embrión gracias a las obras de muchos matemáticos famosos en la Europa occidental. Finalmente, fue el inglés Barrow, maestro de Newton, quien descubrió la sorprendente relación entre área y tangente.

En el taller vamos a recorrer unos fragmentos de la evolución prenatal del Análisis y discutir la posible conexión de estos ejemplos con la enseñanza actual.

La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza del Análisis



Martin Kindt

Instituto Freudenthal

Universidad Utrecht

Holanda

Indice

Prólogo

El nacimiento del Calculo Infinitesimal pasó en la segunda mitad del siglo XVII por la obra de Newton y Leibniz. Como sabemos Newton dejó de hacer inscribir su hijo espiritual a tiempo y es por tanto que este nacimiento oficialmente esta registrado en octubre 1684 con el artículo de Leibniz: *Nova methodus pro maximis et minimus, itemque tangenribus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus.*

No podemos olvidar que la gestación duró casi 2000 años. Comenzó cuando los griegos lograron determinar áreas y volúmenes por un proceso que se llamaron el método de *exhaución*.

El estudio de este método por unas pruebas excelentes de Euclides y Arquímedes no solo es muy interesante, pero también es muy instructivo como anticipación de unos conceptos básicos del Análisis, como 'límite' y 'suma de Riemann'.

Una segunda etapa importante en el desarrollo embrionario del Análisis es el calculo de indivisibles que es practicado por dos discípulos de Galileo, es decir Cavalieri y Torricelli, en el comienzo del siglo de Oro. Después en este siglo se aceleró fuertemente el crecimiento del embrión por las obras de muchos matemáticos famosos en la Europa occidental. Al fin fue el inglés Barrow, maestro de Newton, que descubrió la relación espantosa entre área y tangente.

En el taller vamos a reconocer unos fragmentos de la evolución prenatal del Análisis y discutir la conexión posible de estos ejemplos con la enseñanza actual.

1. *Euclides y el método de exhaución*

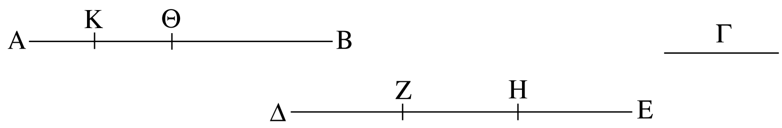
Proposición

Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad, y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

Euclides compuso su obra 'Los Elementos' en trece libros.
El libro X de los Elementos de Euclides, que trata de la teoría de la irracionalidad, comienza con la proposición mencionada arriba.
La traducción es más o menos literal.

***** *¿ Cómo puedes decir lo mismo en idioma moderno y cómo podrías probarlo?*

En su demostración Euclides representa las magnitudes por segmentos (de líneas rectas).



Las magnitudes dadas son AB y Γ.
Según un postulado de Eudoxo, que es recogido en el libro V de los Elementos, existe un múltiplo de Γ, sea ΔE, que excede AB.

Euclides razona más o menos así.
Sea ΔE es múltiplo de Γ y $\Delta E > AB$ (aquí $\Delta E = 3 \cdot AB$).
Restamos de AB respectivamente: $B\Theta > \frac{1}{2} AB$, $\Theta K > \frac{1}{2} A\Theta$, etc. de tal modo que la cantidad de los partes sea igual a la cantidad de veces que Γ esta incluido en ΔE (aquí 3 veces).
Entonces $\Delta H > A\Theta$, pues que se obtiene estas magnitudes por restar de ΔH menos que la mitad (es decir EH) y de AB más que la mitad (es decir $B\Theta$).
De la misma manera sigue $\Delta Z > AK$ o bien $AK < \Gamma$.

Al fin Euclides observa que la proposición vale también, si se quita *la mitad* de AB, *la mitad* del resto, etc.

Como siempre, Euclides da su demostración mediante un ejemplo concreto (aquí $3 \cdot \Gamma > AB$). Pero siempre tal ejemplo tiene un carácter paradigmático. Como aquí, es claro que su método vale para cualquiera número natural en lugar de 3.

En el idioma matemática de hoy su proposición dice que *para dos números positivos* α, ε ($\alpha > \varepsilon$) *hay un número natural n con*: $(\frac{1}{2})^n \alpha < \varepsilon$ .... (#)

La demostración en el estilo de Euclides es por determinar el número natural n con $(n + 1)\varepsilon > \alpha$.

Por eso: $n \cdot \varepsilon > \frac{1}{2}\alpha$, $(n-1) \cdot \varepsilon > (\frac{1}{2})^2 \alpha$, $(n-2) \cdot \varepsilon > (\frac{1}{2})^3 \alpha$, ..., hasta $\varepsilon > (\frac{1}{2})^n \alpha$

La proposición de Euclides, o bien la regla (#), llamaré el *principio de exhaución*.
De hecho es una invención de Eudoxo.

Se puede formular (#) de otra manera:
Dado un número positivo α*. Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un número natural n con* $(\frac{1}{2})^n \alpha < \varepsilon$ ... (**)

Ahora reconocimos que la proposición de Euclides es equivalente con: $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{2})^n = 0$

Los Griegos evitaron los conceptos ‘infinito’ y ‘limite’, pero se puede decir que la definición del limite de una sucesión es de origen griego.

En el libro XII de los Elementos (sobre la determinación de volúmenes) hay dos aplicaciones directas del llamado principio de exhaución:

- Proposición 2: *dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*
- Proposición 7: *un pirámide es un tercero de un prisma con la misma base y igual altura.*

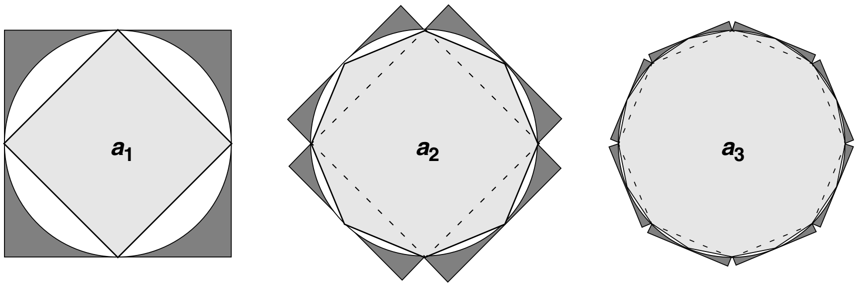
Claro que en proposición 2 es dicho implícitamente *las áreas (de* dos círculos y cuadrados) y en proposición 7 *el volumen (*de una pirámide y de un prisma). ''

Me restrinjo aquí a la proposición 2.
La proposición precedente es:

Los polígonos semejantes inscritos en circunferencias, son entre sí como los cuadrados de los diámetros.

La demostración de esta proposición no tiene un elemento infinitesimal; es basada del hecho que la razón de los áreas de dos triángulos semejantes es igual a la razón de los cuadrados de los lados correspondientes.

Para proposición 2 Euclides aproxima paso por paso un circulo con polígonos regulares que son inscritos en la circunferencia. Comienza con un cuadrado y pues por un octágono, y deja al lector imaginarse como este proceso de duplicación puede ser continuado ilimitadamente,
De hecho muestra que la diferencia entre el área del circulo y lo del 2^n-gon inscrito puede ser hecho menor que cualquiera pequeña área ε.



Vamos a parafrasear la demostración de Euclides, usando una notación más confortable.
Sea el área del circulo es igual a α.
Sea a_1, a_2, a_3, ... respectivamente el área de los polígonos inscritos con 2^2 , 2^3 , 2^4, ... lados y $d_n = \alpha - a_n$ (el 'defecto' con paso n)
En la primera figura podemos ver que a_1 es igual a la mitad del cuadrado circunscrito, entonces $a_1 > \frac{1}{2}\alpha$ y de donde $d_1 < \frac{1}{2}\alpha$.

* *Usa la segunda figura para demostrar que* $d_2 < (\frac{1}{2})^2 \alpha$.

Aquí para Euclides pues que es claro que se puede continuar este proceso.
Con cada paso se puede hacer un rectángulo con el ancho igual al lado del polígono precedente y con altura igual a la altura del segmento circular correspondiente. Por eso con cado paso es restado más que la mitad del defecto.

Sea ε cualquiera área. Según el principio de exhaución hay un número n de tal modo que $d_n < \varepsilon$.
Volveremos a la afirmación sobre la razón de los círculos distintos.
Euclides muestra que la suposición que esta razón sea desigual a la razón de los cuadrados de los diámetros, lleva a una contradicción.

Supongamos que los áreas de los círculos son α en α', las áreas de los cuadrados de los diámetros son respectivamente σ en σ' y las áreas de los 2^{n+1}-gons a_n en a_n'

Según la proposición sobre los polígonos semejantes inscritos en circunferencias vale:

$$\frac{a_n}{a_n'} = \frac{\sigma}{\sigma'} \text{ .... } \mathbf{(1)}$$

Primeramente supongamos: $\frac{\alpha}{\alpha'} > \frac{\sigma}{\sigma'}$.

Entonces existe un área β así que $\beta < \alpha$ en $\frac{\beta}{\alpha'} = \frac{\sigma}{\sigma'}$ ...... **(2)**

Sea $\varepsilon = \alpha - \beta$, pues $\varepsilon > 0$.
Para cierto valor de n tenemos $d_n < \varepsilon$, o bien $\alpha - a_n < \alpha - \beta$ y entonces: $a_n > \beta$ ...... **(3)**
Segun el principio 'la parte es menor que el total', tenemos también: $a_n' < \alpha'$ ...... **(4)**.

Por **(2)**, **(3)** y **(4)** sabemos:

$$\frac{a_n}{a_n'} > \frac{\sigma}{\sigma'}$$

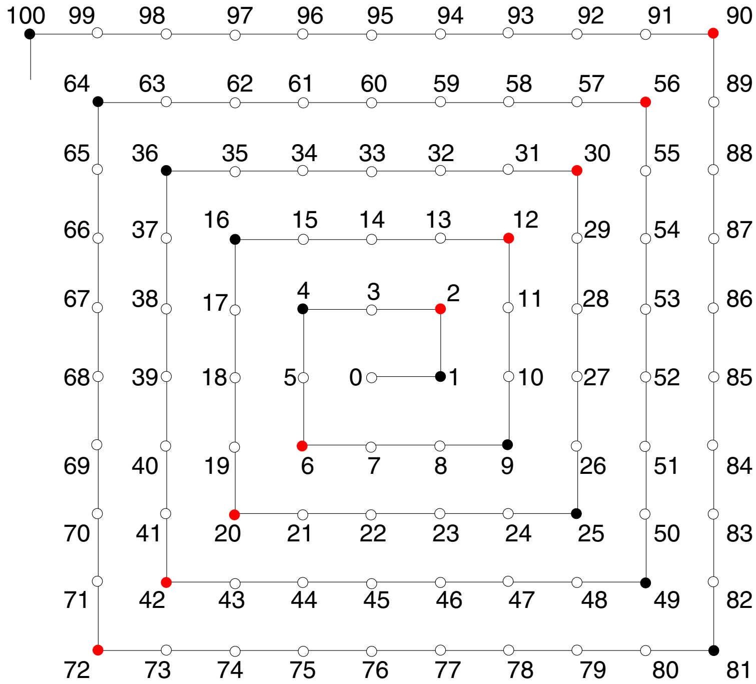
una contradicción con **(1)**.
Análogamente la suposición $\frac{\alpha}{\alpha'} < \frac{\sigma}{\sigma'}$ lleva a un absurdo, con lo cual la igualdad $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\sigma}{\sigma'}$ es demostrada.

Comentario:

- La demostración de Euclides es un ejemplo bonito del concepto 'convergencia de sucesiones'
- Es recomendable empezar el tratamiento de los conceptos *convergencia* y *limite* con tal ejemplo clásico.
- El principio de exhaución es muy instructivo para comprender la definición del 'limite de una sucesión.
- El libro XII de los Elementos contiene varias razonamientos exhaustivos.
  Por ejemplo para demostrar que
  un cono es un tercio del de un cilindro que tiene la misma base y altura (proposición 10) y
  las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus diámetros (proposición 18)

2. Patronos y fórmulas

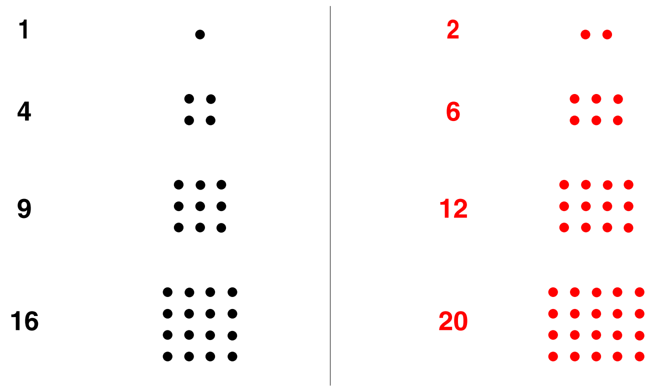
Vemos una espiral de números:



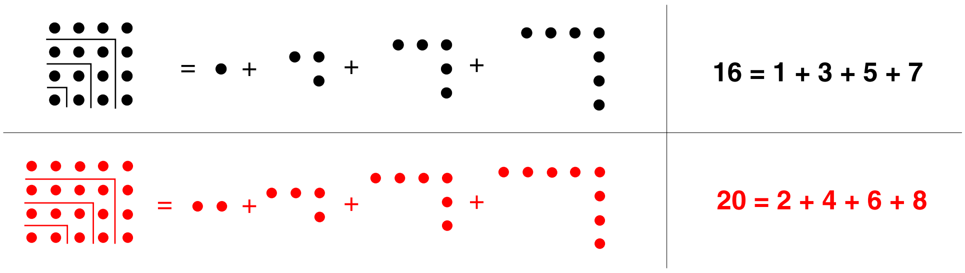
Mire los números de las esquinas.
Hay dos tipos que son representados por puntos negros y puntos grises.
Los números que corresponden con puntos negros son cuadrados.

* *¿Cómo puedes explicarlo?*
* *¿Qué propiedad tienen los números que corresponden con puntos grises?*

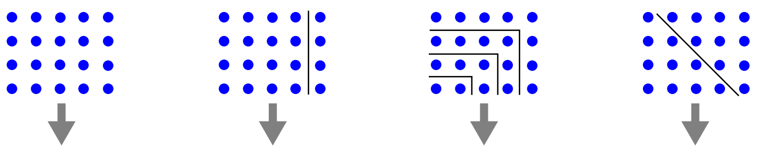
Otra vez nos remontamos en la historia griega. Estamos en la escuela de Pitágoras, 500 a. de C. Los pitagóricos amaran muchísimo los números naturales. El credo fue: ‘todo es número’.
Se representaron a veces números como patronos geometrícos de puntos, para poder descubrir propiedades interesantes.
Por ejemplo los números de las esquinas del espiral:



Los números negros se llaman *cuadrados*, los grises son *números oblongos*.
Los pitagóricos descubrieron que los cuadrados son sumas de números *impares* consecutivos, y los números oblongos son sumas de números *pares* consecutivos.
Demostración:



Observa que la representación de los números por patronos de puntos da aquí realmente una demostración, pues que los ejemplos son paradigmáticos, contrariamente a la representación de números con cifras. El lugar de los cuadrados en el espiral de números y de los números oblongos es una consecuencia de la propiedad inventada por los pitagóricos.
Aquí hay cuatro representaciones algebraicas interesantes de los números oblongos.



$n(n+1)$ $\quad$ n^2+n $\quad$ $2+4+\ldots+2n$ $\quad$ $2(1+2+\ldots+n)$

Una conclusión de la última representación es:

$$1+2+3+\ldots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

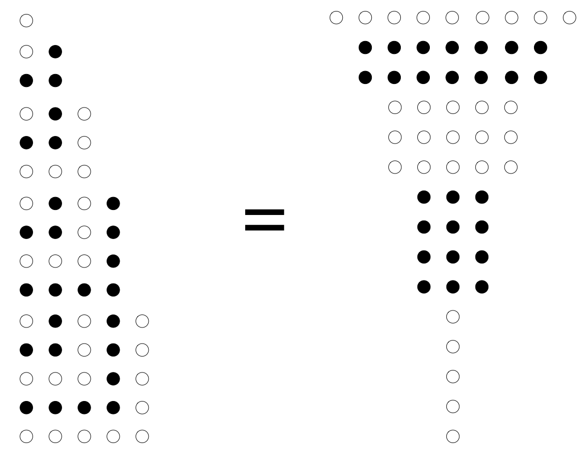
Este fórmula determina números que se llama *números triángulos*.[1]

1 A veces se pueden leer que los pitagóricos se dedicaran a las matemáticas a la playa, Harían los números figurados con los dedos en la arena... Una otra versión romántica es que hicieron los números figurados con piedrecillas. Si no es verdad, es bien inventado.

Una imaginable aplicación (no es probable que los pitagóricos la descubrieron) de la regla sobre la suma de los números impares es la siguiente:

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$$
$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1n + 3(n - 1) + 5(n - 2) + \ldots + (2n - 1)$$

De modo visual:



* *Use esta figura para explicar que*:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot (2 \cdot 5 + 1)$$

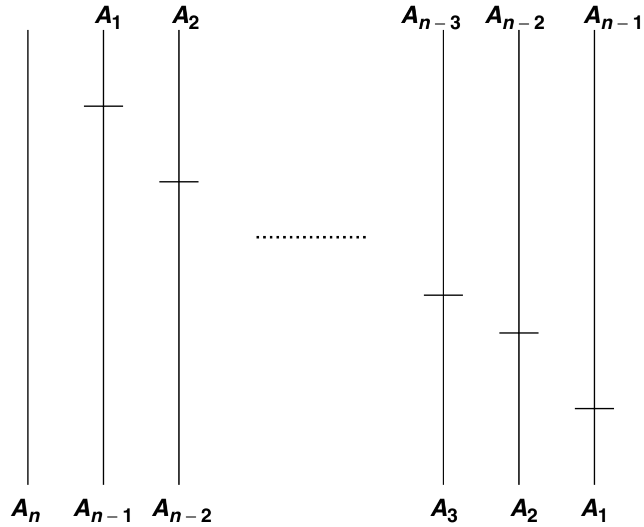
* *¿Cómo puedes generalizar esta regla?*

Euclides y Arquímedes, que vivieron unos siglos después Pitágoras, no han usado la representación de números naturales por configuraciones de puntos. Usaron segmentos de líneas rectas para presentar números. Aquí hay un lema de Arquímedes de su libro 'Sobre Espirales'.

.

Sea $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n}$ lineas en una progresión aritmetica creciente, cuya diferencia común es igual al primero termino, pues:

$$(\boldsymbol{n}+1)\times \mathrm{C}(\boldsymbol{A_n}) + \boldsymbol{A_1}\times(\boldsymbol{A_1}+\boldsymbol{A_2}+\boldsymbol{A_3}+\ldots+\boldsymbol{A_n}) = 3\times[\mathrm{C}(\boldsymbol{A_1})+\mathrm{C}(\boldsymbol{A_2})+\mathrm{C}(\boldsymbol{A_3})+\ldots+\mathrm{C}(\boldsymbol{A_n})]$$



En notación 'moderna':

$\boldsymbol{A_1 = a, A_2 = 2a, \ldots, A_n = na}$ y $\mathrm{C}(\boldsymbol{A_k}) = (\boldsymbol{ka})^2$

Sin problema podemos tomar $\boldsymbol{a} = 1$, entonces tenemos:

$$(n+1)n^2 + (1+2+3+\ldots+n) = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

Esta fórmula es equivalente de la fórmula que has visto en el pagina precedente.
Ya que:

$$(n+1)n^2 = 2n\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) = 2n(1+2+3+\ldots+n)$$

y pues entonces:

$$(n+1)n^2 + (1+2+3+\ldots+n) = (2n+1)(1+2+3+\ldots+n)$$

Solamente debemos dividir por 3 y volvemos a obtener la fórmula

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \tfrac{1}{3}(1+2+3+\ldots+n)(2n+1)$$

¿Cómo demostró Arquímedes su fórmula?
Usó dos etapas:

I $\quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = n+3(n-1)+5(n-2)+\ldots+(2n-1)$

II $\quad 2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2[1(n-1)+2(n-2)+3(n-3)+\ldots+(n-1)1] = (n+1)n^2$

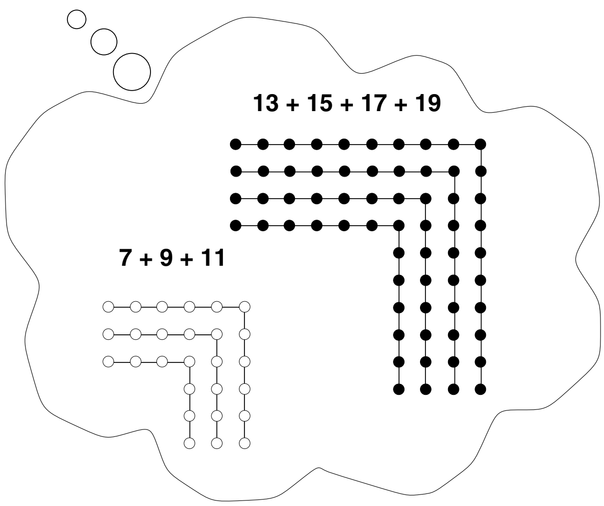
Ya hemos visto la primera. Para la segunda existe una demostración visual también, distinto de la demostración de Arquímedes que es un poco complicada. Arquímedes combinó las identidades I y II por sumarlas y eso resulta en su fórmula.

Arquímedes necesitó su fórmula entre otras para calcular el área de un 'sector espiral', como veremos pronto. Su método para obtener la fórmula es mucho más complicado que la demostración con números figurados y es por eso que no quiero recomendarlo para la enseñanza.

Un matemático griego que, distinto de Euclides y Arquímedes, ha usado el método con números figurados, fue Nicomaco de Gerasa (100 D.C.).
Escribió una obra denominada 'Introducción a la Aritmética' en donde trata las propiedades 'maravillosas y divinas' de los números naturales. Un descubrimiento de él es el siguiente:
cada número cubo es la suma de números impares consecutivos.
Por ejemplo:
$1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$.

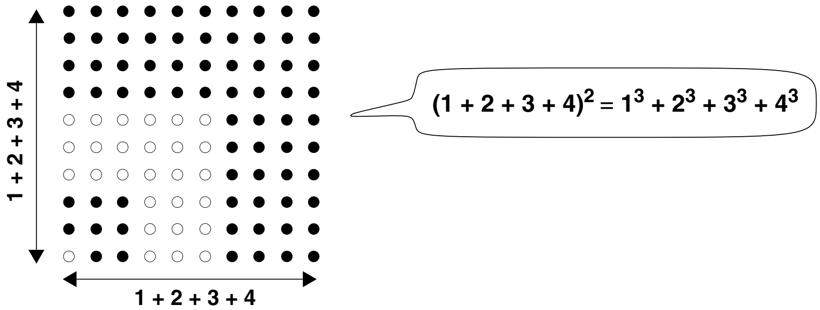
Nicomaco

Mire la espiral de números (pagina 9)
Se puede observar que cada cuadrado es el medio de dos números oblongos consecutivos.
* *Demuestre esa propiedad*.
Por eso cada cuadrado es el medio de los impares que están entre dos números oblongos consecutivos.
* *¿Cómo puedes explicar el descubrimiento de Nicomaco por la última afirmación?*
* *¿Cómo puedes explicar el descubrimiento de Nicomaco por números figurados?*



No sabemos como demostró Nicomaco (o al menos entendió) su descubrimiento.
Lo más probable es con números figurados.
Pero intencionadamente, Nicomaco no di ninguna demostración en su libro, pues en su opinión demostraciones exactas cansarían los lectores y además se perderían la magia.

Parece casi increíble que no haya deducido la siguiente fórmula:



O generalmente:

$$(1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$$

Las tres fórmulas que pasaron, es decir:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)(2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

o después sustitución de la primera en las otras dos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

preguntan una continuación, pero es reservado para un otro capítulo.

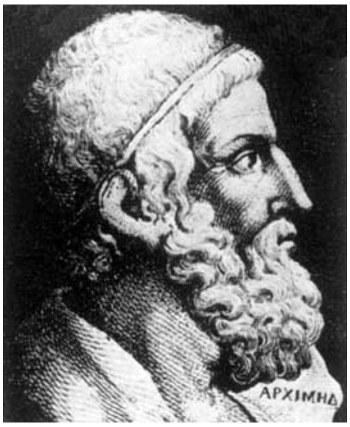
Comentario:
Los números figurados dan una oportunidad adecuada para ejercitar álgebra elemental. Investigar patronos y construir formulas son actividades sentenciosas y desafiantes para los alumnos y el contexto histórico puede dar un color cultural.
Podemos decir que la representación antigua de sucesiones de números naturales por patronos de puntos, que es en la primera vista bastante primitiva, puede ser muy fértil para el aprendizaje de la álgebra. Existen muchos ejercicios interesantes que dan la oportunidad a practicar cosas importantes como razonar y generalizar. Unos ejemplos para investigar:

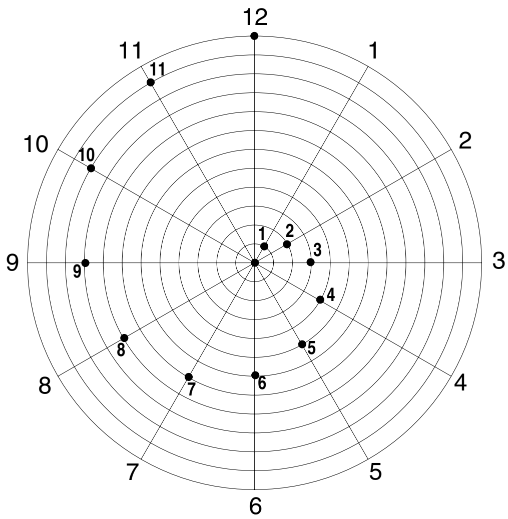
- *la suma de dos consecutivos números triangulares es un cuadrado*
- ***4*** $\times$ *número oblongo **+ 1** son número cuadrado*
- *el producto de dos números oblongos consecutivos siempre es un número oblongo*
- *Nicomaco también introdujo 'números pentagonales': 5, 12, 22, 35, 51, etc.*
  ¿Cómo representarlos con patronos de puntos? ¿Qué fórmula?

3. Arquímedes y el método de compresión.

En su libro ‘Sobre espirales’ Arquímedes da una definición de su espiral, que dice:
*si una raya gira en un plano alrededor su extremo con una velocidad (angular) constante, y si simultaneamente un punto mueve uniformemente a lo largo de esta raya, empezando su movimiento en el extremo, este punto describirá una **espiral** en el plano.*

Aquí vemos 12 puntos de la espiral de Arquímedes, construido mediante un reloj.



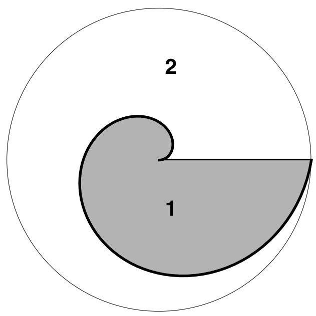


Esta construcción es tan clara como instructiva y puede ser ejecutado por alumnos de bachillerato. Una otra manera para hacer la espiral es mediante la calculadora gráfica.
Si los alumnos saben como usar las f unciones seno y coseno para describir un movimiento circular, puede ser un ejercicio desafiante para hacer una espiral. La de Arquímedes puede ser descrito lo más fácil por las ecuaciones $x = t \cdot \text{sen } t$, $y = t \cdot \cos t$. Observa que aquí el movimiento está en sentido contrario de la figura arriba.

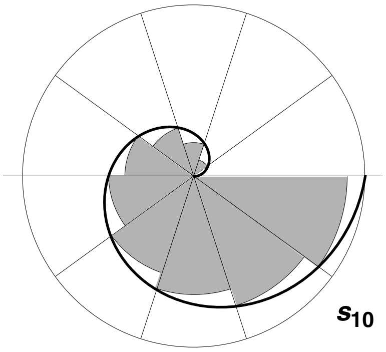
Volvamos a la obra impresionante de Arquímedes. Después un tratamiento de unas propiedades de esta curva, entre otros sobre la tangente en cualquiera punto, sigue una ‘proposición’ bonita sobre el área hecho por la primera espira.

Proposición 24

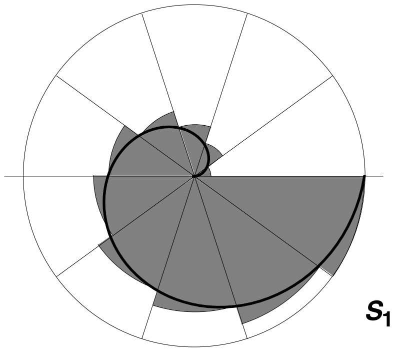
El área, encerrado por la primera espira de la curva y el segmento, que une el punto de salida con el último punto, es igual al tercero del área del circulo envolvente.



Arquímedes usó el método de *compresión* combinado con el principio de reducción ad absurdo para demostrar su proposición.
Primeramente dividió el círculo en una cantidad de sectores congruentes.
En cada parte tomó dos menores sectores circulares que aproximan un sector de la espiral por defecto y por exceso, como es ilustrado en la figura siguiente.



s_{10}



S_{10}

La figura muestra una partición del círculo con radio r en 10 sectores.
La suma de los sectores de color gris claro, da una estimación inferior (s_{10}) del área de la espiral.
La suma de los sectores de color gris oscuro, da una estimación superior (S_{10}).
Sea C el área del circulo y E el área de la espiral.
Entonces:

$$s_{10} < E < S_{10}$$

Para calcular s_{10} y S_{10} se puede usar una consecuencia de la proposición de Euclides sobre la razón de los áreas de círculos: *las áreas de dos sectores circulares con el mismo ángulo, son entre sí como los cuadrados de sus radios*
Los radios de los elementos de s_{10} son sucesivamente 0 , $\frac{1}{10}r$, ... , $\frac{9}{10}r$ y los radios los elementos de S_{10} son $\frac{1}{10}r$, $\frac{4}{10}r$, ... , r.

De donde el tercero elemento de s_{10} tiene el área: $\left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot \frac{C}{10} = \frac{4C}{1000}$

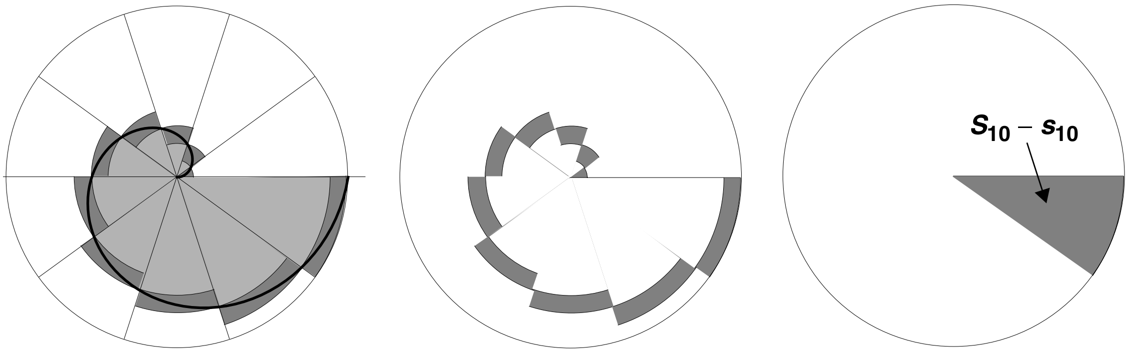
y el tercero elemento de S_{10} tiene el área: $\left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{C}{10} = \frac{9C}{1000}$

Entonces tenemos:

$$\frac{(0+1+4+\ldots+81)C}{1000} < E < \frac{(1+4+\ldots+100)C}{1000}$$

* *¿Entonces, entre dos fracciones decimales está la razón $\frac{E}{C}$?*
* *La misma pregunta, pero calculado por* s_{100} y S_{100}

Cuando ponemos la figura de s_{10} sobre la figura de S_{10}, como así:



vemos que la diferencia entre las dos aproximaciones es igual a la suma de los 'segmentos anillos' y estos segmentos juntos forman exactamente un sector circular de la partición.

Entonces: $S_{10} - s_{10} = \frac{1}{10}C$, $S_{100} - s_{100} = \frac{1}{100}C$, etc.,

De donde se puede hacer la diferencia entre las dos aproximaciones correspondientes menor que *cualquiera número positivo* ε.
Por eso podemos saber que las dos aproximaciones del área de la espiral tienen el mismo valor limite. Y si usamos la fórmula para la suma de los cuadrados consecutivos, podemos comprender que el valor es igual a $\frac{1}{3}C$.

Pero en la epoca de Arquímedes no fue inventado el concepto limite. Entonces la pregunta es, ¿como ha resuelto el problema?

Para hallar la razón $\frac{1}{3}$ usó las dos desigualdades:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

Es una consecuencia de la fórmula sobre la suma de los cuadrados consecutivos.
Arquímedes usó su propia versión, pero yo prefiero este prueba sencilla:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}n(n+\tfrac{1}{2})(n+1) > \tfrac{1}{3}n^3$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{3}(n-1)(n-\tfrac{1}{2})n < \tfrac{1}{3}n^3$$

Desde la aproximación basado en la partición de C en n partes, sabemos:

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{E}{C} < \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

y pues que la diferencia entre la primera fracción y la última es igual $\frac{1}{n}$, es claro que la compresión lleva a $\frac{E}{C} = \frac{1}{3}$.

Arquímedes usó el principio de reducción ad absurdo. Aquí está su razonamiento:

Supongamos $E > \frac{1}{3}C$ *, entonces podemos tomar n de tal modo que*

$$S_n - s_n < E - \tfrac{1}{3}C \qquad (*)$$

Vale:

$$\frac{s_n}{C} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

o bien

$$s_n < \tfrac{1}{3}C$$

Combinando con (*) obtenemos:

$$S_n - \tfrac{1}{3}C < E - \tfrac{1}{3}C$$

entonces: $S_n > E$

Pero S_n *es una estimación superior de E, entonces vale:* $S_n > E$

Por eso el hipótesis $E > \frac{1}{3}C$ *es absurdo.*

Análogamente se demuestra lo absurdo de la hipótesis $E < \frac{1}{3}C$ *, y queda* $E = \frac{1}{3}C$*.*

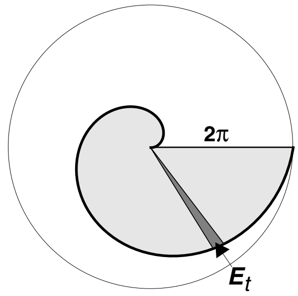
Este método arquímedico tiene valor didáctico, principalmente por su anticipación al concepto ‘suma de Riemann’. Por supuesto el método ‘moderno’ es mucho más eficiente.
Por ejemplo, si consideramos la espiral descrita por las ecuaciones $x = t \cdot \text{sen } t$, $y = t \cdot \cos t$.

$$C = \pi \cdot (2\pi)^2 = 4\pi^3$$

$$E_t \approx \frac{\Delta t}{2\pi} \cdot \pi t^2 = \tfrac{1}{2}t^2 \Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$E = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}t^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{6}t^3 \Big|_0^{2\pi} = \tfrac{4}{3}\pi^3 = \tfrac{1}{3}C$$

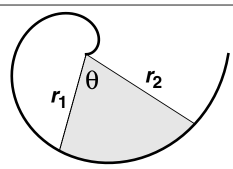


Un método alternativo es por el uso de coordenadas polares.

Arquímedes hizo un trabajo admirable con su cálculo ‘pre-integral’, no solo por inventar y demostrar su proposición 24, pero también por deducir una fórmula para el área de cualquier sector de la espiral. Necesitó un calculo bastante complicado, que despierta más admiración, si se dan cuenta que no pudo disponer de nuestro idioma algebraico.
Descubrió esta fórmula:

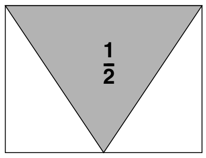
área sector espiral =

$$\frac{\theta}{2} \cdot [r_1 r_2 + \tfrac{1}{3}(r_2 - r_1)^2]$$

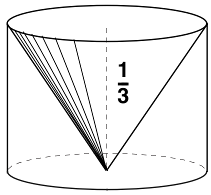


* *Verifique este fórmula con cálculo integral.*

Quizás el problema de la espiral no es lo más adecuado para introducir el método de la compresión. Hallar la razón entre el volumen de un pirámide (o cono) y el prisma (o cilindro) con la misma base y altura, o inventar la razón entre un segmento simétrico de la parábola y su rectángulo envolvente, es desde el punto de vista geometríca probablemente más sencillo para los estudiantes. De otro lado, el desarrollo algebraico de ambos ejemplos es completamente isomorfo con lo del ejemplo de la espiral.
También es interesante comparar situaciones análogos en el plano y en el espacio:

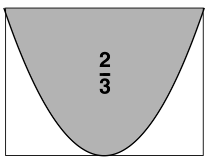


$$\frac{\textit{área triángulo}}{\textit{área rectángulo}} = \frac{1}{2}$$

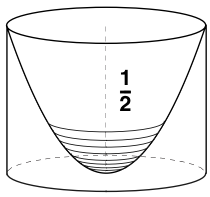


$$\frac{\textit{volumen cono}}{\textit{volumen cilindro}} = \frac{1}{3}$$

O para una parábola y una paraboloïde:



$$\frac{\textit{área parábola}}{\textit{área rectángulo}} = \frac{2}{3}$$



$$\frac{\textit{volumen paraboloïde}}{\textit{volumen cilindro}} = \frac{1}{2}$$

Observe que en ambos casos la razón entre las áreas es mayor que la razón entre los volúmenes de los cuerpos de revolución correspondientes.

Arquímedes supo de estas razones. Especialmente ha calculado el volumen del segmento de la paraboloïde con el método de compresión, usando la fórmula:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + \boldsymbol{n} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + 1)}$$

* *Use el método arquímedico para hallar el volumen de la paraboloide.*

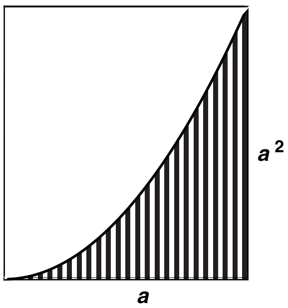
4. Las obras de Cavalieri y Torricelli

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) y Evangelista Torricelli (1608 - 1647) fueron amigos y discípulos de Galileo. Ambos son famosos por sus resultados en pre-cálculo.

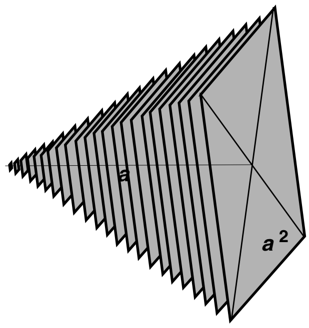
Cavalieri

Torricelli

Cavalieri desarrolló una teoría, que fue llamado 'el método de los indivisibles'.
Según su teoría una área es la suma de infinitas segmentos rectos y un volumen es la suma de infinitos superficies planas. Por su método se puede comprender fácilmente la relación entre el área de un triángulo parabólico y el volumen de la pirámide.
El área del triángulo abajo de la parábola $y = x^2$, es la 'suma continua' de infinitos segmentos verticales. La longitud de cada segmento es igual al cuadrado de la abscisa correspondiente.
Pero un cuadrado puede ser representado geométricamente por una figura 2-dimensional.
Así obtenemos una serie continua de cuadrados que forman una pirámide cuya altura = a y cuya base tiene el área a^2.
Por eso obtenemos la misma fórmula para el área del triángulo parabólico y la pirámide.



$$\sum_0^a x^2 = \tfrac{1}{3}a \cdot a^2 = \tfrac{1}{3}a^3$$



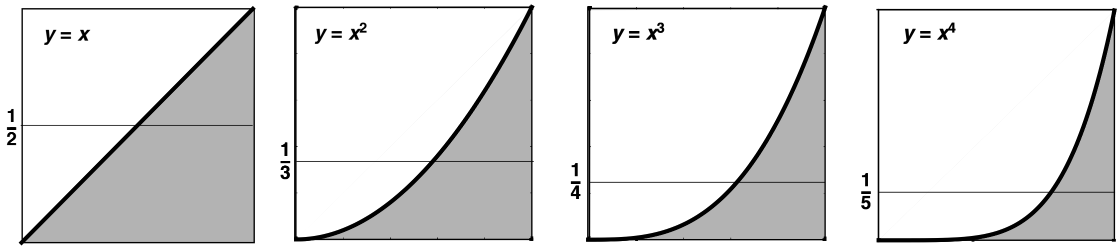
Este enfoque parece osado, pero da una comprensión sorprendida.
Si quiere, se puede escribir todo con sumas de Riemann y así se puede obtener una demostración correcta, según las pautas de nuestra epoca.
Cavalieri logró a hallar, por uso sofisticado de la álgebra, las fórmulas para las áreas abajo de las curvas $y = x^3$, $y = x^4$, ... , $y = x^9$.
con resultados:

$$\sum_0^a x^3 = \tfrac{1}{4}a^4 \quad , \quad \sum_0^a x^4 = \tfrac{1}{5}a^5 \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots , \quad \sum_0^a x^9 = \tfrac{1}{10}a^{10}$$

Al fin Cavalieri supuso que para cada valor natural de k vale:

$$\sum_0^a x^k = \frac{1}{k+1}a^{k+1} \quad \text{o en notación moderna} \quad \int_0^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}a^{k+1}$$

Se puede ilustrar el descubrimiento de Cavalieri con una serie de figuras como las siguientes:



Por la comodidad es dibujado el caso $a = 1$.
En cada cuadrado es dibujado una linea horizontal, que indica la *altura media* de la curva. Es decir: el área abajo de la curva es igual al área abajo de la linea horizontal.
Si el exponente de $\boldsymbol{x}$ crece, la linea horizontal baja y el 'patrono armónico' de las alturas medias, se continua.
Cavalieri publicó estas cosas en 1635. Durante los años siguientes unos matemáticos franceses, (Fermat, Pascal y Roberval) lograron a demostrar la regla para el área abajo de la curva $\boldsymbol{y = x^n}$ de manera exacta. Cada uno de los tres uso su propio método.
Una demostración en el estilo de arquímedes puede ser basada en la desigualdad:

$$\mathbf{1}^{k} + \mathbf{2}^{k} + \ldots + (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})^{k} < \frac{\boldsymbol{n}^{k+1}}{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}} < \mathbf{1}^{k} + \mathbf{2}^{k} + \ldots + \boldsymbol{n}^{k}$$

Arquímedes ha aplicado esta desigualdad en los casos $k = 2$ (la espiral) y $k = 1$ (la paraboloïde) y basó esta en las fórmulas para sumas como en la pagina 14.
Pero la desigualdad puede ser inferido sin conocimiento de tales fórmulas.
Consideramos la desigualdad

$$(k+1)\cdot(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^{k} < n^{k+1} - (n-1)^{k+1} < (k+1)\cdot \boldsymbol{n}^{k}$$

que es una consecuencia de: :

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = \underbrace{n^{k} + n^{k-1}(n-1) + \ldots + n(n-1)^{k-1} + (n-1)^{k}}_{\boldsymbol{k} + \mathbf{1}\ \textbf{terminos}}$$

Luego aplicamos el llamado 'principio telescopio':

$$(k+1)\cdot \mathbf{0}^{k} < 1^{k+1} - 0^{k+1} < (k+1)\cdot \mathbf{1}^{k}$$

$$(k+1)\cdot \mathbf{1}^{k} < 2^{k+1} - 1^{k+1} < (k+1)\cdot \mathbf{2}^{k}$$

$$(k+1)\cdot \mathbf{2}^{k} < 3^{k+1} - 2^{k+1} < (k+1)\cdot \mathbf{3}^{k}$$

....

$$(k+1)(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^{k} < n^{k+1} - (n-1)^{k+1} < (k+1)\boldsymbol{n}^{k}$$

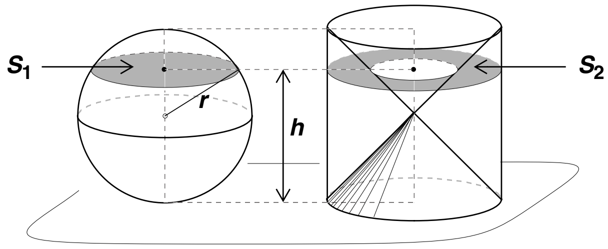
$$\mathbf{+}\quad \overline{(k+1)(\mathbf{1}^{k} + \mathbf{2}^{k} + \ldots + (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^{k}) < n^{k+1} < (k+1)(\mathbf{1}^{k} + \mathbf{2}^{k} + \ldots + \boldsymbol{n}^{k})}$$

Desde esta desigualdad y desde el principio de compresión (aproximación de defecto y exceso con rectángulos), se puede demostrar la última regla de la pagina anterior.

En el libro de Cavalieri con título *Geometria indivisibilius continuorum quadam ratione promota* (1635) podemos hallar un teorema que ahora es conocido como ‘el principio de Cavalieri’:

> *Si dos figuras planas (o sólidas) tienen igual altura, y si las secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y igual distancia de ellas, están siempre en una misma razón, entonces las figuras planas (o sólidas) están también en esa misma razón.*

Una aplicación famosa de este principio es la demostración de la fórmula para el volumen de una esfera con radio r. Comparemos la esfera con el sólido limitado por un cilindro con radio r y altura $2r$ y un ‘diábolo’ cuyo base tiene el radio r y cuyas dos partes tienen la altura r .



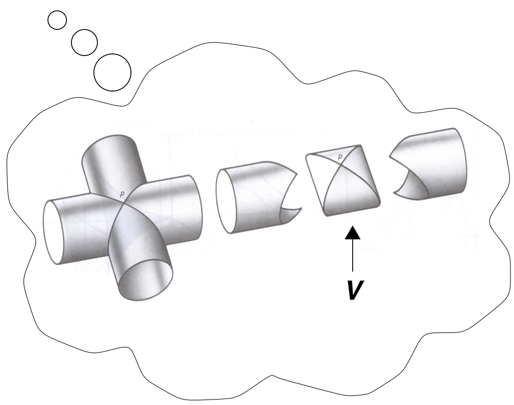
Ahora consideramos dos secciones horizontales a la distancia h de la base.
La sección S_1 de la esfera es un circulo; el cuadrado de su radio es $r^2-(h-r)^2$ (observe que eso vale también para $h < r$). Entonces el área de S_1 es $\pi(r^2-(h-r)^2)$
La sección S_2 del plano a la distancia h de la base, con el segundo sólido es un anillo entre dos círculos respectivamente con radio r y $|h-r|$. Luego el área de este anillo es $\pi r^2-\pi(h-r)^2$.
Conclusión: S_1 y S_2 tienen la misma área para cada valor de h y por el principio de Cavalieri los dos sólidos tiene el mismo volumen.
El volumen del segundo sólido es la diferencia entre el cilindro y el diábolo, entonces

$$2r\cdot\pi r^2-2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot r\cdot\pi r^2 = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

y por eso hemos hallado el volumen de la esfera.

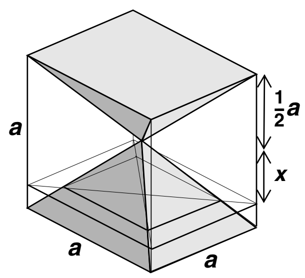
Mire la figura abajo. Los cilindros tienen el mismo radio r y los ejes cortan perpendicularmente. La intersección de los cilindros es un sólido (V), que contiene cuadrados paralelos.

* *Por calcular el volumen de V con el principio de Cavalieri (comparelo con la esfera de radio r)*



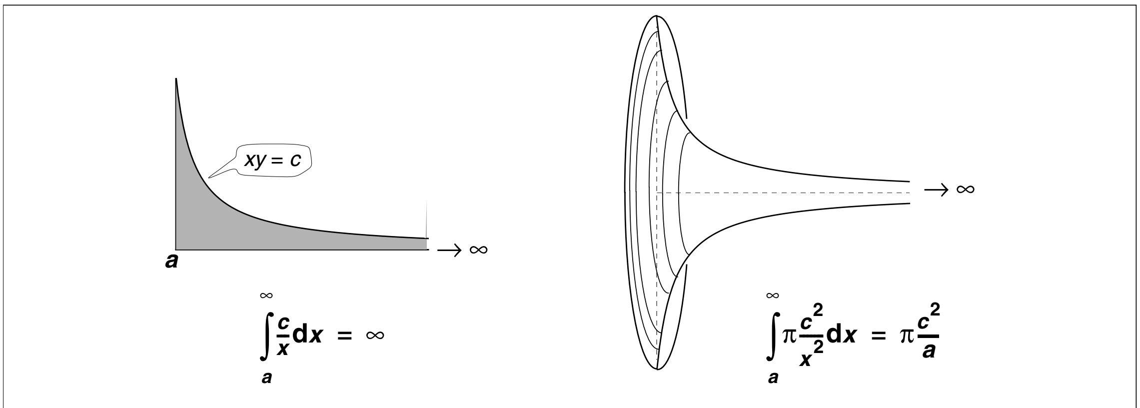
Arquímedes escribe en el prólogo de su libro 'Sobre el método' (dirigido a Eratóstenes), una proposición sobre la intersección de dos cilindros:
Si, en un cubo, es inscrito un cilindro, que tiene sus bases en caras opuestas, y cuya superficie toca los otros cuatro planos, y si en el mismo cubo es inscrito otro cilindro, que tiene sus bases en otros cuadrados y cuya superficie toca los otros cuatro planos, pues el sólido limitado por las superficies de los dos cilindros, es dos tercio del cubo.

Lástima que la demostración, anunciada por Arquímedes, esté perdido. Se puede reconstruir su probable razonamiento, por estudios de las otras demostraciones del libro 'Sobre el método'.
Pero es mucho más fácil usar otra vez el principio de Cavalieri, en un modo que parece como dos gotas de agua al desarrollo de la fórmula para el volumen de la esfera.
Otra vez indiquemos el sólido mencionado con V.
Comparemos el volumen de V con el volumen del sólido D que resulta si se resta del cubo las dos pirámides con vértice en el centro de cubo y con bases en dos caras opuestas.
El volumen de ambas pirámides es igual a $\frac{1}{6}a^3$ y entonces es el volumen de D igual a $\frac{2}{3}a^3$.



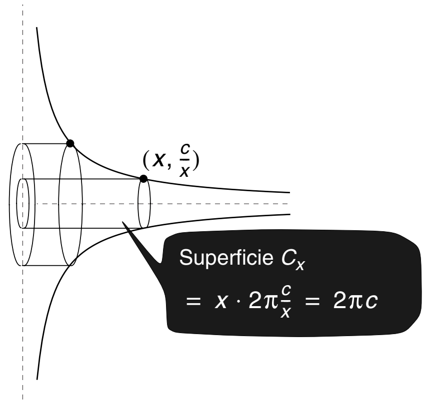
La sección horizontal a la distancia x del centro es un anillo angular con área $a^2 - 4x^2$ y esta es igual al área de la sección horizontal del sólido V a la misma distancia del centro.
De donde sabemos que el volumen de V es $\frac{2}{3}a^3$.

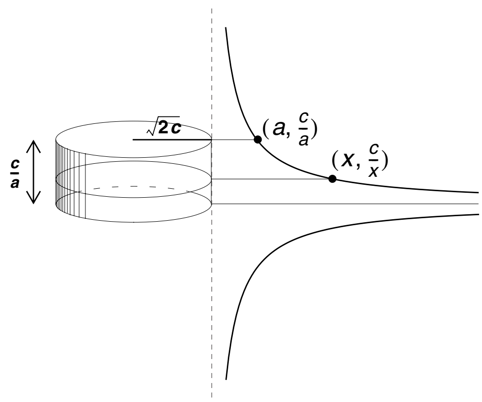
Un ejemplo espectacular de una aplicación del método de los indivisibles es hecho por Torricelli.
Concierne un sólido infinito que a veces es llamado 'la trompeta de Torricelli'.
Sean a y c números reales positivos. La superficie abajo la curva $xy = c$ en el intervalo $x > a$ no tiene un área finito, pero el sólido de revolución correspondiente (la trompeta infinita) tiene un volumen finito! Se pueden verificarlo inmediatamente con el calculo integral:



¿No es milagroso que un sólido infinito tiene un volumen finito? Torricelli (1608-1647), di cuenta de su descubrimiento sorprendente en 1643.
Claro que no pudo usar el cálculo integral (esta rama de mátematica estaba esperando su invención por Newton y Leibniz), y el enfoque de Torricelli es un ejemplo bonito de un método pre-calculo. Usó cilindros inscritos en el sólido de revolución generado por un rama de hipérbola (representado por $xy = c$ y $x > 0$).

Un cálculo sencillo muestra que todos los cilindros C_x tiene una superficie de valor 2πc.





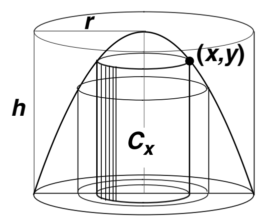
Torricelli observó que esta superficie y el área circular con radio $\sqrt{2c}$, son iguales.
En el estilo de su amigo Cavalieri razonó como siguiente:
La suma de todas superficies C_x con x a es igual al volumen de la trompeta juntamente con el cilindro C_a. De otro lado es, como 'suma infinita' de círculos congruentes, igual al volumen del cilindro con altura $\frac{c}{a}$ y radio $\sqrt{2c}$,
Luego que el volumen de la trompeta unido con el cilindro C_a es igual a:

$$\frac{c}{a} \cdot 2\pi c = 2\pi\frac{c^2}{a}$$

Restamos de este el volumen de C_a o bien $a \cdot \pi\frac{c^2}{a^2} = \pi\frac{c^2}{a}$ y queda $\pi\frac{c^2}{a}$, como el resultado del integral de la pagina anterior.
Quiero observar que el enfoque de Torricelli con las superficies cilíndricas, puede ser formulado en términos de cálculo integral. Nos da un método alternativo (pero con un menor alcance de aplicación comparado con el método normal) para determinar el volumen de un sólido de revolución.
Como ejemplo consideramos la paraboloïde, que es generado por la curva:

$$y = h\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right) \quad , \quad -r \leq x \leq r$$

con rotación alrededor el eje *y*.
La superficie de un cilindro inscrito C_x es igual a $2\pi xy$.
De donde tenemos:

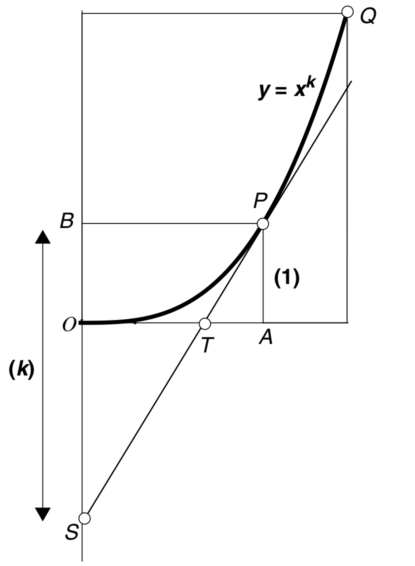


$$\text{volumen paraboloïde} = \int_0^r 2\pi xy\,dx$$

Observamos que 'd*x*' puede ser entendido como 'grueso infinitesimal' de la superficie cilíndrica.

* *Muestre que el resultado de este integral es $\frac{1}{2}\pi hr^2$, entonces la mitad del volumen del cilindro envolvente.*

Torricelli también conoció una regla geometríca para determinar la tangente de las curvas $y = x^k$.



Sea P un punto de la curva $y = x^k$, que no coincide con O.

Entonces:

TP es una tangente de la curva $y = x^k$.

si y solamente si

$$\frac{AT}{AO} = \frac{AP}{BS} = \frac{1}{k}$$

Una demostración del estilo pre-cálculo puede ser la siguiente.
Nos restringimos a la parte de la curva que corresponde con $x > 0$.
Supón que P tiene las coordenadas $(a\ ,\ a^k)$
$PA = a^k$, pues $BS = ka^k$, entonces la pendiente de la recta PS es $\frac{ka^k}{a} = ka^{k-1}$

Supón que el punto Q de la curva, distinto de P, tiene las coordenadas $(b\ ,\ b^k)$
La pendiente del segmento PQ es igual a:

$$\frac{b^k - a^k}{b - a} = \underbrace{b^{k-1} + b^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}}_{k \text{ terminos}}$$

Si $b > a$ como en la figura, vale:

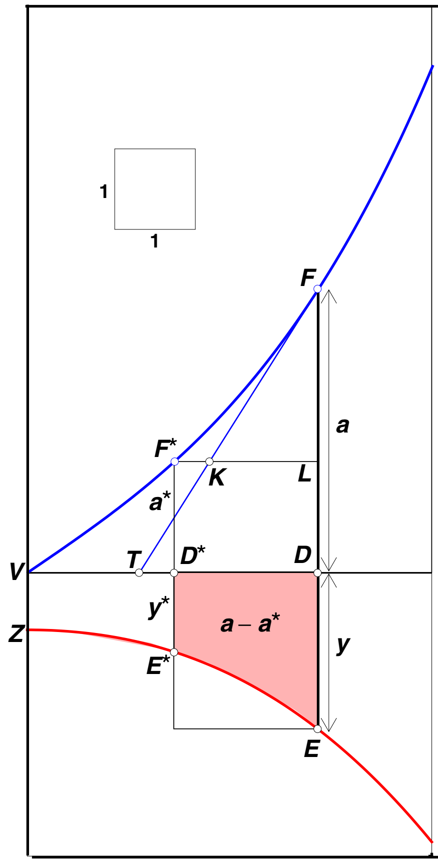
$$\frac{b^k - a^k}{b - a} > \underbrace{a^{k-1} + a^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}}_{k \text{ terminos}} = ka^{k-1}$$

Entonces la recta PQ es más empinada que la recta TP y por eso Q está arriba de la última recta. Análogamente podemos razonar que, en el caso $b < a$, la recta PQ es menos empinada que la recta TP.
Entonces todos los puntos de la curva con coordenadas positivas y con excepción de P, están arriba de la recta TP y por eso esta recta es la tangente de la curva en P.
Observación:
He usado el concepto 'pendiente' que de hecho es un anacronismo. Pero se puede reemplazarla sin dificultades con el ángulo que hace una recta con el eje horizontal.

La conclusión es que Torricelli, y también otros, supieron la *derivada* de $y = x^k$.
Me pregunto si los estudiantes de esta epoca saben la interpretación geometríca, que fue el núcleo de la proposición mencionada. Se puede decir que esta significación geometríca da la fórmula de la derivada de $y = x^k$ 'una cara' y de tal modo puede ser más que un truco algebraico para los estudiantes. Tanto aquí, como en el caso del cálculo integral, quiero recomendar fuertamente a usar las lecciones de la historia en la enseñanza.

5. Un descubrimiento geométrico de Isaac Barrow.

Isaac Barrow (1630 - 1677), el profesor de otro Isaac, es decir Newton, fue el primero en reconocer la relación milagrosa entre los conceptos ‘tangente (de una curva)’ y ‘área’. Escribió un libro sobre geometría (‘Geometric Lectures’) con un montón de dibujos, casi dos por pagina de texto. Voy a concentrarme en uno, que es adaptado un poco para este texto:



Explicación de la figura

- *La curva ZE*E representa una función monótona.*
- *La curva VF*F representa el área encerrada entre el eje horizontal, la curva ZE*E , y las verticales DE y VZ. Esta es claramente una función de la abscisa de D.*
  Es decir: los longitudes a y a representan respectivamente las áreas de VD*E*Z y VDEZ.*
- *El punto T es construido de tal modo que la longitud del segmento DT es igual al cociente de FD y ED*
  Entonces:

$$DT = \frac{FD}{ED} = \frac{a}{y}$$

Afirmación:
La linea TF es una tangente de la curva *VF*F*

Demostración:

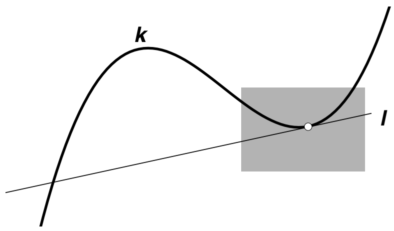
Supon que K es un punto de TF entre T y F.
Por demostrar: K es un punto a la derecha de la curva VF^*F.

Por la semejanza de los triángulos KLF y TDF vale: $\frac{FL}{LK} = \frac{FD}{DT} = DE = y$,
entonces $FL = LK \cdot y$ ... (I)

De otro lado: $FL = a - a^* =$ área $VDEZ$ – área $VD^*E^*Z =$ área $D^*DEE^* < D^*D \cdot y$ ... (II) ,
¡ya que la curva ZE^*E representa una función monótona!
De (I) y (II) se sigue $LK < D^*D$, y entonces $LK < LF^*$
Así sabemos que K es a la derecha de la curva VF^*F
Si prolongamos la recta TF, podemos demostrar de modo análogo que cada punto de la parte prolongado está a la derecha de VF^*F.
Entonces todos puntos de la recta, excepto F, están a la derecha de la curva y eso significa que TF es la tangente de la curva en F.
C.Q.D.

Esta es, en versión reformulada, la demostración geometríca que dio Barrow de un teorema que ahora es conocido como el *teorema fundamental* del Análisis Matemático.
Es notable que su enfoque no mostró ninguna vislumbre del enfoque *infinitesimal*.

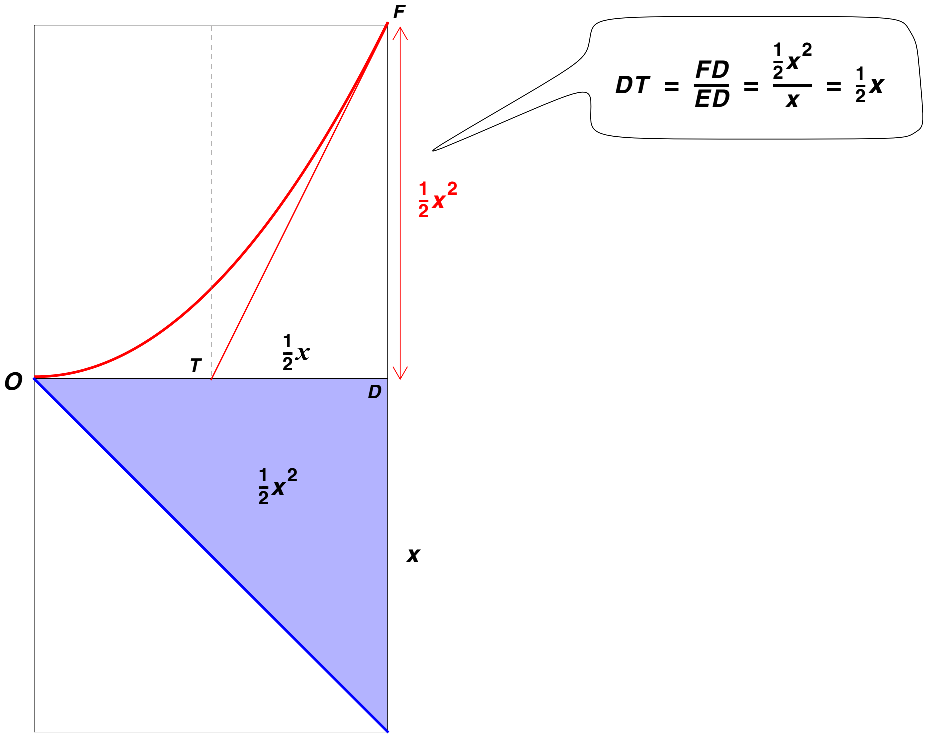
¿Que definición del concepto tangente ha pensado Barrow?
Por lo visto considera tangente como linea que está a solo un lado de la curva. Claro que se puede criticar. Mire por ejemplo la situación de la figura.



Cierto que la linea *l* es tangente de la curva *k* (de tercero grado), pero *l* está al lado de abajo de la curva.
Sabemos que 'tangencia' es una propiedad local y sin duda, Barrow lo ha visto también. Observamos que separó en su demostración la linea en dos partes, a ambos lados del punto de tangencia y con este pudo usar su enfoque también en un punto de inflexión.

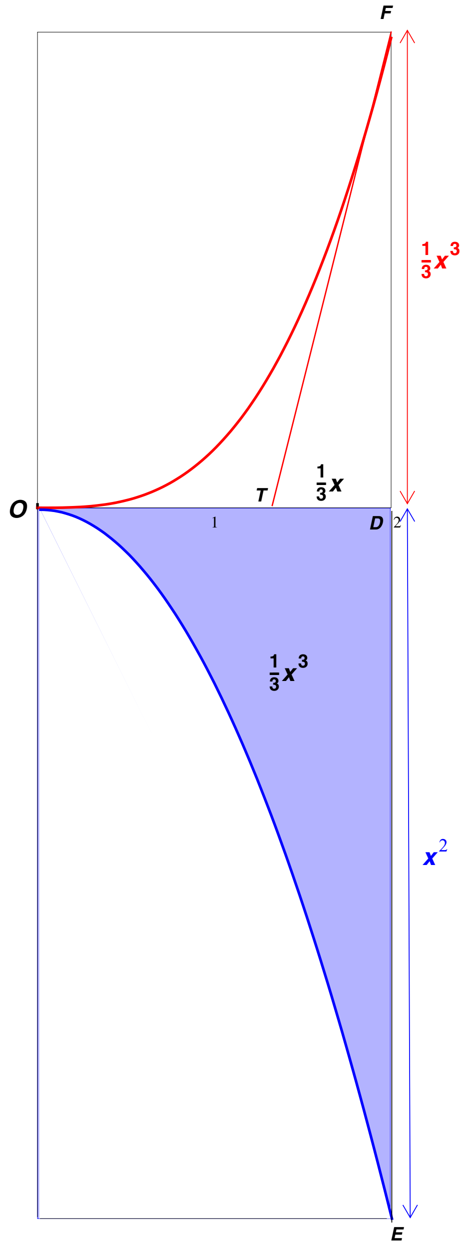
Barrow, y también Torricelli, tuvieron una comprensión intuitiva de la conexión recíproca entre área y tangente, pero no han explotado este conocimiento para objetivos de computación.
Tampoco no han visto claramente el gran valor analítica de esta relación. Este honor gana Newton, pero es muy probable que la demostración de Barrow ha contribuido fuertemente a la obra de Newton.

Puede ser un pensamiento tentador por aplicar el enfoque de Barrow para curvas concretas, como $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{1}{3}x^3$ y hallar la fórmula para las pendientes de tangentes de esas curvas.



Isaac Barrow

$$DT = \frac{FD}{ED} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2} = \frac{1}{3}x$$



7. Análisis discreto

Volvamos al capítulo 2 sobre las fórmulas para sumas de potencias con exponentes comunes. Hay una regla bastante sencilla, sobre la relación entre una sucesión de números reales y las sucesiones de sus sumas respectivamente sus diferencias.
Si tenemos la sucesión

$$S_0, S_1, S_2, \ldots$$

podemos definir la sucesión de las diferencias como:

$$S_1 - S_0, S_2 - S_1, S_3 - S_2, \ldots$$

Llamamos $D_k = S_{k+1} - S_k$
La sucesión de las sumas parciales de $D_0, D_1, D_2, \ldots$
es la sucesión: $D_0, D_0 + D_1, D_0 + D_1 + D_2, \ldots$
y es igual a

$$S_1 - S_0, S_2 - S_0, S_3 - S_0, \ldots$$

Generalmente tenemos:

$$\boldsymbol{D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1} + D_n} = S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + \ldots + S_n - S_{n-1} + S_{n+1} - S_n = \boldsymbol{S_{n+1} - S_0}$$

A veces se habla aquí del 'principio telescopio'.
Podemos escribir este resultado como

$$\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D_k} = \boldsymbol{S_{n+1} - S_0}$$

De otro lado podemos escribir, usando el símbolo Δ para diferencia:

$$\mathop{\Delta}_{k}^{k+1} \boldsymbol{S_n = S_{k+1} - S_k = D_k}$$

Es por eso que podemos decir que Σ y Δ son operaciones inversas.

Esta ley del 'análisis discreto' es análogo con el teorema fundamental del 'análisis continuo', pero conceptualmente la versión discreta es mucho más fácil. Leibniz publicó en 1714 una reflexión sobre su obra con el titulo 'Historia et origo calcli differentialis' y mencionó que las reglas sobre las sucesiones le han inspirado por la invención del cálculo infinitesimal.

La idea para aplicar el 'teorema fundamental del cálculo discreto' es, que comúnmente sea fácil calcular diferencias de una sucesión. Veamos la sucesión de los números cubos:

0 , 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , ...

Inventar la fórmula para la sucesión de las diferencias, es decir

1 , 7 , 19 , 37 , 61 , 91, ...

no da muchos problemas:

$$D_k = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Luego podemos sumar estas diferencias:

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = (n+1)^3 - 0^3 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + \sum_{k=0}^{n} 3k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Entonces:

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{k^2} + 3\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$

Supongamos conocido la fórmula para la suma 1 + 2 + ... + n y incógnita la fórmula para $1^2 + 2^2 + ... + n^2$. Entonces podemos resolver la última fórmula por esa igualdad:

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{k^2} + \frac{3}{2}n(n+1) + (n+1)$$

* *Resuelve esta ecuación y compare el resultado con la fórmula de capítulo 2.*

Para hallar la fórmula para la suma $1^4 + 2^4 + ... + n^4$ usamos la sucesión $1^5, 2^5, 3^5$, ...

$$D_k = (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{n} D_k = (n+1)^5 = 5\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{k^4} + 10\sum_{k=0}^{n} k^3 + \sum_{k=0}^{n} 10k^2 + \sum_{k=0}^{n} 5k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

Usando las fórmulas de las sumas de los cuadrados y de los cubos, obtenemos:

$$(n+1)^5 = 5\sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{k^4} + \frac{10}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{10}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{5}{2}n(n+1) + (n+1)$$

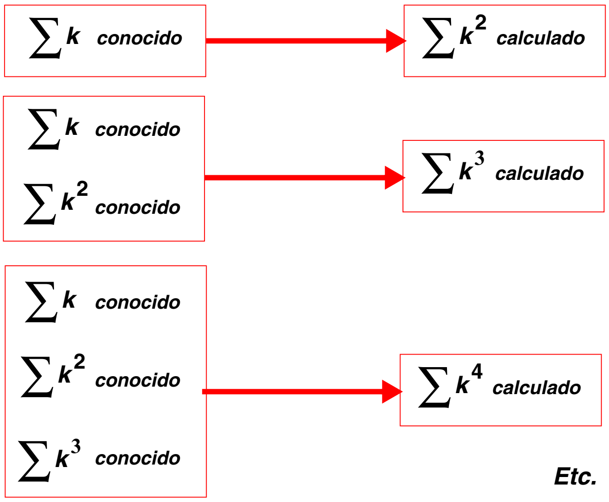
* *Muestre que esta ecuación lleva a:*

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

que es equivalente con:

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

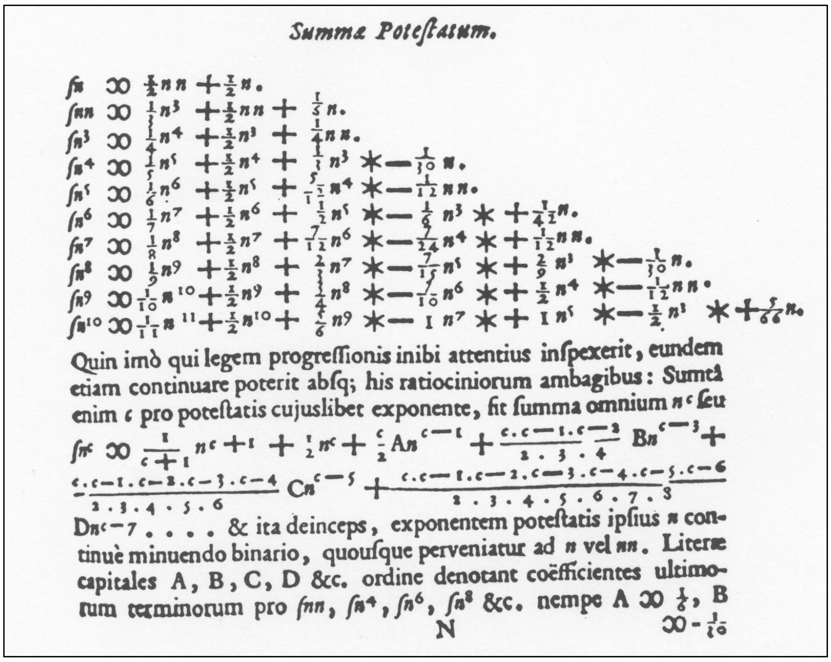
Paso por paso podemos calcular polinomios que son iguales a las sumas de potencias con el mismo exponente. Es un ejemplo bueno de un proceso de inducción:



Este método es relativamente elemental, pero laborioso si no podemos usar un programa de álgebra en el computador. Puede ser motivo por preguntas interesantes como:

- parece que cada de estos polinomios tiene los factores $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{n+1}$; se puede entenderlo por el proceso de inducción y demostrarlo formalmente por inducción matemática.
- algunos de esos polinomios tiene el factor $\boldsymbol{2n+1}$, otros no tienen; se puede poner una hipótesis y investigarla.

En su libro Ars Conjectandi dio Jacobo Bernoulli una lista de fórmulas y una generalización de estas.[1]



Summæ Potestatum.

$\int n \infty \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n.$
$\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n.$
$\int n^3 \infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn.$
$\int n^4 \infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n.$
$\int n^5 \infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$
$\int n^6 \infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * - \frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n.$
$\int n^7 \infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * - \frac{7}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn.$
$\int n^8 \infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * - \frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * - \frac{1}{30}n.$
$\int n^9 \infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn.$
$\int n^{10} \infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 * - 1\,n^7 * + 1\,n^5 * - \frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n.$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c \infty \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4}Bn^{c-3} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} + \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} \ldots$$

& ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n continuè minuendo binario, quousque perveniatur ad n vel nn. Literæ capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe $A \infty \frac{1}{6}$, B

N $\infty - \frac{1}{30}$

1 Hay un error en la lista: el termino $-\frac{1}{12}nn$ en la suma $\int n^9$ debe ser $-\frac{3}{20}nn$

Bernoulli demuestra en Ars Conjectandi solamente las primeros tres fórmulas de su lista, usando el triángulo de Pascal. Observa que, de tal modo y continuando paso por paso, se puede hallar cada fórmula de su lista, pero queda el trabajo a sus lectores. Menciona que tomaba menos que la mitad de un cuarto de hora por computar que la suma de los primeros 1000 potencias con exponente 10 es igual a 91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500

Es interesante para estudiar la lista de los polinomios de Bernouilli. Primeramente el signo de igualdad y el signo para la suma atraen la atención. También podemos observar patronos.
Por supuesto los coeficientes de las potencias mayores que son términos consecutivos de la sucesión armónica; no es difícil por entenderlo. Los términos siguientes todos tienen $\frac{1}{2}$ como coeficiente, pero es un poco más complicado explicarlo por el proceso de inducción.
Los coeficientes de los terminos del primer grado en las fórmulas para $n = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$, entonces:

$$\frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{42}, -\frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \ldots$$

son llamados 'números de Bernouilli'. Juegan un papel en distintos lugares del análisis[1].

1 De hecho los números de Bernoulli B_1, B_2, ... son determinados por el sistema de ecuaciones

$$\binom{n+1}{1}B_n + \binom{n+1}{2}B_{n-1} + \binom{n+1}{3}B_{n-2} + \ldots + \binom{n+1}{n}B_1 + 1 = 0$$

para $n = 1, 2, \ldots$
Los números mencionados arriba son B_2, B_4, ...
Por el sistema de ecuaciones tenemos $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_3 = 0$, $B_5 = 0$, ...

Epílogo

En el mundo hay millares libros de texto sobre ‘Calculo Infinitesimal’.
Mi estimación es, que 99% de estos libros, tanto en la universidad y como en el bachillerato, tienen globalmente la misma ordenación. Es decir:
(1) continuidad y limite;
(2) la derivada y calculo diferencial;
(3) la anti-derivada y calculo integral;
(4) ecuaciones diferenciales.
Claro. Se necesitan el concepto de limite para poder definir la derivada y para demostrar las reglas de derivación. Se necesitan conocer el calculo diferencial para poder computar integrales definidas o indefinidas. Se necesitan conocer el calculo integral para poder resolver ecuaciones diferenciales.
Entonces, esta ordenación es lógica y eficiente, pero.... es anti-histórica.
Además es típicamente una ordenación estructuralista y un enfoque ‘top-down’.

Dudo fuertemente si el enfoque tanto estructuralista del análisis sea sumamente favorable desde el punto de vista de la didáctica. Cito, con mucha adhesión, el alemano Otto Toeplitz (1926):
Considerando todos los conceptos básicos del cálculo infinitesimal que hoy día enseñamos como requisitos canónicos, por ejemplo el teorema de valor medio, el desarrollo de Taylor, el concepto de convergencia, la integral definida, el cociente diferencial mismo, nunca se ha planteado la pregunta: ¿Por que es así? ¿Cómo se llega a ellos? Sin embargo en algún momento, estas cosas tuvieron que haber sido metas de búsquedas urgentes, o contestaciones a preguntas candentes en su tiempo, es decir, en la epoca de su creación.
Si regresamos al origen de estas ideas, ellas perderían esta apariencia de estar muertas, de ser hechos prefabricados, y en su lugar cobrarían nuevamente una vida fresca y vibrante.

En este cuaderno he intentado de mostrar principalmente que:
- Las raíces del cálculo infinitesimal están en la geometría.
- El contraste entre geometría y análisis es menos fuerte que muchos matemáticos piensen; mejor es hablar sobre una diferencia de enfoques.
- El enfoque geométrico - que es más intuitivo que el enfoque analítico - es subexpuesto en la enseñanza del análisis.
- Se puede integrar unos frutos históricos en la enseñanza de álgebra y análisis

No quiero producir la impresión que debemos seguir la historia paso por paso. Tampoco quiero propagar una ley, análoga a la ley biogenética de Haeckel, que dice que el génesis de conocimiento matemático del individuo debe seguir el mismo camino, pero abreviado, del génesis de conocimiento de la humanidad. Creo que este punto de vista es demasiado dogmático.
De otro lado tengo la experiencia que una introducción histórica de los conceptos guiadores de las matemáticas, no solo es muy inspirando, pero también promueve mucho más la comprensión. Una ventaja de este epoca es que cada uno puede hallar mucha información sobre la historia de las matemáticas en Internet. No pocas veces esta información es superficial, pero por las muchas referencias a la literatura se pueden profundizarse si lo quieren. Además yo se que hay muchas excelentes publicaciones en castellano con respecto a la historia de las matemáticas.

Bibliografia.

Boyer, Carl. B.: *The History of the Calculus and its conceptual development*

Edwards jr., C.H.: *The Historical development of the Calculus*

Fauvel, John y Jeremy Gray: *The History of Mathematics: a Reader*

Heath, Sir Thomas: *A history of Greek Mathematics* (vol 1,2)

Heath, Sir Thomas: *The works of Archimedes*

Heath, Sir Thomas: *The thirteen books of the Elements of Euclid* (vol 1,2,3)

Katz, Victor J.: *A History of Mathematics*

Struik, Dirk J.: *A source book in Mathematics 1200 - 1800*

Swetz, Frank: *Learn from the Masters*

Toeplitz, O.: *The Calculus, a Genetic Approach*

Van der Waerden, B.: *Science Awakening*

Young, R.M.: *Excursions in Calculus, an interplay between the discrete and the continue calculus*